١١



حکومەتی هەرێمی کوردستان- عێراق
وەزارەتی پەروەردە - بەڕێوەبەرایەتی گشتی پرۆگرام و چاپەمەنییەکان

بیرکاری بۆ هەمووان

کتێبی خوێندکار
پۆلی یازدەهەمی زانستی

چاپی هەشتەم
٢٠١٦ ز / ٢٧١٦ کوردی / ١٤٣٧ ک

سەرپەرشتی هونەری چاپ
عوسمان پیرداود کواز
ئاری محسن احمد

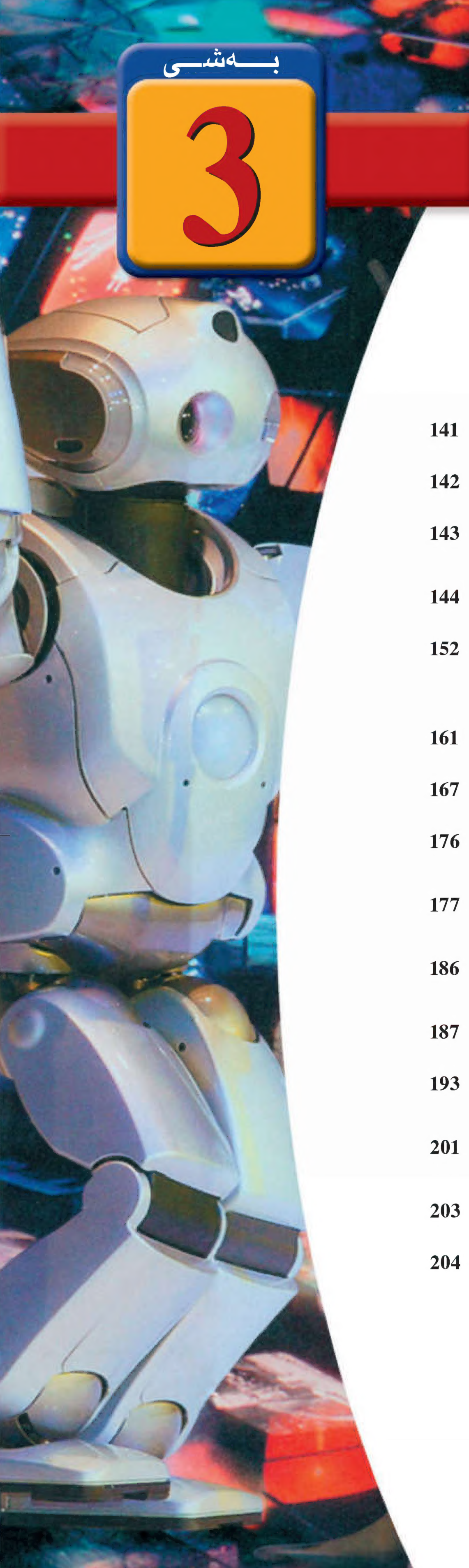


Geometry ئـــــەندازە



سیستمی هاوکێشەکان و لاسەنگە هێڵییەکان

Systems of Linear Equations and Inequalities



بەشی 3

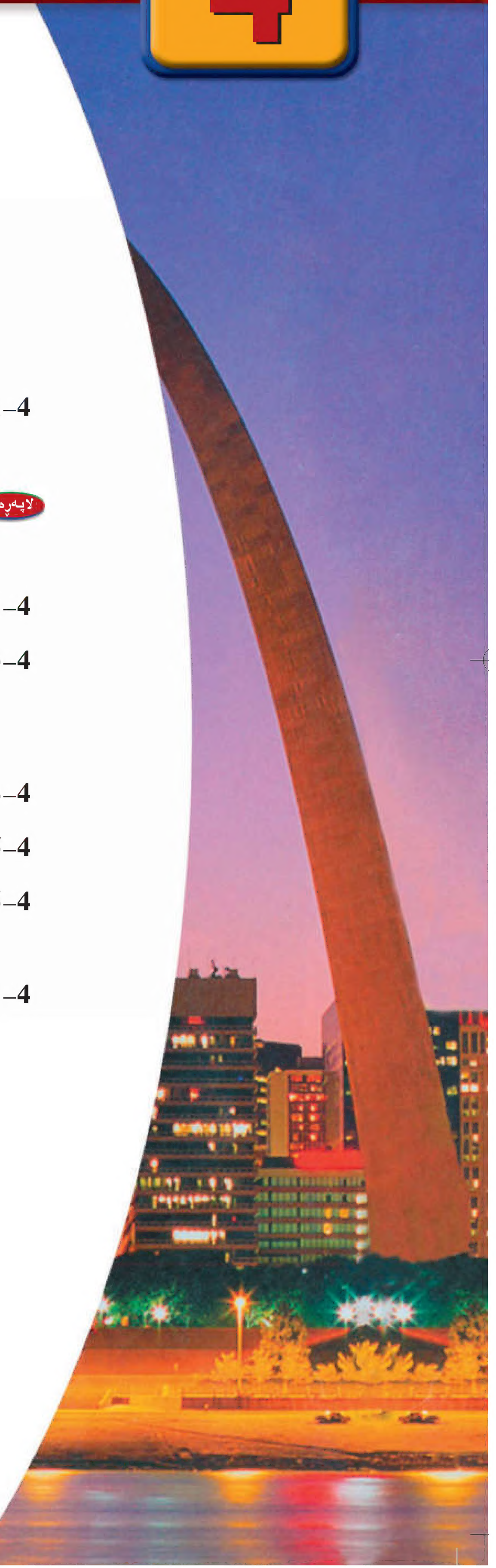
Matrices پیزکراوەکان

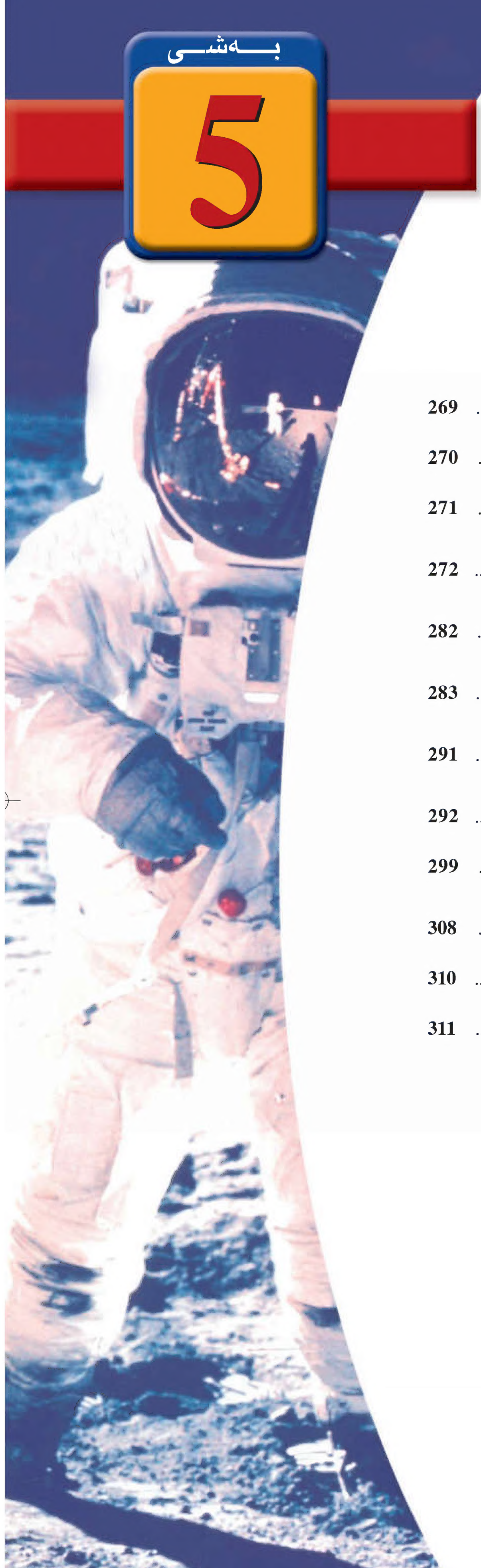
بـــەشـــی

4

نەخشە توانییەکان و لۆگاریتمییەکان

Exponential and Logarithmic Functions





سیفەتەکانی نەخشەکان

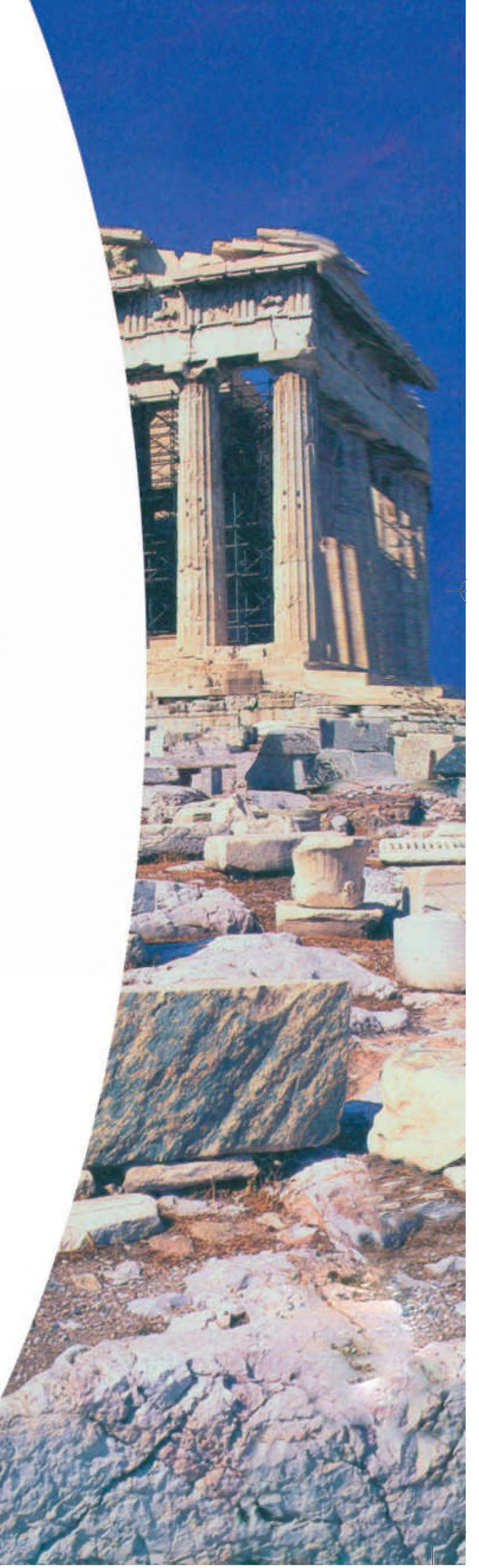
Properties of Functions

بــەشــى

6

یەکبەدوای یەکەکان و زنجیرەکان

Sequences and Series





سێگۆشەزانی

Trigonometry



بەشی 1

ئەندازە Geometry

بەشی یەکەم

وانەکان

تەنە زێڕینەکان

وێنەکە ژمارەیەك چوارلای ڕوو لەناو یەکتر ڕووندەکاتەوە دەتوانیت ڕووەکان بەکاربێنێت بۆ دروستکردنی نموونە چوارییەکان و تەنی ئەندازەیی تر.

ئایا تۆ ئامادەیت؟



زاراوەکان

هەر زاراوەیەك بەپێی پێناسەکەی کەلەلای چەپدا هاتووە ببەستەوە.

1 لاتەریب — **أ** دووری دەوری بازنەکە.

2 نیوەتیرە — **ب** ڕێژەی چێوەی بازنەکە بۆ تیرەکەی.

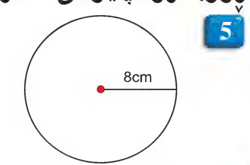
3 پای π — **ج** هەموو لایەکانی جووتن.

4 چێوەی بازنە — **د** دووری نێوان چەقی بازنەو ئەو خاڵەی دەکەوێتە سەری.

هـ چوارلایەکە هەرلایەك لە لایەکانی بەلای بەرامبەری تەریبە.

چێوە و ڕووبەری بازنە

ڕووبەرو چێوەی هەریەك لەم بازنانە بدۆزەوە.

5 

6 

7

هەژمارکردنی دووری و دیاریکردنی ناوەڕاستی پارچە راستەهێڵ

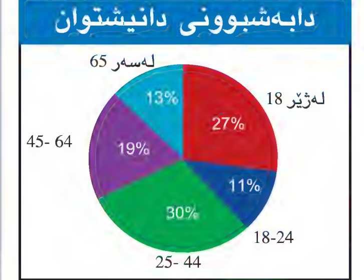
درێژی $\overline{AB}$ و پۆوتانی ناوەڕاستەکەی بدۆزەوە.

8 $A(-3, 2)$ ، $B(5, 6)$ **9** $A(-4, -4)$ ، $B(2, -3)$ **10** $A(0, 1)$ ، $B(-3, 4)$



بازنە ڕوونکردنەوەییەکان

ئەم بازنە ڕوونکردنەوەیەی بەرامبەر بەپێی تەمەنی دانیشتوانی شارێك دەردەخات کە ژمارەیان ٤٠٠٠٠٠ کەسە.



11 ژمارەی ئەو دانیشتوانەی تەمەنیان لەنێوان ١٨و٢٤ساڵدایە چەندە؟

12 ژمارەی ئەو دانیشتوانەی تەمەنیان لە ١٨ساڵ کەمترە چەندە؟

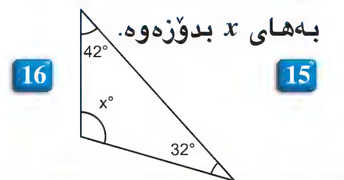
13 ڕێژەی سەدی ئەو دانیشتوانەی تەمەنیان ٤٤ ساڵ زیاترە چەندە؟

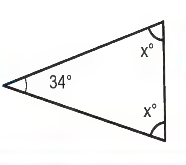
14 ژمارەی ئەو دانیشتوانەی تەمەنیان لە ٤٤ساڵ زیاترە چەندە؟

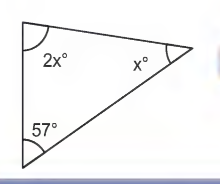
کۆی پێوانەی گۆشەکانی سێگۆشە



بەهای x بدۆزەوە.

15 **16** 

17 

18 

بەشی 1

ڕێبەری خوێندن: تێڕوانین لەسەر بەشەکە

لە رابردوودا

ئەمانەت خوویندووە

- ڕووتەختی پۆوتانەکان.
- سێگۆشەکان و گۆشەکانیان.
- جێگۆڕکێ ئەندازەییەکان وەك ڕاکێشان و خولانەوە.
- پارچە ڕاستەهێڵەکان.
- هەژمارکردنی ڕووبەر و چێوەی بازنە.
- یاسای دووری و پۆوتانی ناوەڕاست لە ڕووتەختی پۆوتاندا.
- بەکارهێنانی بازنە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکان.

لەم بەشەدا

ئەمانە فێردەبیت

- بۆشایی پۆوتان.
- چەندلایەکان و گۆشەکانیان.
- ئەو جێگۆڕکێ ئەندازەییەی کە پێوانەکان دەگۆڕێت.
- پارچە ڕاستەهێڵە ئاڕاستەکراوەکان یان ئاڕاستەبڕەکان.
- چەند لاڕێکەکان و هەژمارکردنی ڕووبەرەکانیان.
- یاسای دووری و پۆوتانی ناوەڕاست لە بۆشایی پۆوتاندا.
- پارچەکان و کەرتە بازنەییەکان و هەژمارکردنی ڕووبەرەکانیان و درێژی کەوانە.

لە داهاتوودا

دەتوانیت کارامەییەکانی ئەم بەشە بەکاربێنیت بۆ:

- دامەزراندنی بنچینەیەکی بەهێز بۆ خوێندنی باڵا.
- تۆژینەوەی ئەو کارانەی پەیوەندییان بەو بابەتانەوە هەیە کە فێریان دەبیت.
- شیکارکردنی ئەو پرسیارانەی پەیوەندییان بە ئەندازەی ناوخۆ و تەلارسازییەوە هەیە.
- هەژمارکردنی دوورییەکان و شرۆڤەکردنی ئەو زانیارییانەی لەرۆژنامە و گۆڤارەکاندا دێت.
- لەژیانی ڕۆژانەدا.

زاراوەکان — Vocabulary

زاراوەکان	Vocabulary
بۆشایی پۆوتان	3D coordinate system
قۆقز	convex
قۆپاو	concave
چەند لای ڕێك	regular polygon
گەورەکردن	enlargement
بچووکردنەوە	compression
ئاڕاستە بڕ	vector
ئەستوندەگ	apothem
چەقی بازنە	center of the circle
چەقی چەندلای‌ڕێك	center of a regular polygon
چەقەگۆشە	central angle
زۆر ڕوو	polyhedron
درێژی کەوانە	arc length
پارچە بازنەیی	segment
کەرتە بازنەیی	sector

ڕۆشناییەك لەسەر زاراوەکان

بۆ ئەوەی لەگەڵ هەندێك لەم زاراوانەدا ڕابێی کە لەم بەشەدا هاتووە ئەم هەنگاوانە پەیرەوبکە:

1. ڕووتەختی پۆوتانەکانت ناسی ئەم زانیارییە چۆن یارمەتیت دەدات بۆ ناسینەوەی **بۆشایی پۆوتان**.
2. وشەی ڕێك واتە پابەندبوون بەسیستەمەوە واتەی **چەندلای ڕێك** لای تۆ چی دەگەیێنێت؟
3. کاتێك پزیشك چاوت دەکاتەوە ئەوا گلێنەکەی گەورەتر دەبێت شێوەیەکی ئەندازەیی **گەورەکراوی** شێوەیەکی ئەندازەییە، مانای چیە؟
4. هەندێك ئاڕاستەبڕ بە پارچە ڕاستەهێڵێکی **ئاڕاستەکراو** دەناسرێت، ئەم پێناسەیە بۆ تێگەیشتنی واتای ئاڕاستەبڕ چۆن بەکاردەهێنیت؟
5. وشەی ئەستوندەنگ بوونی ئەستون دەبەخشێت ئایا لە پێناسەی **ئەستوندەگدا** ئەوە دەبینیت؟
6. وشەی ڕووبەر چ دەگەیێنێت؟ بەڕای تۆ **ڕووبەری گۆ** چییە؟
7. کەباسی شتێك دەکرێت چەقییە واتە لە چەقەکەیدایە ئەوە چۆن یارمەتیت دەدات بۆ تێگەیشتن لە دەربڕینی **چەقەگۆشە** لەبازنەدا، لەچەندلایەکی ڕێکدا.





ستراتیژیەتی خوێندنەوە: خوێندنەوە بۆ شیکارکردنی پرسیار

کاتێك دەست بەخوێندنەوەی دەقی پرسیارێك دەکەیت بۆ شیکارکردنی، لەوانەیە هەست بە نائومێدییەك بکەیت بەرامبەر ئەوەی دەیخوێنیتەوە کاتێك بەشە جیاجیاکانی پرسیارەکە لێك جیادەکەیتەوە و دەیانخەیتە سەر زمانی بیرکاری بۆت دەردەکەوێت پرسیارەکە هاوشێوەی پرسیارەکانی پێشوترە کە شیکارت کردوون.

ڕێنماییەکانی خوێندنەوە

- هەر ڕستەیەك بەهێواشی بخوێنەوە، مەبەستی وشەکان تۆماربکە و لە خوێندنەوەکەت بەردەوامبە.
- وشەکان و ڕستەکان بۆ زمانی بیرکاری بگۆڕە.
- هێڵێك بەژێر داواکراوە دیارەکاندا بهێنە.
- هێلکارییەك بکێشە، هێلکارییەکە ناوبنێ بۆ ئەوەی پێت ڕابگەیەنێت چی دەنوێنێت.
- دووبارە پرسیارەکە بخوێنەوە پێش ئەوەی دەست بەشیکارەکەی بکەیت.

ئەو ڕێنماییانەی سەرەوە بۆ تێگەیشتن لە پرسیارەکەی بەرامبەر بەکاربێنە.

لەکۆتایی ڕۆژێکی سەیرانی سەر شاخێکدا تیمێکی سەیرانکەران چادرێکیان لەدووری 3 km خۆرهەڵاتی خاڵی دەرچوون و 7 km باکوور و لە بەرزایی 0.6 km هەڵدا دووری نێوان چادرگەکە و خاڵی دەرچوون بدۆزەوە.

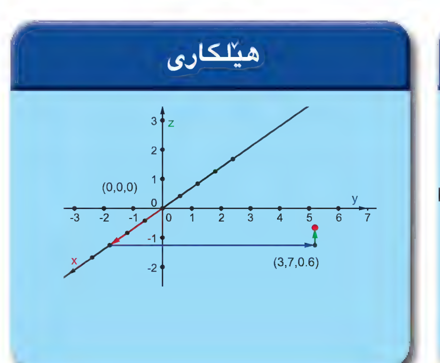
جیاکردنەوەی وشە کلیلیەکان

لە کۆتایی ڕۆژێکی سەیرانی سەر شاخێکدا تیمێکی سەیرانکەران چادرێکیان لە دووری 3 km خۆرهەڵاتی خاڵی دەرچوون 7 km باکور لە بەرزایی 0.6 km هەڵدا، دووری نێوان چادرگەکە و خاڵی دەرچوون بدۆزەوە.

وەرگێڕانی دەق بۆ بیرکاری

دەکرێت خاڵی دەرچون بەخاڵی بنەڕەت $(0, 0, 0)$ دابنرێت هەروەك دەکرێت چادرگەکە بەخاڵی $(3, 7, 0.6)$ بنوێنرێت دەتوانیت دوورییەکەی بەبەکارهێنانی یاسای دووری لە بۆشایی پۆوتاندا هەژماربکەیت.

هێلکاری



یاسای دووری لە بۆشایی پۆوتاندا بۆ هەژمارکردنی دووری نێوان چادرگەکە و خاڵی دەرچوون بەکاربێنە.

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

$$= \sqrt{(3-0)^2 + (7-0)^2 + (0.6-0)^2} \approx 7.6$$

دووری نێوان چادرگەکە و خاڵی دەرچوون برێتییە لە 7.6 km بەنزیکەیی.

هەوڵبدە

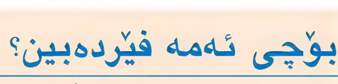
لەم پرسیارەی خوارەوەدا ڕێنماییەکان بۆ خوێندنەوەی پرسیارەکە بەکاربهێنە شیکاری مەکە.

- وشەکان دیاریبکە – کلیلەکان.
- هەر ڕستەیەك بۆ بیرکاری وەربگێرە.
- هێلکارییەك بکێشە پرسیارەکە بنوێنێت.

1. بەرزی لولەکێك 4m و نیوەتیرەکەی 9m ، دووهێندکردنی هەریەك لەم پێوانانە چ کاریگەرییەکی لەسەر قەبارەی لولەکەکە دەبێت؟

1-1 بۆشایی پۆوتان

3D Coordinate system



بۆچی ئەمە فێردەبین؟

لە پێشبڕکێیەکدا دەتوانیت گەنجینەیەکت دەستکەوێت، بەبەکارهێنانی سیستمی پۆوتانەکان لەسێ دووریدا، یارمەتیت دەدات تاشوێنی ئەو گەنجینیەیە لەسەر زەوی دیاریبکەیت.

ئامانجەکان

- خاڵەکان و هاوکێشە هێڵییەکان لە بۆشایی پۆوتاندا دەنوێنێت.

زاراوەکان
Vocabulary

بۆشایی پۆوتان
3D Coordinate system

تەوەری سێیەم
z-axis

سستەمی GPS (سێ دوورییەکان) بۆ دیاریکردنی شوێنەکان بەکاردێت لەڕێی دیاریکردنی دوو هێڵی درێژی و پانی کە شوێنەکەی لێیە و دیاریکردنی بەرزییەکەی

هەروەك چۆن ڕووتەختی پۆوتان ڕووتەختێکی ئاوڵی سیستەمی پۆوتانە، شوێنی هەر خاڵێك بەدوو ژمارە، کە پۆوتانی یەکەمیان x و دووەمیان y دیاریدەکات کەوابوو بۆشایی پۆوتان ئەو بۆشاییەیە کە ئاوڵی سیستمی پۆوتانەکانە و شوێنی هەرخاڵێك بەسێ ژمارە دیاریدەکرێت کە ئەمانەن **تەوەری یەکەم x-coordinate** x و **تەوەری دووەم y-coordinate** y و **تەوەری سێیەم z-coordinate** z دەبێت. بۆشایی پۆوتان 3 تەوەرەی تێدایە **تەوەری یەکەم x-axis** و **تەوەری دووەم y-axis** و **تەوەری سێیەم z-axis** دەبێت ئەم تەوەرانە بە ڕووتەختی پۆوتان دیاریدەکرێت **ڕووتەختی** xy و **ڕووتەختی** yz و **ڕووتەختی** zx.

ڕووتەختی xz
ڕووتەختی xy
ڕووتەختی yz

نموونـــــە 1 دیاریکردنی خاڵەکان لە بۆشایی پۆوتاندا

هەریەك لەم خاڵانە لەبۆشایی پۆوتاندا دابنێ.

أ خاڵی $A(2, 3, -2)$

لەخاڵی بنەڕەتەوە دوویەکە بەرەوپێش لەسەر تەوەری یەکەم بجوڵێ پاشان 3 یەکە بۆلای ڕاست بەئاراستەی تەریب بە تەوەری دووەم پاشان 2 یەکە بۆ خوارەوە بەئاراستەی تەریب بەتەوەری سێیەم.

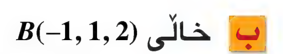
ب خاڵی $B(-1, 1, 2)$

لەخاڵی بنەڕەتەوە یەك یەکە بۆ دواوە لەسەر تەوەری یەکەم بجوڵێ، پاشان بۆ لای ڕاست بەئاراستەی موجەب تەریب بە تەوەری دووەم پاشان دوو یەکە بۆ سەرەوە تەریب بەتەوەری سێیەم.

ج خاڵی $B(-3, -3, 0)$

لەخاڵی بنەڕەتەوە 3 یەکە بۆ دواوە لەسەر تەوەری یەکەم بجوڵێ پاشان 3 یەکە بۆ لای چەپ بەئاراستەی تەریب بە تەوەری دووەم.

z
B(-1,1,2)
C(-3,-3,0)
y
x
A(2,3,-2)



خاڵی چاودێری

1. ئەم خاڵانە دیاریبکە

أ خاڵی $D(1, 3, -1)$　**ب** خاڵی $E(1, -3, 1)$　**ج** خاڵی $F(0, 0, 3)$

بیرت بێتەوە کە هاوکێشەی ڕاستەهێڵ لە ڕووتەختی پۆوتاندا هاوکێشەیەکی هێڵییە وەك $ax+by+c=0$ بەدوو گۆڕاوی x و y هەموو خاڵەکانی (x, y) لە ڕووتەختی پۆوتاندا، پۆوتانەکانی پاسادانی ئەم هاوکێشە هێڵییە دەکەن. هەروەك چۆن هاوکێشەی ڕووتەخت لەبۆشایی پۆوتاندا هاوکێشەیەکی هێڵییە $ax+by+cz+d=0$ بە گۆڕاوەکانی z و y و x و هەموو خاڵەکانی (x, y, z) لە بۆشایی پۆوتاندا پاسادانی ئەو هاوکێشە هێڵییە دەکات کە ڕووتەختەکە پێکدێنێت لەبەرئەوەی سێ خاڵ لەرێکی یەکترنەبن بەسە بۆ پێکهێنانی ڕووتەخت لە بۆشاییدا ئەوا وێنەی یەکتربڕینەکانی ڕووتەختەکە خاوەنی هاوکێشەی $ax+by+cz+d=0$ لەگەڵ تەوەرەکانی سێ پۆوتانەکاندا بەسە بۆ نواندنی ئەو هاوکێشەیە لە بۆشایی پۆوتانەکاندا.

نموونـــــه 2 نواندنی هاوکێشەی هێڵی لە بۆشایی پۆوتاندا

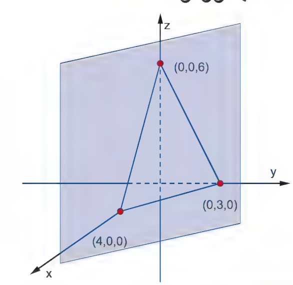
ئەم هاوکێشە هێڵییە لەبۆشایی پۆوتاندا بنوێنە $3x+4y+2z=12$

هەنگاوی 1 یەکتربڕینەکانی ڕووتەختەکە لەگەڵ تەوەری پۆوتانەکاندا بدۆزەوە.

لەگەڵ تەوەرەی یەکەم: $3x+4\times 0+2\times 0=12 \quad x=4$

لەگەڵ تەوەرەی دووەم: $3\times 0+4y+2\times 0=12 \quad y=3$

لەگەڵ تەوەرەی سێیەم: $3\times 0+4\times 0+2z=12 \quad z=6$



هەنگاوی 2 وێنەی خاڵەکانی $(4, 0, 0)$ و $(0, 3, 0)$ و $(0, 0, 6)$ دیاریبکە پاشان ئەو ڕووتەختە بکێشە کە بەو خاڵانەدا دەڕوات.

یارمەتی

بۆ ئەوەی یەکتربڕینی ڕوتەختێك لەگەڵ یەکێك لە تەوەرەکاندا بدۆزیتەوە لەجیاتی پۆوتانی دوو تەوەرەکانی تر 5 دابنێ و هاوکێشەکە شیکاربکە.



2. هاوکێشەی هێڵی $x-4y+2z=4$ لەبۆشایی پۆوتاندا بنوێنە.

نموونـــــه 3 جێبەجێکردن لە تەکنەلۆجیا

لەیارییە باوەکانی بژمێر یاری نواندنی دەورەکانە (أدوار)، هەر یاریکەرێك تیایدا شارستانیەتێك دروست دەکات، لەسەرەتادا هەر یاریکەرێك 100 پارچە زێر بۆ کرینی پێداویستییەکان دەدات لەدوایدا یاریکەرەکان پێشبرکێ لەسەر هێشتنەوەی شارستانیەتییەکان بەزیندوویی دەکەن لە یاساکانی یارییەکەدا هاتووە، نرخی یەکەیەکی خواردن دوو پارچە زێرە ونرخی یەکەیەکی تەختە 3 پارچە زێرە و نرخی یەکەیەکی بەرد 5 پارچە زێرە.

أ هاوکێشەیەکی هێڵی بە سێ گۆڕاو بنووسە بارەکە بنوێنێت.

هێمای f بۆ بری خواردن و w بۆ بری تەختە و s بۆ بری بەرد بەکاربێنە.

100 پارچە زێر	=	نرخی خواردن	+	نرخی تەختە	+	نرخی بەرد
100	=	$2f$	+	$3w$	+	$5s$

ب خشتەی بەرامبەر بەکاربێنە بۆ دیاریکردنی بری ئەو بەردەی کەهەر یاریکەرێك دەیکرێت

دانا $2(20)+3(10)+5s=100 \quad s=6$

زانا $2(15)+3(15)+5s=100 \quad s=5$

خەسرەو $2(40)+3(5)+5s=100 \quad s=1$

پێشرەو $2(25)+3(10)+5s=100 \quad s=4$

یاریکەر	بری خواردن	بری تەختە	بری بەرد
دانا	20	10	▒
زانا	15	15	▒
خەسرەو	40	5	▒
پێشرەو	25	10	▒

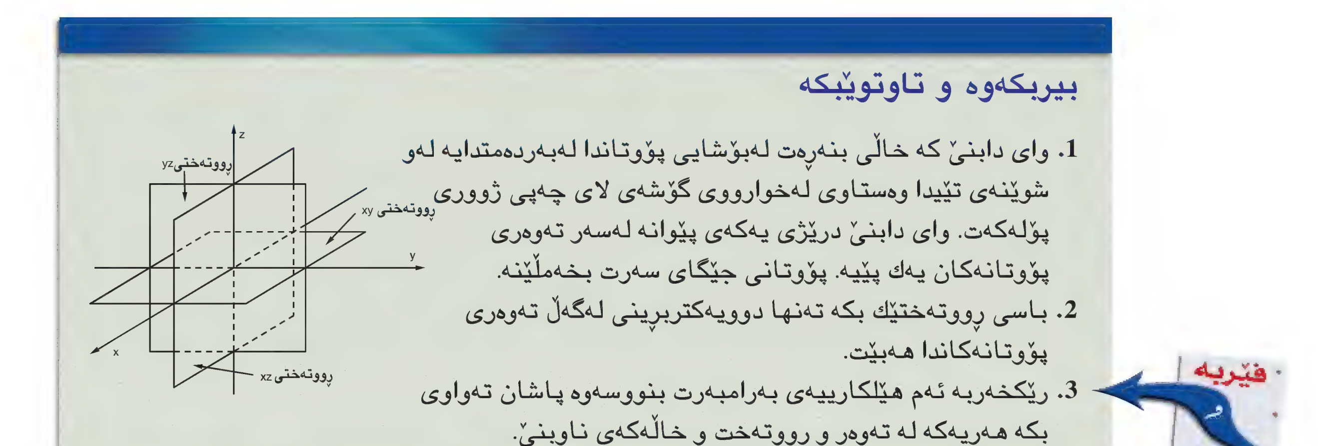
دانا دەتوانێت 6 یەکە بەرد بکرێت کەچی زانا دەتوانێت 5 یەکە و خەسرەو یەك یەکە و پێشرەو 4 یەکە بکرێت.



ئازاد بڕیاریدا لەکۆتایی پشووی هەفتەدا گەشتێك بەپێ ئەنجام بدات لە خۆئامادەکردندا بۆ گەشتەکەی ئەم شتانەی کڕی، چرایەك بە 500 3 دینار و چەند کولێرەیەك نرخی هەریەکەیان 500 1 دیناربوو، چەند شووشە ئاوێك نرخی هەریەکەیان 750 دینار بوو. ئازاد 500 60 دیناری بۆ کڕینی ئەو شتانەدا.

أ هاوکێشەیەکی هێڵی بەسێ گۆڕاو بنووسە، بارەکە بنوێنێت.

ب ئازاد 4 چراو 24 شووشە ئاوی کڕی، چەند کولێرەی کڕیوە؟



بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. وای دابنێ کە خاڵی بنەڕەت لەبۆشایی پۆوتاندا لەبەردەمتدایە لەو شوێنەی تێیدا وەستاوی لەخوارووی گۆشەی لای چەپی ژووری پۆلەکەت. وای دابنێ درێژی یەکەی پێوانە لەسەر تەوەری پۆوتانەکان یەك پێیە. پۆوتانی جێگای سەرت بخەمڵێنە.
2. باسی ڕووتەختێك بکە تەنها دوویەکتربڕینی لەگەڵ تەوەری پۆوتانەکاندا هەبێت.
3. ڕێکخەربە ئەم هێلکارییەی بەرامبەرت بنووسەوە پاشان تەواوی بکە هەریەکە لە تەوەر و ڕووتەخت و خاڵەکەی ناوبنێ.

1-1 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** جیاوازی نێوان ڕووتەختی پۆوتان و بۆشایی پۆوتان ڕوونبکەوە.

بڕوانە نموونە 1

هەریەکە لەم خاڵانە لە بۆشایی پۆوتاندا بنوێنە.

2 $(-3, -2, 1)$ **3** $(0, 0, 2)$ **4** $(1, 4, 5)$ **5** $(-1, 2, 4)$

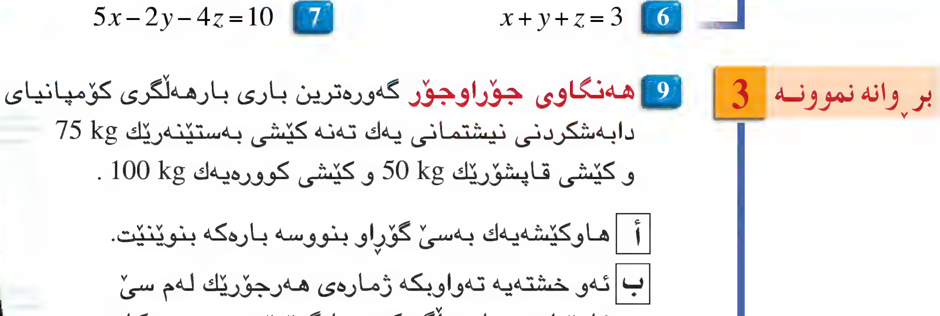
بڕوانە نموونە 2

هەر هاوکێشەیەك لەبۆشایی پۆوتاندا بنوێنە.

6 $x+y+z=3$ **7** $5x-2y-4z=10$ **8** $1.5x+3y-2z=-6$

بڕوانە نموونە 3

9 **هەنگاوی جۆراوجۆر** گەورەترین باری بارهەڵگری کۆمپانیای دابەشکردنی نیشتمانی یەك تەنە کێشی بەستێنەرێك 75 kg و کێشی قاپشۆرێك 50 kg و کێشی کوورەیەك 100 kg .



أ هاوکێشەیەك بەسێ گۆڕاو بنووسە بارەکە بنوێنێت.

ب ئەو خشتەیە تەواوبکە ژمارەی هەرجۆرێك لەم سێ ئامێرانەی بارهەڵگرەکە دەیانگوێزێتەوە ڕووندەکاتەوە.

ج **خەملاندن** گەورەترین ژمارەی ئەو ئامێرانەی بارهەڵگرەکە دەیانگوێزێتەوە بخەملێنە.

جێبەجێکردنەکان

ڕاهێنانی ئازاد	
شیکاری ڕاهێنان	تەماشای نمونە
17–10	1
23–18	2
24	3

شوێنی هەرخاڵێك لە بۆشایی پۆوتاندا دیاریبکە.

10 $(2, -4, 3)$ **11** $(-1, 1, 4)$ **12** $(3, 0, 0)$ **13** $(1, -2, 0)$

14 $(-3, -3, -3)$ **15** $(5, 0, 2)$ **16** $(0, -3, 2)$ **17** $(-4, -1, 1)$

هەر هاوکێشەیەك لە بۆشایی پۆوتاندا بنوێنە.

18 $x + y - z = -1$ **19** $2x - y + 2z = 4$ **20** $x + \frac{1}{2}y + z = -2$

21 $5x + y - z = -5$ **22** $8x + 6y + 4z = 24$ **23** $3x - 3y + 2.5z = 7.5$

24 **گۆلە ماسییەکان** هەڤاڵ 80 000 دیناری هەیە ماسی پێدەکڕێت تا بیخاتە گۆلی ماسییەوە. نرخی سوورە ماسی 10 000 دینار و ڕەشەکەیان 15 000 دینار و خۆڵەمێشەکەی 2 500 دینارە.

سوور	ڕەش	خۆڵەمێشی
2	2	■
■	1	10
3	■	2
5	1	■

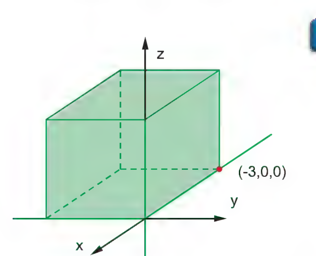
أ) هاوکێشەیەك بەسێ گۆڕاو بنوسە بارەکە بنوێنێت.

ب) ئەو خشتەیە تەواوبکە ژمارەی ئەو ماسییانە دەنوێنێت کە هەڤاڵ دەتوانێت بیانکڕێت.

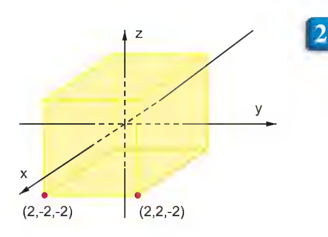
25 **وەرزش** بۆ یاریکەری تۆپی سەبەتە بەپێی سێ جۆر هەڵدان بۆ گۆڵکردن خاڵ تۆماردەکرێت، هەڵدان بەخاڵێك هەڵدانی سەربەخۆ و هەڵدان بە دوو خاڵ و هەڵدان بەسێ خاڵ، یەکێك لە یاریکەرەکان 60 خاڵی تۆمارکرد 20 لەوانەیە هەڵدانی یەك خاڵییە. ژمارەی هەڵدانەکان کە لەدوو جۆرەکەی تر دەگونجێت بدۆزەوە.

ئەندازە خاڵی سەرەکانی هەریەك لەم شەشپاڵوانە دیاریبکە.

26



27



28 **تەلارسازی** ئەندازیارێك 8 ملیۆن دیناری بۆ کاشیکردنی هۆڵێك تەرخانکرد کە 2 000 کاشی دەگرێت بڕیاریدا 3 جۆر کاشی تەختەو سیرامێك و بەرد تاقیبکاتەوە. 400 کاشی سیرامیکی کڕی، ئایا ئەندازیارەکە دەتوانێت ئەو زەویەی لە هۆڵەکە ماوەتەوە بەیەکسانی لەنێوان تەختەو بەردا پێی کاشی بکات؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

نرخی کاشییەکان (کرێ دەست)
- مۆزاییك: 1 500 دینار
- بەرد: 2 000 دینار
- سیرامێك: 4 000 دینار
- تەختە: 6 000 دینار

29 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** ئایا جوولەی سەر ڕاستەهێڵێك ڕۆیشتن و گەڕانەوە، جوولەی دووری دووانەیی دەنوێنێت؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

30 **بنووسە** هاوڕێیەکت بە تەلەفۆن پەیوەندی پێوەکردی داوای لێکردی چۆن بۆشایی پۆوتانەکان دەکێشرێت؟ چۆن ئەوەی بۆ باس دەکەیت؟

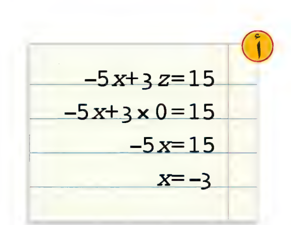
31 ئەندازیارەکان بۆشایی پۆوتان بۆ نەخشەکێشانی پرۆژەی ئەو بینایانەی دروستیدەکەن بەکاردێنن. ئەندازیارێك گڵۆپێکی لەخاڵی $(7, 12, 10)$ دا دانا لەنەخشەکەدا زەوی تەلارەکە بە ڕووتەختی xy دەنوێنرێت، هەرچەندە یەکەی پێوانەی دوو تەوەری یەکەم و دووەم بەپێ دەنوێنرێت.

أ ئەندازیارەکە دوگڵۆپی تری هەڵواسی هەریەکەیان 4 پێ لە گڵۆپی یەکەم دووربێت یەکەمیان بەئاڕاستەی موجەبی تەوەری یەکەم و دووەمیان بەئاڕاستەی موجەبی تەوەری دووەم بێت. پۆوتانی خاڵی هەڵواسینی هەریەکە لەو دوو گڵۆپە چەندە؟

ب ئەگەر شوێنی هەریەکە لەو دوو گڵۆپە پێیەك و نیو لەژێر خاڵی جێگیربووندا بێت.

ج ئەندازیارەکە بڕیاریدا زەوی بیناکە 4 پێ بەرزبکاتەوە. پۆوتانی نوێی گڵۆپی یەکەمجار کامەیە؟

32 **هەڵە لە شیکاردا** لەخوارەوە دوو ڕێگا بۆ هەرژمارکردنی یەکتربڕینی ڕووتەختی $-5x+3z=15$ لەگەڵ تەوەری یەکەمدا هەیە، ڕێگای هەڵە دیاریبکە.


أ

$-5x+3z=15$

$-5x+3\times0=15$

$-5x=15$

$x=-3$

ب

$-5x+3z=15$

$-5\times0+3z=15$

$3z=15$

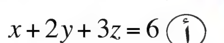
$z=5$



33 کام خاڵ بە 5 یەکە دەکەوێتە دوای خاڵی $(1, 1, 4)$ەوە؟

أ $(-4, 1, 4)$ ب $(1, -4, 9)$ ج $(2, 3, 6)$ د $(6, 6, 9)$

34 کام هاوکێشەیە وێنەی بەرامبەر دەنوێنێت؟



أ $x+2y+3z=6$

ب $2x+y+3z=6$

ج $3x+6y+2z=6$

د $6x+3y+2z=6$

(0,0,3) (2,0,0) (0,1,0) x y z

35 کام خاڵ یەکتربڕینی ڕووتەختی $2x-4y+3z=-12$ لەگەڵ تەوەری دووەم پێکدەهێنێت؟

أ $(0, -3, 0)$

ب $(0, 0, -3)$

ج $(0, 3, 0)$

د $(0, 0, 3)$

36 یەکتربڕینی ڕووتەختی $5x-2y-4z=-3$ لەگەڵ تەوەری سێیەم بدۆزەوە.

بەرەنگاری و فراوانکردن

کاتێک هاوکێشەی هێڵی تەنها دووگۆڕاوی تێدادەبێت لە تەوەری پۆوتانەکاندا ئەوا بە رووتەختێکی تەریب بەیەکێك لە تەوەری پۆوتانەکان دەنوێنرێت. هەریەکە لەم هاوکێشانە لە بۆشاییدا بنوێنە.

37 $x + y = 2$ **38** $y - 2z = 4$ **39** $x + z = 3$ **40** $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = 1$

هاوکێشەیەك بۆ رووتەختێك بنووسە بەزانینی یەکتربڕینەکانی لەگەڵ تەوەرکانی پۆوتان.

	لەگەڵ تەوەری یەکەم	لەگەڵ تەوەری دووەم	لەگەڵ تەوەری سێیەم
41	4	2	−1
42	25	50	10

پێداچوونەوەی لولپێچی

ناوی ئەو تەنە ئەندازەییە دیاربکە کە ژمارەی لایەکان و سەرەکانی زانراوە (پۆلەکانی پێشو).

43 5 سەرو 8 لا **44** 6سەرو 9 لا **45** بێ سەرو بێ لا

46 کۆکردنەوەی پیتاك یانەی هاوکاری گەشتێکی پاسکیل سواری رێکخست بەدرێژایی 1920 km . بەشداربووان رۆژی 120 km یان بڕی، گەشتەکەیان چەند رۆژی خایاند؟ (پۆلەکانی پێشو)

هەریەکە لەم سستمە هێڵیانە شیکاربکە (پۆلەکانی پێشوو).

47 $\begin{cases} 5y = x \\ \frac{2}{5}x + 7y = 18 \end{cases}$ **48** $\begin{cases} 6x - y = 5 \\ 4y - 3x = 1 \end{cases}$ **49** $\begin{cases} x + 3y = 6 \\ 2x - 3y = 9 \end{cases}$



دروستكردنی چەندلا ڕێكەكان

Constructing regular polygons

لەم چالاكییەدا فێری دروستكردنی چەندلا ڕێكەكان دەبێت بە بەكارهێنانی ئەو بازنەیەی دەوری داوە.

چالاكی 1

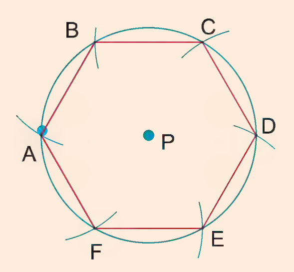
1. بازنەیەك بكێشە چەقەكەی P بێت پاشان تیرەی $\overline{AC}$ بكێشە.
2. تەوەرەی تیرەی بازنەكە $\overline{AC}$ دیاریبكە و خاڵەكانی یەكتربڕینی لەگەڵ بازنەكەدا بە B و D ناوبنێ.
3. هەریەكە لە $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ و $\overline{CD}$ و $\overline{DA}$ بكێشە بەمەش چوارلایەكی یەكسانت دەستدەكەوێت گۆشەكانیشی یەكسان دەبن ئەوەش چەندلایەكی ڕێكە لە 4 لاپێكهاتووە (چوارگۆشەیە).

هەوڵبدە



1. ڕێگایەكی تر بەكاربێنە بۆ وێنەكێشانی چەندلایەكی ڕێك لە 4 لاپێكهاتبێت.
2. سەرەكانی چوارلای ڕێك دەكەونە سەر هەمان بازنە، پەیوەندی نێوان چوارلاو بازنە چییە؟
3. هەشتلای ڕێك ئەو هەشتلایە كە لایەكان و گۆشەكانی جووتن (یەكسانن) بەبەكارهێنانی لەتكەری گۆشەكانی ئەو چوارلایەی لە چالاكی 1 دا دروستت كرد هەشتلایەكی ڕێك بكێشە.

چالاكی 2



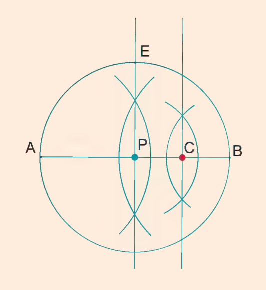
1. بازنەیەك بكێشە چەقەكەی P بێت، خاڵی A لەسەر چێوەكەی دیاریبكە.
2. پەرگالەكە بەكراوەیی بگرە، لەخاڵی A یەوە چەند خاڵێك كە لەدووریدا یەكسان بن لەسەر بازنەكە دیاریبكە خاڵەكان بە B و C و D و E و F ناوبنێ.
3. $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ و $\overline{CD}$ و $\overline{DE}$ و $\overline{EF}$ و $\overline{FA}$ بكێشە شەشلایەكی لایەكسانت دەستدەكەوێت كە گۆشەكانیشی یەكسانن. ئەوە شەشلایەكی ڕێكە.

هەوڵبدە

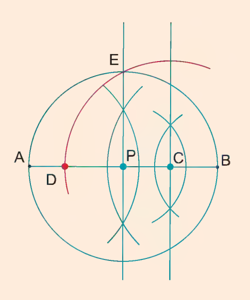
4. بەچیدا دەزانی $ABCDEF$ شەشلایەكی ڕێكە (ڕێنما: تیرەكانی $\overline{AD}$ و $\overline{BE}$ و $\overline{CF}$ بكێشە ئەو سێگۆشانەی بەدەستت هێناون چ جۆرێكن؟
5. **دوازدەلای ڕێك**: چەند لایەكە لە 12 لاو 12 گۆشەی یەكسان پێكدێت بۆ دروستكردنی دوازدەلای ڕێك شەشلایەكی ڕێك بەكاربێنە ڕێگاكەت ڕوونبكەوە.

چالاکی 3

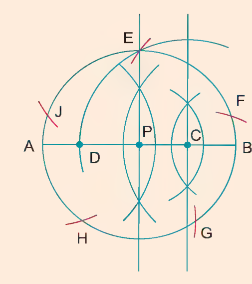
1. بازنەیەك بكێشە چەقەكەی P بێت پاشان تیرەی $\overline{AB}$ بكێشە.
2. تەوەری $\overline{AB}$ دیاریبكە ویەكێك لەدوو خاڵی یەكتربڕینی تەوەرەكە و بازنەكە ناوبنێ E.
3. ناوەڕاستی $\overline{PB}$ دیاریبكە و ناوبنێ C.
4. پرگالەكەت ئەوەندەی CE بكەوە. سەری پرگالەكە لەسەر C دابنێ كەوانەیەك بكێشە $\overline{AB}$ لە خاڵێكدا دەبڕێت ناوی بنێ D.
5. پرگالەكەت ئەوەندەی ED بكەوە لەخاڵی E یەوە دەرچۆ و چەند خاڵێك دووری نێوانیان یەكسان بێت دیاریبكە خاڵەكان بە F و G و H و J ناوبنێ.
6. $\overline{EF}$ و $\overline{FG}$ و $\overline{GH}$ و $\overline{HJ}$ و $\overline{JE}$ بكێشە پێنجلا ڕێكێكت دەستدەكەوێت كە گۆشەكانیشی یەكسانن. ئەوەش پێنجلا ڕێكە.



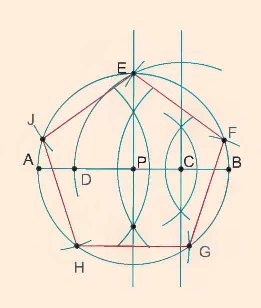
هەنگاوەكان 1 تا 3



هەنگاوی 4



هەنگاوی 5



هەنگاوی 6

هەوڵبدە

6. **دەلای ڕێك:** چەندلایەكە لە 10 لاو 10 گۆشەی یەكسان پێكدێت بەبەكارهێنانی پێنجلای ڕێك دەلایەكی ڕێك دروستبكە ڕێگاكەت ڕوونبكەوە.
7. پێوانەی هەموو گۆشەكانی ئەو چەندلا ڕێكانە هەژماربكە كە لە چالاكی 1 تا 3 دا دروستت كردوون پاشان ئەم خشتەیە تەواوبكە.

چەندلا ڕێكەكان				
ژمارەی لایەكان	3	4	5	6
پێوانەی هەرگۆشەیەك	60°			
كۆی پێوانەی گۆشەكان	180°			

8. **دەستەواژەیەك بنووسە** ڕێسایەكی گشتی بۆ دۆزینەوەی كۆی گۆشەكانی ناوەوەی چەندلایەكی ڕێك ژمارەی لایەكانی n بێت.
9. **دەستەواژەیەك بنووسە** ڕێسایەكی گشتی بۆ دۆزینەوەی پێوانەی هەریەكە لەگۆشەكانی ناوەوەی چەندلایەكی ڕێك ژمارەی لایەكانی n بێت.

2-1 چەندلایەکان

Polygons



بۆچی ئەمە فێردەبین؟

ڕوناکی لەدەرچەی ئامێری وێنەگرتنەوە کە کۆمەڵە تیغێکی تێدایە لەهاوێنەکەیەوە دەچێتە ژوورەوە، بەجۆری کەشێوەی چەند لایەك وەردەگرێت (بڕوانە نموونە 5)

ئامانجەکان

- پۆلینکردنی چەندلایەکان بەپێی ژمارەی لایەکان و پێوانەی گۆشەکانی
- دۆزینەوەی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوە و دەرەوەی چەندلایەکان و بەکارهێنانیان

زاراوەکان

Vocabulary

لای چەندلا
Side of a polygon

سەری چەندلا
Vertex of a polygon

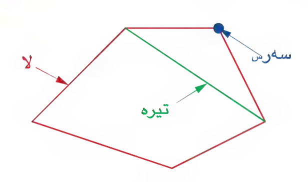
تیرە
Diagonal

چەندلای ڕێك
Regular polygon

قۆپاو
Concave

قۆقز
Convex

لەبیرت بێت چەندلا شێوەیەکی ئەندازەیی داخراوە لە ڕووتەختێکدا، لە 3 پارچە ڕاستەهێڵ یان زیاتر پێکدێت کە دوو پارچەیان لەڕێکی یەکتری نەبن، بەجۆری کە هەر پارچە ڕاستەهێڵێك لەگەڵ تەنها دوو پارچەی تردا یەکتر دەبڕن، یەك دانە لەهەریەك لە لایەکان هەر پارچە ڕاستەهێڵێك لەوانە **لایەکی Side** چەندلایەکە. هەرسەرێکی هاوبەش لەنێوان دوولادا **سەرێکی Vertex** چەندلایەکە. ئەو پارچە ڕاستەهێڵەی دووسەری ناهاوسێ لەسەرەکانی چەندلایەك بەیەك دەگەیێنێت **تیرەیە Diagonal**



ژمارەی لا	ناو
3	سێگۆشە
4	چوارلا
5	پێنجلا
6	شەشلا
7	حەوتلا
8	هەشتلا
9	نۆلا
10	دەلا
11	یازدەلا
12	دوازدەلا

دەتوانین چەندلا بەپێی ژمارەی لایەکانی ناو بنێین. ئەو خشتەیە هەندێك لەو ناوانە ڕوووندەکاتەوە بۆیە چەندلای $ABCDE$ سەرەوە پێنجلایە.

نموونـــــە 1 جیاکردنەوەی چەندلایەکان

لەبیرت بێت

چەندلا شێوەیەکی ئەندازەیی داخراوە لە ڕووتەختدا لەسێ پارچە ڕاستەهێڵ یان زیاتر پێکدێت کە تەنها لە سەرەکانیدا یەکتری دەبڕن.

دیاریبکە ئەم شێوانەی خوارەوە چەندلان یان نا ئەگەر چەند لابوو ناویبنێ.

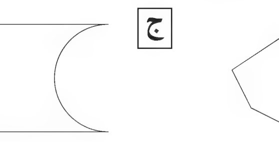


أ چەندلایە، پێنجلایە
ب چەندلانییە
ج چەندلایە، هەشتلایە

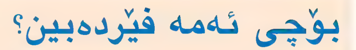
خالی چاودێری

1. دیاریبکە ئەم شێوانە چەندلان یان نا، ئەگەر چەندلابوو ناوبنێ.

أ ب ج



چەندلای ڕێك Regular polygon چەندلایەکە هەموو لایەکانی (لە درێژیدا یەکسانن گۆشەکانیشی جووتن (هەمان پێوانەیان هەیە).



چەندلای قۆپاو Concave چەندلایەکە بەلایەنی کەمەوە تیرەیەکی هەیە کە هەندێك لەخاڵەکانی لەدەرەوەی چەندلایەکەدان.

چەندلای قۆقز Convex چەندلایەکە هەموو تیرەکانی لەناوچەندلایەکەدان چەند لای ڕێك هەمیشە قۆقزە.

چەندلای قۆقز

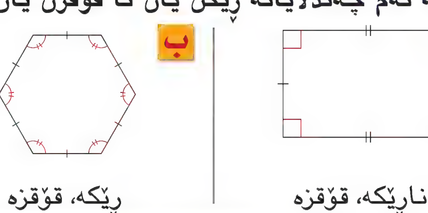
چەندلای قۆپاو

نموونـــــه 2 پۆلینکردنی چەندلایەکان

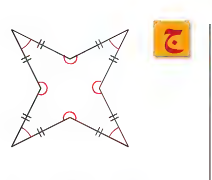
دیاریبکە ئەم چەندلایانە ڕێکن یان نا قۆقزن یان قۆپاون.

أ نارێکە، قۆقزە

ب ڕێکە، قۆقزە



ج نارێکە، قۆپاوە

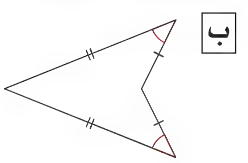




2. دیاریبکە ئەم چەندلایانە ڕێکن یان نا، قۆقز یان قۆپاون.

أ

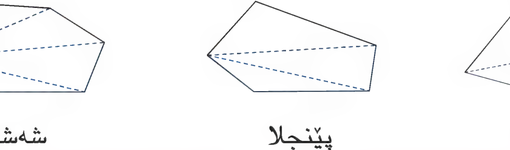
ب

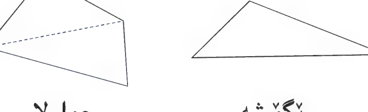


بۆ ئەوەی کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلایەکی قۆقز بدۆزیتەوە هەموو تیرەکانی لەسەرێك لەسەرەکانیەوە بکێشە بەمەش ژمارەیەك سێگۆشەت دەستدەکەوێت، کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلایەکە بریتییە لە کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی هەموو سێگۆشەکان.



بەپێی سەلمێنراوی کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی سێگۆشە ئەو سەرجەمە 180 پلەیە.





شەشلا پێنجلا چوارلا سێگۆشە

چەندلا	ژمارەی لایەکان	ژمارەی سێگۆشەکان	کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوە
سێگۆشە	3	1	$(1) \times 180° = 180°$
چوارلا	4	2	$(2) \times 180° = 360°$
پێنجلا	5	3	$(3) \times 180° = 540°$
شەشلا	6	4	$(4) \times 180° = 720°$
چەندلای n لا	n	$n-2$	$(n - 2) \times 180°$

لەهەریەك لەو چەندلایانە دەردەکەوێت ژمارەی ئەو سێگۆشانەی لە کێشانی تیرەکان لەسەرێکی چەندلایەکەوە پەیدادەبێت 2 ی کەمترە لە ژمارەی لایەکان n لەمەشەوە دەردەکەوێت کە کۆی پێوانەی گۆشەکانی سێگۆشەکان بریتییە لە $(n - 2) \times 180°$



سەلمێنراوی 1-1 کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلا

کۆی پێوانەکانی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلای قۆقز کە n لای هەبێت بریتییە لە $(n - 2) \times 180°$

نموونــــه 3 دۆزینەوەی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلاو دۆزینەوەی سەرجەمەکانیان

أ کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی هەشتلا بدۆزەوە.

$(n - 2) \times 180°$ سەلمێنراوی کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلا

$(8 - 2) \times 180°$ لەجیاتی n بەهاکەی دادەنێین.

$1080°$

ب پێوانەی هەریەك لەگۆشەکانی ناوەوەی نۆلایەکی ڕێك بدۆزەوە.

هەنگاوی 1 کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی نۆلاڕێکەکە بدۆزەوە.

$(n - 2) \times 180°$ سەلمێنراوی کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلا

$(9 - 2) \times 180° = 1260°$ لەجیاتی n بەهاکەی دەدەنێین.

هەنگاوی 2 پێوانەی یەك گۆشەی ناوەوە بدۆزەوە.

$\frac{1260°}{9} = 140°$ کۆی پێوانەکان دابەشی 9 بکە چونکە هەموو گۆشەکان جووتن.

ج پێوانەی هەریەکە لەگۆشەکانی ناوەوەی چوارلای بەرامبەر بدۆزەوە.

$(4 - 2) \times 180° = 360°$ سەلمێنراوی کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلا

$m\hat{P} + m\hat{Q} + m\hat{R} + m\hat{S} = 360°$ لەجیاتی دابنێ.

$c + 3c + c + 3c = 360$ ڕاوە لەیەکچووەکان کۆبکەوە.

$8c = 360$ هەردوولا دابەشی 8 بکە.

$c = 45$

$m\hat{P} = m\hat{R} = 45°$

$m\hat{Q} = m\hat{S} = 3(45°) = 135°$

P Q R S — c°, 3c°, c°, 3c°

تێبینی

مەبەست لە پیتی m لێرەدا بەمانای پێوانە دێت وەك بڵێین:

measure of angle $P = m\hat{P}$

پ ج = پێوانەی گۆشە ج

خاڵی چاودێری

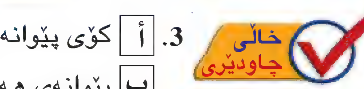
3. **أ** کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی 15 لایەك بدۆزەوە.

ب پێوانەی هەریەك لە گۆشەکانی ناوەوەی دەلایەکی ڕێك بدۆزەوە.

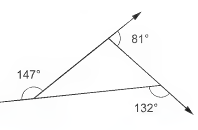
لەبیرت بێت

دەرەگۆشەی سێگۆشە ئەو گۆشەیەیە دەکەوێتە نێوان یەکێك لە لایەکان و درێژکراوەی لا هاوسێیەکەی

هەریەك لە گۆشەکانی دەرەوەی ئەم دوو چەندلایەی خوارەوە پێوراوە. سەرنج بدە کۆی پێوانەی گۆشەکانی دەرەوەی هەریەکێکیان $360°$



$43° + 111° + 41° + 55° + 110° = 360°$



$147° + 81° + 132° = 360°$



سەلمێنراوی 2-1 کۆی پێوانەی گۆشەکانی دەرەوەی چەندلا

کۆی پێوانەی گۆشەکانی دەرەوەی چەندلای قۆقز $360°$یە.

نموونــــه 4 دۆزینەوەی کۆی پێوانەی گۆشەکانی دەرەوەی چەندلا و دۆزینەوەی سەرجەمەکانیان

أ پێوانەی هەریەکە لە گۆشەکانی دەرەوەی شەشلایەکی ڕێك بدۆزەوە.

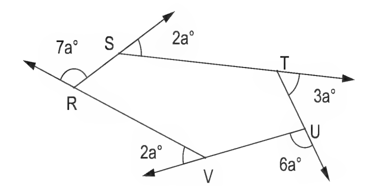
شەشلا 6 لاو 6 سەری هەیە.

کۆی پێوانەی گۆشەکانی دەرەوە $360°$ سەلمێنراوی کۆی پێوانەی گۆشەکانی دەرەوەی چەندلا

پێوانەی هەر گۆشەیەکی دەرەوە $= \frac{360°}{6}$ یان $60°$ دابەشی 6 کراوە چونکە 6 گۆشەی دەرەوەی یەکسانی هەیە.

پێوانەی هەر گۆشەیەکی دەرەوەی شەشلا ڕێکەکە $60°$

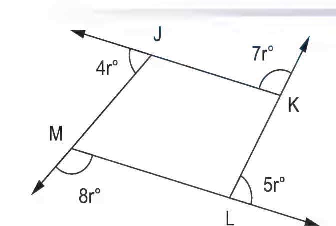
ب بەهای a لە پێنج لای بەرامبەردا بدۆزەوە.



$$7a^\circ+2a^\circ+3a^\circ+6a^\circ+2a^\circ=360^\circ$$
سەلمێنراوی کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلا

$$20a=360$$
ڕادە لەیەکچووەکان کۆکراوەتەوە

$$a=18$$
هەردوو لا دابەشی 20 بکە.



خاڵی چاودێری

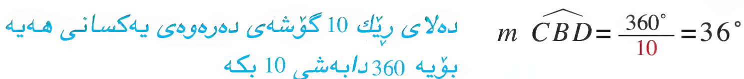
4. **أ** پێوانەی هەریەکە لە گۆشەکانی دەرەوەی دوازدەلایەکی ڕێك چەندە؟

ب بەهای r لەچەندلای بەرامبەردا بدۆزەوە.

نموونـــــه 5 جێبەجێکردن لە وێنەگرتندا

کراوەی ئامێری وێنەگرتن (کامێرا) لە 10 تیغ پێکهاتووە. تیغەکان بەشێوەیەك لەسەریەك دادەنرێت کە دەلایەکی ڕێك پێکبێنێت پیوانەی $\widehat{CBD}$ چەندە؟

$\widehat{CBD}$ گۆشەیەکی دەرەوەی دەلایەکی ڕێکە، کۆی پێوانەی گۆشەکانی دەرەوەی چەندلای ڕێك 360° بەپێی سەلمێنراوی کۆی پێوانەی گۆشەکانی دەرەوەی چەندلا کەواتە



$$m\ \widehat{CBD}=\frac{360^\circ}{10}=36^\circ$$
دەلای ڕێك 10 گۆشەی دەرەوەی یەکسانی هەیە بۆیە 360 دابەشی 10 بکە



خاڵی چاودێری

5. چی دەبێت ئەگەر وای دابنێ ژمارەی تیغەکان 8 بێت لەجیاتی 10 پێوانەی هەریەکە لەگۆشەکانی دەرەوەی چەند دەبێت؟

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. وێنەی پێنجلایەکی قۆقز و پێنجلایەکی قۆپاوبکە، جیاوازی نێوان هەردوو چەندلاکە ڕوونبکەوە.

2. چ هۆیەك ڕێگرە لە بەکارهێنانی $\frac{360^\circ}{n}$ بۆ دۆزینەوەی پێوانەی گۆشەی دەرەوەی چەندلایەکی ناڕێك.

3. خشتەکەی خوارەوە دروستبکەوە و تەواوی بکە، لەهەر خانەیەك برِێك بنووسە بۆ دۆزینەوەی بەهای دیاریکراوی چەندلایەك n لای هەبێت.

فێربە و سەرنج بدە

	گۆشەکانی ناوەوە	گۆشەکانی دەرەوە
کۆی پێوانەی گۆشەکان		
پێوانەی هەر گۆشەیەك		

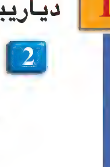
2-1 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

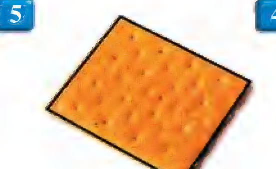
1 **زاراوەکان** ئایا یەکسانبوونی لایەکان بەسە بۆئەوەی چەندلایەک ڕێك بێت؟وەڵامەکەت ڕوونبکەوە. بەنموونەیەك پاڵپشتی وەڵامەکەت بکە.

بڕوانە نموونە 1

دیاریبکە هەر یەك لەم شێوانە چەندلان یان نا، شێوەکە ناوبنێ ئەگەر چەندلابوو.

2  

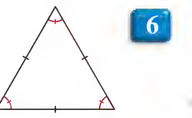
3 

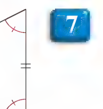
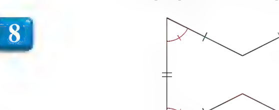
4  

5 

بڕوانە نموونە 2

دیاریبکە ئەم چەندلایانە ڕێکن یان نا، قۆپاون یان قۆقزن.

6 

7  

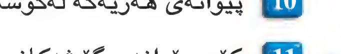
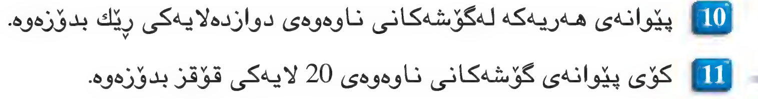
8 

بڕوانە نموونە 3

9 پێوانەی هەریەکە لەگۆشەکانی ناوەوەی پێنجلای بەرامبەر بدۆزەوە.

10 پێوانەی هەریەکە لەگۆشەکانی ناوەوەی دوازدەلایەکی ڕێك بدۆزەوە.

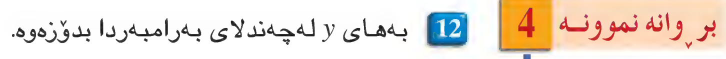
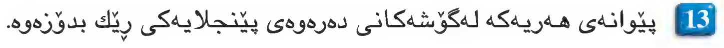
11 کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی 20 لایەکی قۆقز بدۆزەوە.

بڕوانە نموونە 4

12 بەهای y لەچەندلای بەرامبەردا بدۆزەوە.

13 پێوانەی هەریەکە لەگۆشەکانی دەرەوەی پێنجلایەکی ڕێك بدۆزەوە.

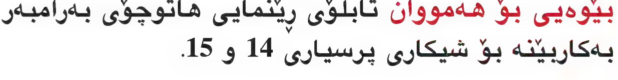
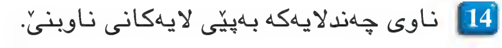
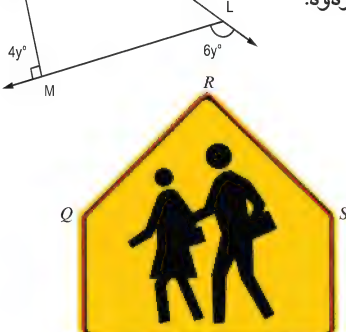




بڕوانە نموونە 5

بێوەیی بۆ هەمووان **تابلۆی ڕێنمایی هاتوچۆی بەرامبەر بەکاربێنە بۆ شیکاری پرسیاری 14 و 15.**

14 ناوی چەندلایەکە بەپێی لایەکانی ناوبنێ.

15 هەریەکە لە پێوانەی $\hat{Q}$ و $\hat{S}$ بدۆزەوە ئەگەر بزانی $\hat{P}$ و $\hat{R}$ و $\hat{T}$ گۆشەی وەستاون و $\hat{Q} \cong \hat{S}$

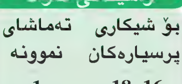





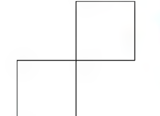
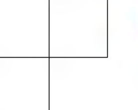
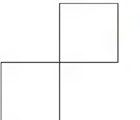
جێبەجێکردنەکان

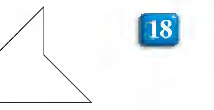
بۆ شیکاری پرسیارەکان	تەماشای نموونە
18–16	1
21–19	2
24–22	3
26–25	4
28–27	5

راهێنانی ئازاد

دیاریبکە ئەم شێوە دروستکراوانە چەندلان یان نا، شێوەکە ناوبنێ ئەگەر چەندلابوو.

16  

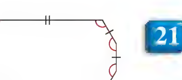
17   

18 

دیاریبکە ئەم چەندلایانە ڕێکن یان نا، قۆپاون یان قۆقزن.

19 

20

21 

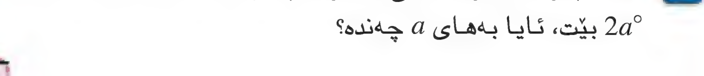
22 پێوانەی هەریەکە لەگۆشەکانی ناوەوەی چەندلای بەرامبەر بدۆزەوە.

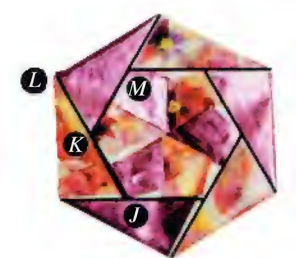
23 پێوانەی هەریەکە لەگۆشەکانی ناوەوەی 18 لایەکی ڕێك بدۆزەوە.

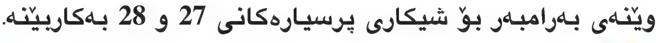
24 کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی حەوتلایەك بدۆزەوە.

25 پێوانەی هەریەکە لەگۆشەکانی دەرەوەی نۆلایەکی ڕێك بدۆزەوە.

26 ئەگەر پێوانەی گۆشەکانی دەرەوەی پێنجلایەك $8a°،10a°،4a°،6a°$ و $2a°$ بێت، ئایا بەهای a چەندە؟







وێنەی بەرامبەر بۆ شیکاری پرسیارەکانی 27 و 28 بەکاربێنە.

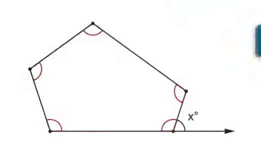
27 بەهای $m\ \widehat{JKM}$ بدۆزەوە.

28 بەهای $m\ \widehat{MKL}$ بدۆزەوە.

جەبر بەهای x لە هەریەك لەم شێوانەدا بدۆزەوە.

29 **30** **31**







ژمارەی لایەکانی ئەو چەندلاڕێکە بدۆزەوە کە لەگەڵ باسەکەیدا گونجاوبێت.

32 پێوانەی هەرگۆشەیەکی ناوەوەی یەکسانە بەپێوانەی هەرگۆشەیەکی دەرەوەی.

33 پێوانەی هەرگۆشەیەکی ناوەوەی یەکسانە بە چوار ئەوەندەی پێوانەی هەر گۆشەیەکی دەرەوەی.

34 پێوانەی هەرگۆشەیەکی دەرەوەی یەکسانە بە $\frac{1}{8}$ پێوانەی هەر گۆشەیەکی ناوەوەی.

ناوی ئەو چەندلایە دیاریکە کەکۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی یەکسانە بە

35 $540°$ **36** $900°$ **37** $1800°$ **38** $2520°$

هەنگاوی جۆراوجۆر ژمارەی لایەکان و پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی ئەو چەندلاڕێکە چەندە؟ ئەگەر بزانیت پێوانەی گۆشەیەکی دەرەوەی یەکسانە بە:

39 $120°$ **40** $72°$ **41** $36°$ **42** $24°$

43 **هەڵە لە شیکاردا** کام دەرئەنجام هەڵەیە؟ هەڵەکە لەکوێدایە؟

أ وێنەی بەرامبەر چەندلا دەنوێنێت

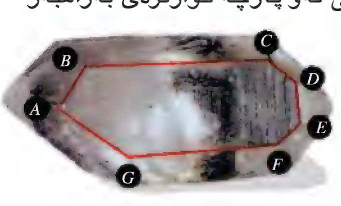
ب وێنەی بەرامبەر چەندلا نانوێنێت.

44 **خەملاندن** وێنەی ئەو چەندلایە بکێشە کە خاڵی سەرەکانی بریتیین لە$A(-2, -6)$ و$B(-4, -1)$ و$C(-1, 2)$ و$D(4, 0)$ و$E(3, -5)$پێوانەی هەریەکە لەگۆشەکانی ناوەوەی بخەملێنە چی دەربارەی گۆشەکانی ئەم چەندلایە دەڵێیت؟ گۆشە پێو بەکاربێنە بۆ پێوانی ئەم گۆشانە وەڵامەکەی پێشوت پاسادانبکە.

45 ئەمانەی خوارەوە هەندێك پێدراون لەسەر پێوانەی گۆشەکانی ئەو پارچە کوارتزەی بەرامبەر

$m\ \hat{A}=95°$ ، $m\ \hat{B}=125°$ ، $m\ \hat{E}=m\ \hat{D}=130°$

$m\ \hat{C}=m\ \hat{D}=m\ \hat{G}$



أ چەندلای $ABCDEFG$ ناوبنێ.

ب کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلایەکە چەندە؟

ج $m\hat{F}$ بدۆزەوە.

46 ئەو چەندلاڕێکە ناوبنێ کە چێوەکەی 45 m و درێژی لایەك لە لایەکانی 7.5 m بێت.

وێنەی ئەمانە بکێشە.

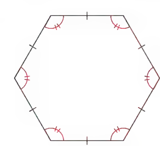
47 چوارلایەکی ڕێك

48 حەوتلایەکی قۆپاوی نارێك.

49 پێنجلایەکی قۆقزی نارێك

50 چەندلایەك لایەکانی یەکسان و گۆشەکانی جووتنین.

51 **بنووسە** زاراوەکانی وانەکە بەکاربێنە بۆ ناونانی چەندلای بەرامبەر کەهەموو سیفەتەکانی گرتبێتە بەر.



52 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** بەزیادبوونی ژمارەی لایەکانی چەندلایەکی ڕێك چەندلایەکە لەکام شێوەی ئەندازەیی نزیکدەبێتەوە.



ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە

53 شێوەی بەرامبەر کام لەم سیفەتانە دەگرێتە خۆ

I چوارلا　　II قۆپاو　　III ڕێك

(أ) تەنها I　　(ب) تەنها II　　(ج) I و II　　(د) I و III



54 16 لای ڕێك کام یەکێك لەم سیفەتانەی تێدا نییە.

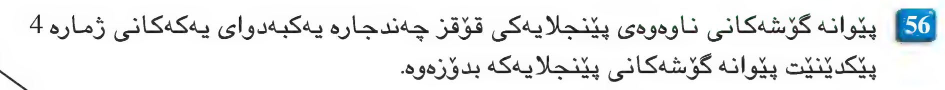
(أ) چەندلایەکی قۆقزە　　(ج) کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی $2\,880°$

(ب) هەموو لایەکانی جووتن　　(د) کۆی گۆشەکانی دەرەوەی $360°$

55 لە چوارلای $ABCD$ دا $m\hat{C}$ چەندە؟ ئەگەر بزانیت $m\hat{A}=45°$ و $m\hat{B}=111°$ و $m\hat{C}=2m\hat{D}$

(أ) $24°$　　(ب) $68°$　　(ج) $102°$　　(د) $136°$

بەرەنگاری و فراوانکردن



56 پێوانە گۆشەکانی ناوەوەی پێنجلایەکی قۆقز چەندجارە یەکبەدوای یەکەکانی ژمارە 4 پێکدێنێت پێوانە گۆشەکانی پێنجلایەکە بدۆزەوە.



57 بەهای x و y و z لەو پێنجلارێکەی بەرامبەر بدۆزەوە.



58 **هەنگاوی جۆراوجۆر** چەندلای $ABCDEFGHJK$ دەلایەکی ڕێکە دوولای $\overline{AB}$ و $\overline{DE}$ درێژکرانەوە تا لە L دا و لەدەرەوەی چەندلایەکە یێکگەیشتن. $m\,\widehat{BLD}$ بدۆزەوە.

59 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** ئایا سەلمێنراوی کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلا ڕاستە لەچەندلای قۆپاودا؟ بۆ پاڵپشتی وەڵامەکەت وێنەی شێوەیەك بکێشە.

پێداچوونەوەی لولپێچی

بەبەکارهێنانی شیتەڵ هەریەك لەم هاوکێشانە شیکاربکە (پۆلەکانی پێشوو)

60 $x^2+3x-10=0$　　**61** $x^2-x-12=0$　　**62** $x^2-12x=-35$

لە پرسیارەکانی 63 تا 65 دوولای سێگۆشەیەك دراوە، پێویستە لەسەرت دوو ڕادە بدۆزێتەوە درێژی لای سێیەم x یان لەنێواندا بێت (پۆلەکانی پێشوو)

63 4؛ 4　　**64** 12؛ 6　　**65** 7؛ 3

لەسێگۆشەی گۆشەوەستاوی 90 – 60 – 30 ئەمانە بدۆزەوە (پۆلەکانی پێشوو)

66 درێژی ژێیەکە، ئەگەر درێژی لا بچووکەکە 6 یەکەبێت.

67 درێژی لا گەورەکە، ئەگەر درێژی ژێیەکە 10 یەکە بێت.

3-1 هاوڕێژەی ئەندازەیی
Dilation



کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟
پرۆگرامسازی کۆمپیوتەر، پۆوتانەکان بۆ گەورەکردن و بچووککردنەوە بەکاردێنێت.

ئامانجەکان
- جێبەجێکردنی سیفەتەکانی هاوشێوەبوون لە ڕووتەختی پۆوتاندا
- سەلماندنی هاوشێوەبوونی دوشێوەی ئەندازەیی بەبەکارهێنانی پۆوتانەکان.

زاراوەکان
Vocabulary

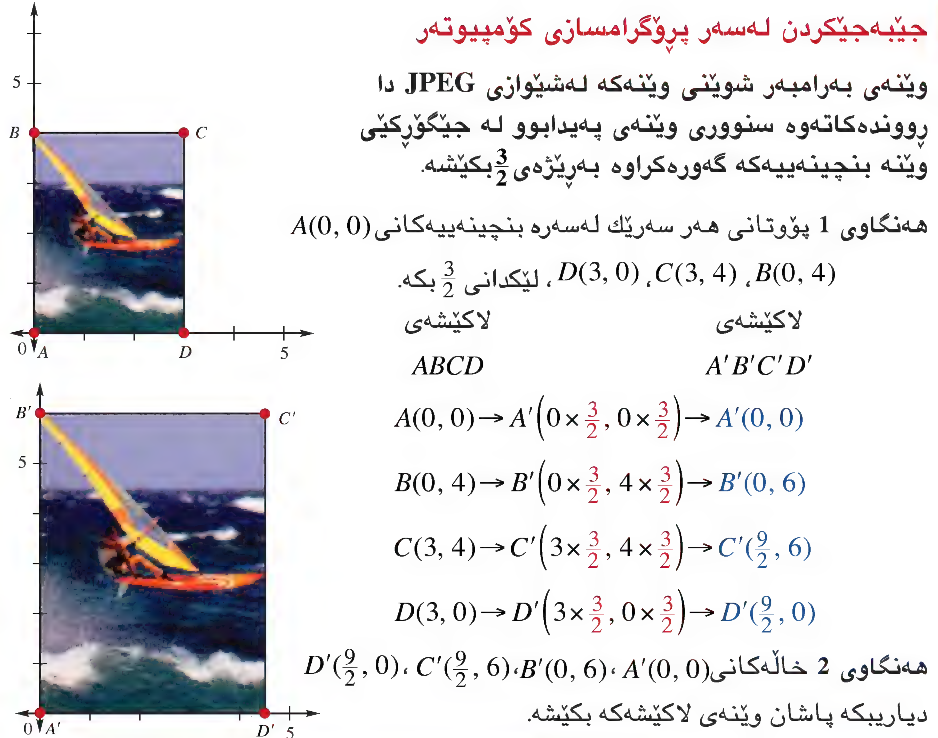
هاوڕێژەی ئەندازەیی
Dilation

ڕێژەی جێگۆڕکێ
Scale factor

زۆر لەو وێنانەی لەسەر تۆڕی ئەنتەرنێت دەبینرێن پشت بە شێوەی JPEG (format) دەبەستێت چونکە گۆڕین وگواستنەوەی وێنەکان ئاسانەکات کاتێك بە ماوسەکە گۆشەیەکی وێنەکە ڕادەکێشێت لەشێوەی JPEG بە مەبەستی گەورەکردن یان بچووکردنەوەی بەرنامەکە، پێوانەکانی ئەو وێنەیە دەستکەوتووە بە بەکارهێنانی پۆوتانەکان و هاوشێوەبوون ڕێکدەخات. **هاوڕێژەی ئەندازەیی Dilation**: جێگۆڕکێیەکی ئەندازەییە پێوانەکانی شێوە ئەندازەییەکە دەگۆڕێت لەگەڵ پارێزگاریکردنی شێوەکەی بنەڕەت و وێنەکەی لەم جێگۆڕکێیەدا دوو شێوەی هاوشێوەن ڕێژەی ئەم **جێگۆڕکێ ئەندازەییە Scale factor** ژمارەیەکی ڕاستی موجەبە$k \neq 1$ ڕادەی گەورەکردن یان بچووکردنەوەی وێنەکە لەچاو بنچینەکەیدا نیشاندەدات. وێنەی خاڵی (x, y) بەهاوڕێژەی ئەندازەیی ڕێژەکەی k بێت بریتییە لە(kx, ky) ، ئەگەر$k > 1$ هاوڕێژە ئەندازەییەکە **گەورەکردن** و ئەگەر$k < 1$ ئەوا هاوڕێژە ئەندازەییەکە **بچووکردنەوە** دەبێت.

نموونــــە 1
جێبەجێکردن لەسەر پرۆگرامسازی کۆمپیوتەر

وێنەی بەرامبەر شوێنی وێنەکە لەشێوازی JPEG دا ڕووندەکاتەوە سنووری وێنەی پەیدابوو لە جێگۆڕکێی وێنە بنچینەییەکە گەورەکراوە بەڕێژەی$\frac{3}{2}$بکێشە.



هەنگاوی 1 پۆوتانی هەر سەرێك لەسەرە بنچینەییەکانی $A(0, 0)$ ، $B(0, 4)$، $C(3, 4)$، $D(3, 0)$ ، لێکدانی $\frac{3}{2}$ بکە.

لاکێشەی $A'B'C'D'$	لاکێشەی $ABCD$

$$A(0, 0) \rightarrow A'\left(0 \times \frac{3}{2}, 0 \times \frac{3}{2}\right) \rightarrow A'(0, 0)$$

$$B(0, 4) \rightarrow B'\left(0 \times \frac{3}{2}, 4 \times \frac{3}{2}\right) \rightarrow B'(0, 6)$$

$$C(3, 4) \rightarrow C'\left(3 \times \frac{3}{2}, 4 \times \frac{3}{2}\right) \rightarrow C'(\tfrac{9}{2}, 6)$$

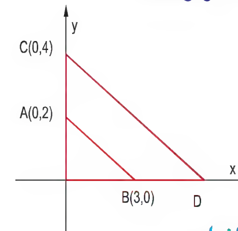
$$D(3, 0) \rightarrow D'\left(3 \times \frac{3}{2}, 0 \times \frac{3}{2}\right) \rightarrow D'(\tfrac{9}{2}, 0)$$

هەنگاوی 2 خاڵەکانی$A'(0, 0)$ ، $B'(0, 6)$، $C'(\frac{9}{2}, 6)$ ، $D'(\frac{9}{2}, 0)$ دیاریبکە پاشان وێنەی لاکێشەکە بکێشە.

خاڵی چاودێری
1. **چی دەبێت ئەگەر** سنووری وێنەی پەیدابوو لە جێگۆڕکێی وێنە بنچینەییەکە بە بچووکردنەوەیەك ڕێژەکەی $\frac{1}{2}$ بێت بکێشە.

نموونــــه 2

دۆزینەوەی پۆوتانی شێوەیەکی ئەندازەیی هاوشێوەی شێوە دراوەکە



پۆوتانی خاڵی D وریژەی ئەو هاوریژە ئەندازەییەی جێگۆرکێ بەخاڵی B بۆ خاڵی D دەکات و جۆرەکەشی بدۆزەوە ئەگەر بزانیت کە هەردوو سێگۆشەی AOB و COD هاوشێوەن.

لەبەرئەوەی دوو سێگۆشەکە هاوشێوەن واتە $\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}$

$\frac{2}{4}=\frac{3}{OD}$ بەهای هەر پێوانەیەك دانراوە

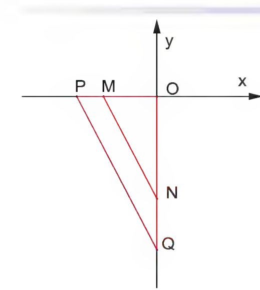
$2OD=12$ لێکدانی دوولا و دوو نێوان کراوە

$OD=6$ هەردوولا دابەشی دوو کراوە.

لەبەرئەوەی D لەسەر تەوەری x ە، بۆیە y سفرە. و لەبەرئەوەی $OD=6$ ئەوا پۆی یەکەم یەکسانە بە 6 واتە $x=6$. کەواتە پۆوتانی D بریتییە لە $(6, 0)$. لەبەرئەوەی $(6, 0)=(3\times2, 0\times2)$ ئەوا ڕێژەی جێگۆرکێیەکە بریتییە لە 2 گەورەکردن.

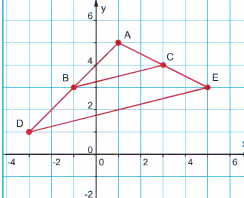


2. دوو سێگۆشەی MON و POQ هاوشێوەن کاتێك $M(-10, 0)$ و $P(-15, 0)$ و $Q(0, -30)$ بێت.
پۆوتانی N و ڕێژە هاوریژەییەکەی بدۆزەوە پاشان جۆرەکەی دیاریبکە.



نموونــــه 3

سەلماندنی هاوشێوەبوونی دوو سێگۆشە بەهۆی پۆوتانەوە.



دراو: $A(1, 5)$ ، $B(-1, 3)$ ، $C(3, 4)$ ، $D(-3, 1)$ ، $E(5, 3)$

داواکراو: بیسەلمێنە هەردوو سێگۆشەی ABC و ADE هاوشێوەن.

هەنگاوی 1: خاڵەکان دیاریبکە پاشان وێنەی دوو سێگۆشەکە بکێشە.

هەنگاوی 2: یاسای دووری بۆ هەژمارکردنی درێژی لایەکان بەکاربێنە.

$$AB=\sqrt{(-1-1)^2+(3-5)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$AC=\sqrt{(3-1)^2+(4-5)^2}=\sqrt{5}$$

$$AD=\sqrt{(-3-1)^2+(1-5)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$$

$$AE=\sqrt{(5-1)^2+(3-5)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

هەنگاوی 3: ڕێژەی هاوشێوەبوون بدۆزەوە.

$$\frac{AB}{AD}=\frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{AC}{AE}=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=\frac{1}{2}$$

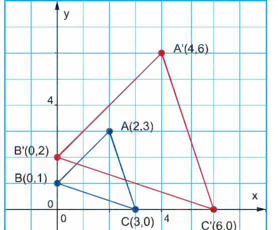
لەبەرئەوەی $\frac{AC}{AE}=\frac{AB}{AD}$ و لەبەرئەوەی $\widehat{BAC}\cong\widehat{DAE}$ کەواتە دووسێگۆشەکە هاوشێوەن.



3. **دراو:** $R(-2, 0)$ و $S(-3, 1)$ و $T(0, 1)$ و $U(-5, 3)$ و $V(4, 3)$.
داواکراو: بیسەلمێنە هەردوو سێگۆشەی RST و RUV هاوشێوەن.

نموونـــــه 4 بەکارهێنانی سێ لا (لا، لا، لا) بۆ هاوشێوەبوونی سێگۆشەکان

سێگۆشەی ABC وێنەکەی $A'B'C'$ بەگەورەکردنێك ڕێژەکەی 2 بێت بکێشە، پاسادانی هاوشێوەبوونی دوو سێگۆشەکە بکە.



هەنگاوی 1: بۆ دۆزینەوەی پۆوتانی سێگۆشەی $A'B'C'$ پۆوتانی هەر خاڵێك لێکدانی 2 بکە.

$$A(2,3)\to A'(2\times 2,\,3\times 2)\to A'(4,6)$$
$$B(0,1)\to B'(0\times 2,\,1\times 2)\to B'(0,2)$$
$$C(3,0)\to C'(3\times 2,\,0\times 2)\to C'(6,0)$$

هەنگاوی 2: وێنەی سێگۆشەی $A'B'C'$ بکێشە.

هەنگاوی 3: یاسای دووری بۆ هەژمارکردنی درێژی لایەکان بەکاربێنە.

$$AB=\sqrt{(2-0)^2+(3-1)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}\qquad A'B'=\sqrt{(4-0)^2+(6-2)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$$

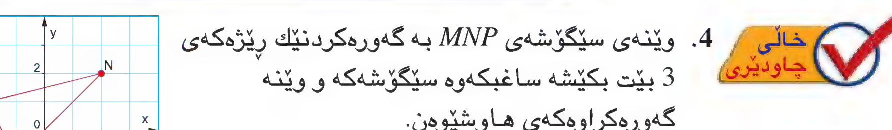
$$BC=\sqrt{(3-0)^2+(0-1)^2}=\sqrt{10}\qquad B'C'=\sqrt{(6-0)^2+(0-2)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$

$$AC=\sqrt{(3-2)^2+(0-3)^2}=\sqrt{10}\qquad A'C'=\sqrt{(6-4)^2+(0-6)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$

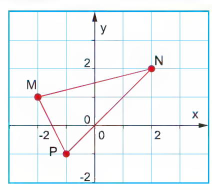
هەنگاوی 4: ڕێژەی هاوشێوەبوون بدۆزەوە.

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=2\qquad \frac{B'C'}{BC}=\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{10}}=2\qquad \frac{A'C'}{AC}=\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{10}}=2$$

لەبەرئەوەی $\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'C'}{AC}$ مانای دوو سێگۆشەی $A'B'C'$ و ABC هاوشێوەن.



4. وێنەی سێگۆشەی MNP بە گەورەکردنێك ڕێژەکەی 3 بێت بکێشە ساغبکەوە سێگۆشەکە و وێنە گەورەکراوەکەی هاوشێوەن.

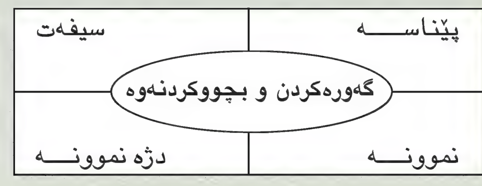


بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. پۆوتانی سەرەکانی سێگۆشەی JKL بریتیین لە $J(0,0)$ و $K(0,2)$ و $L(3,0)$ پۆوتانی سەرەکانی وێنەی ئەم سێگۆشەیە بەهاوڕێژەی ئەندازەیی بریتیین لە $J'(0,0)$ و $K'(0,8)$ و $L'(12,0)$ چۆن هاوڕێژەی ئەندازەیی دەدۆزیتەوە؟ چۆن جۆرەکەی دیاریدەکەیت؟



2. **ڕێکخەرە:** خشتەکەی خوارەوە بنووسە و تەواوی بکە، لەهەر چوارچێوەیەکدا ئەوەی داواکراوە بینووسە.





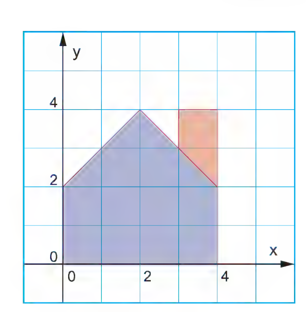
3-1 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** ڕێژەی پێوانەکانی وێنەی شێوەیەکی ئەندازەیی بە گەورەکردن یان بچووکردنەوە بریتییە لە ___?___ (هاوڕێژەی ئەندازەیی، ڕێژەی هاوڕێژەی ئەندازەیی).

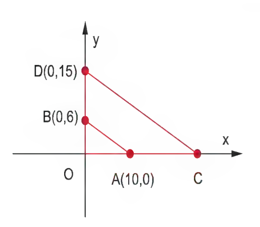
نموونە 1

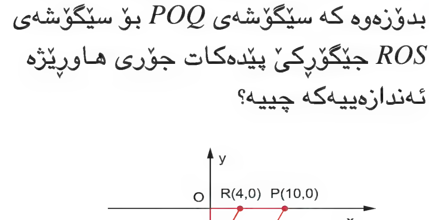
2 **نەخشەکێشانی ڕوونکردنەوەیی Graphic Design** یەکێك لە ئەندازیارەکان شێوەی بەرامبەری نەخشەکێشا بۆ ئەوەی ببێتە دروشمی یەکێك لەدامەزراوەکان. بەڕێوەبەری دامەزراوەکە داوای لەئەندازیارەکە کرد ئەو دروشمە بەڕێژەی 2 گەورە بکات. وێنەی دروشمەکە دوای گەورەکردن بکێشە.



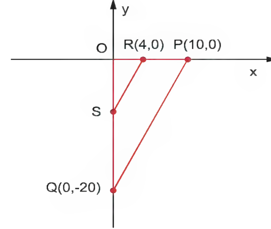


3 دوو سێگۆشەی AOB و COD هاوشێوەن پۆوتانی C و ئەو ڕێژە هاوڕێژە ئەندازەییە بدۆزەوە کە سێگۆشەی AOB بۆ سێگۆشەی COD جێگۆڕکێ پێدەکات جۆری هاوڕێژە ئەندازەییەکە چییە؟





4 هەردوو سێگۆشەی ROS و POQ هاوشێوەن پۆوتانی S و ئەو ڕێژە هاوڕێژە ئەندازەییە بدۆزەوە کە سێگۆشەی POQ بۆ سێگۆشەی ROS جێگۆڕکێ پێدەکات جۆری هاوڕێژە ئەندازەییەکە چییە؟



نموونە 3

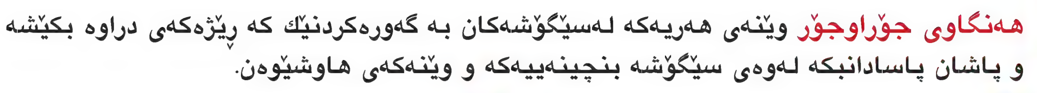
5 دراو: $A(0, 0)$ و $B(-1, 1)$ و $C(3, 2)$ و $D(-2, 2)$ و $E(6, 4)$.

داواکراو: بیسەلمێنە دوو سێگۆشەی ABC و ADE هاوشێوەن.

6 دراو: $J(-1, 0)$ و $K(-3, -4)$ و $L(3, -2)$ و $M(-4, -6)$ و $N(5, -3)$.

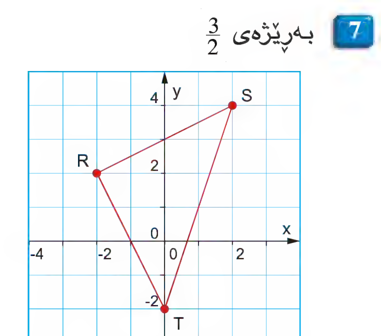
داواکراو: بیسەلمێنە دوو سێگۆشەی JKL و JMN هاوشێوەن.



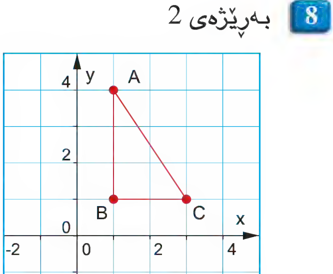


هەنگاوی جۆراوجۆر وێنەی هەریەکە لەسێگۆشەکان بە گەورەکردنێك کە ڕێژەکەی دراوە بکێشە و پاشان پاسادانبکە لەوەی سێگۆشە بنچینەییەکە و وێنەکەی هاوشێوەن.

7 بەڕێژەی $\frac{3}{2}$



8 بەڕێژەی 2



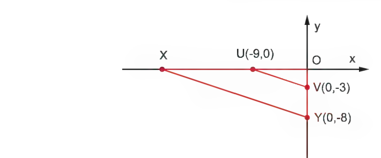
ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

شیکارکردنی پرسیارەکان	تەماشای نموونە
10	1
12-11	2
14-13	3
16-15	4

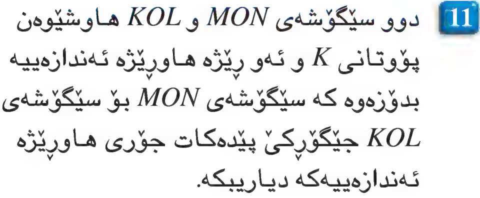
(ڕاهێنانی ئازاد)

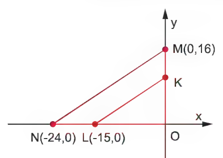
9 **ڕێکلامەکان** بریکارێکی بڵاوکردنەوەی ڕێکلام وێنەی بەرامبەری بۆ دروشمی مانگی کرین و فرۆشتن دروستکرد بریکارەکە دەیەوێت دروشمەکە بچووک بکاتەوە بەڕێژەی نیوە تا لەسەر کارت چاپی بکات. وێنەی دروشمەکە پاش بچووکردنەوە بکێشە.

10 دوو سێگۆشەی UOV و XOY هاوشێوەن پۆوتانی X و ئەو ڕێژە ئەندازەییە بدۆزەوە کە سێگۆشەی UOV بۆ سێگۆشەی XOY جێگۆڕکێ پێدەکات جۆری هاوڕێژە ئەندازەییەکە دیاریبکە.



11 دوو سێگۆشەی MON و KOL هاوشێوەن پۆوتانی K و ئەو ڕێژە هاوڕێژە ئەندازەییە بدۆزەوە کە سێگۆشەی MON بۆ سێگۆشەی KOL جێگۆڕکێ پێدەکات جۆری هاوڕێژە ئەندازەییەکە دیاریبکە.





12 دراو: $D(-1, 3)$ و $E(-3, -1)$ و $F(3, -1)$ و $G(-4, -3)$ و $H(5, -3)$

داواکراو: بیسەلمێنە دوو سێگۆشەی DEF و DGH هاوشێوەن.

13 دراو: $M(0, 10)$ و $N(5, 0)$ و $P(15, 15)$ و $Q(10, -10)$ و $R(30, 20)$

داواکراو: بیسەلمێنە دوو سێگۆشەی MNP و MQR هاوشێوەن.

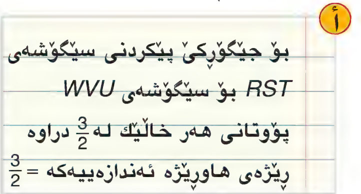
هەنگاوی جۆراوجۆر وێنەی هەریەکە لە سێگۆشەکان دوای جێگۆڕکێ پێکردنیان بکێشە بە گەورەکردنێك یان بچووکردنێك بەڕێژەی k . پاشان پاسادانییبکە لەوەی سێگۆشە بنچینەییەکە وێنەکەی هاوشێوەن.

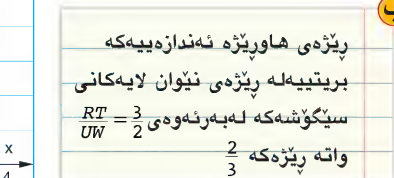
14 $J(-2, 0)$ ، $K(-1, -1)$ ، $L(-3, -2)$ ؛ $k = 3$.

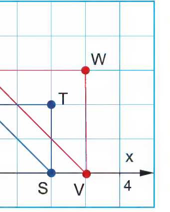
15 $M(0, 4)$ ، $N(4, 2)$ ، $P(2, -2)$ ؛ $k = \frac{1}{2}$.

16 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگر** ئایا ئەو جێگۆڕکێ ئەندازەییەی خاڵی (x, y) بۆ خاڵی $(2x, 4y)$ جێگۆڕکێ پێدەکات، هاوڕێژەیەکی ئەندازەییە؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

17 **هەڵە لە شیکردنەوەدا** لە خوارەوە دوو شیکار بۆ دۆزینەوەی ڕێژەی هاوڕێژەی ئەندازەیی کە سێگۆشەی RST بۆ سێگۆشەی UVW جێگۆڕکێ پێدەکات کامیان هەڵەیە؟ وەڵامەکەت ڕوون بکەوە

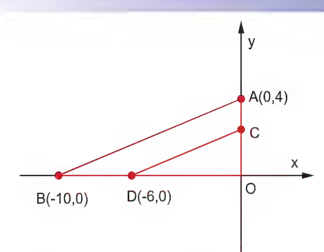

أ
بۆ جێگۆڕکێ پێکردنی سێگۆشەی RST بۆ سێگۆشەی WVU
پۆوتانی هەر خاڵێك لە $\frac{3}{2}$ دراوە
ڕێژەی هاوڕێژە ئەندازەییەکە $= \frac{3}{2}$


ب
ڕێژەی هاوڕێژە ئەندازەییەکە
بریتییەلە ڕێژەی نێوان لایەکانی
سێگۆشەکە لەبەرئەوەی $\frac{RT}{UW} = \frac{3}{2}$
واتە ڕێژەکە $\frac{2}{3}$



18 **بنووسە** سێگۆشەی $A'B'C'$ وێنەی سێگۆشەی ABC بەهاوڕێژەیەکی ئەندازەیی، پەیوەندی لە نێوان ڕێژەی هاوڕێژە ئەندازەییەکە و ڕێژەی هاوشێوە بوونەکە لە نێوان دوو سێگۆشەکەدا چییە؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

19 پۆوتانی J و L چییە، ئەگەر واتدانا کە هەریەك یەکە لەسەر دوو تەوەری پۆوتانەکان 60 cm بێت وێنەی سێگۆشەکە و گەورەکردنەکەی لە ڕووتەختی پۆوتانەکاندا بە ڕێژەی 3 بکێشە.



20 کام پۆوتان بۆ خاڵی C هەڵدەبژێری تا هەردوو سێگۆشەی COD و AOB هاوشێوەبن.

ⓐ $(0, 2.4)$ ⓙ $(0, 3)$

ⓑ $(0, 2.5)$ ⓓ $(0, 3.6)$

21 سێگۆشەی $A'B'C'$ گەورەکراوی سێگۆشەی ABC بەرێژەی 2. ئەگەر چێوەی ABC 60 یەکە بێت ئایا چێوەی $A'B'C'$ چەندە؟

ⓐ 30 یەکە ⓑ 60 یەکە ⓙ 120 یەکە ⓓ 240 یەکە

22 کام سێگۆشەی DEF هاوشێوەی سێگۆشەی ABC دەبێت.

ⓐ $D(1, 2)$ ، $E(3, 2)$ ، $F(2, 0)$

ⓑ $D(-1, -2)$ ، $E(2, -2)$ ، $F(1, -5)$

ⓙ $D(1, 2)$ ، $E(5, 2)$ ، $F(3, 0)$

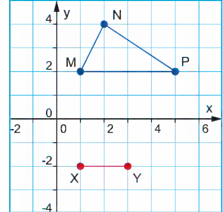
ⓓ $D(-2, -2)$ ، $E(0, 2)$ ، $F(-1, 0)$

23 **کورتە وەڵام** $\overline{AB}$ بەرێژەی 3 گەورەکرا کاتێك $A(3, 2)$ و $B(7, 5)$ بێت درێژی $\overline{A'B'}$ چەندە؟

بەرەنگاری و فراوانکردن

24 چەند سێگۆشە یەکێك لەلایەکانی $\overline{XY}$ بێت هاوشێوەی سێگۆشەی MNP دەبن؟

25 پۆوتانی Z بدۆزەوە کاتێك سێگۆشەی XYZ هاوشێوەی سێگۆشەی MPN بێت.

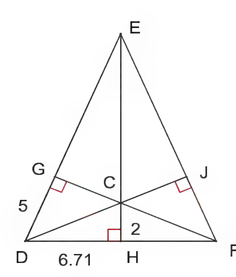


26 دولای لاکێشەیەك لەسەر تەوەری پۆوتانەکانە، ئەگەر یەکێك لەسەرەکانی بکەوێتە سەر خاڵی بنەرەت و سەرەکەی تری بکەوێتە سەر راستەهێڵی $y = 2x$ بیسەلمێنە هەردوو لاکێشەکە مەرجەکانی پێشوو پاسادان دەکەن هاوشێوەدەبن.

27 سەرەکانی سێگۆشەی ABC بریتیین لە $A(0, 1)$ و $B(3, 1)$ و $C(1, 3)$ دوو شوێن بۆ سەری F بدۆزەوە ئەگەر $D(1, -1)$ و $E(7, -1)$ بن بۆ ئەوەی دوو سێگۆشەکە هاوشێوەبن.

پێداچوونەوەی لولپێچی

لاسەنگەیەك بۆ نواندنی بارەکە بنووسە (پۆلەکانی پێشوو)



28 بەرزکەرەوەیەك (کرێن) بەلایەنی کەمەوە 250kg هەڵدەگرێت. دووتەن کێشی هەریەکەیان 50kg بە هەردوو لای تولێکەوە کە بارستاییەکەی 5kg جێگیرکرا هێمای گۆڕاوی x بۆ ئەو بارستاییە دابنێ کە بۆ تولەکە زیادکرا لاسەنگەیەك بنوسە x پاسادانی بکات.

درێژی هەر پارچە راستەهێڵێك بدۆزەوە ئەگەر بزانی $\overline{DE} \cong \overline{FE}$

29 $\overline{HF}$ **30** $\overline{JF}$ **31** $\overline{CD}$

S
6
x + 4
U
9
V
2
x
R
T

درێژی هەر پارچە راستەهێڵێك بدۆزەوە ئەگەر بزانی دوو سێگۆشەی RST و USV هاوشێوەبن.

32 $\overline{RT}$ **33** $\overline{VT}$ **34** $\overline{ST}$

4-1 ئاڕاستەبڕەکان
Vectors

ئامانجەکان
- دۆزینەوەی درێژی ئاڕاستەبڕ و ئاڕاستەی ئاڕاستەبڕەکان و کۆکردنەوەیان بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی ژیانی ڕۆژانە بەکاردێن.

زاراوەکان
Vocabulary

ئاڕاستەبڕ
Vector

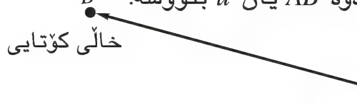
پێکنەری ئاڕاستەبڕ
Component

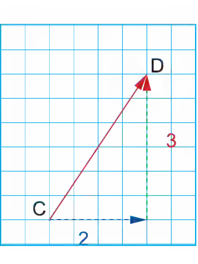
درێژی ئاڕاستەبڕ
Magnitude

ئاڕاستەی ئاڕاستەبڕ
Direction

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟
ئەوانەی پێشبڕکێی بەلەمەکانیان لە ڕووبارەکاندا کردۆتە پیشەی خۆیان، ئاڕاستەبڕەکان بەکاردێنن بۆ ئەوەی ئاڕاستەی ڕێڕەوی ئاو لەبەر چاوبگرێ کاتێك پێشبڕکێیەکە ئەنجام دەدەن. (نموونە ٥)

دەتوانیت ئاڕاستەبڕەکان بۆ نواندنی خێرایی و ئاڕاستەی جوڵەی تەنێکی جوڵاو بەکاربهێنێت **ئاڕاستەبڕ Vector** بڕێکە بە درێژی و ئاڕاستە دیاری دەکرێت دەتوانی ئاڕاستەبڕێك بەپارچە ڕاستەهێڵێکی ئاڕاستەکراو وێنە بکەی بۆ ناونانی ئاڕاستەبڕی خوارەوە $\overrightarrow{AB}$ یان $\vec{u}$ بنووسە.



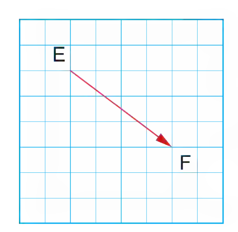


هەروەها دەتوانیت ئاڕاستەبڕ بە بەکارهێنانی دوو پێکنەرەکەی ناوبنێی **دوپێکنەری ئاڕاستەبڕەکە Components** دوو ژمارەن یەکەمیان لەمەودای **جوولەی ئاسۆیی** و دووەمیان لەمەودای **جوڵەی ستونیدایە** هەردووکیان پێویستە لەخاڵی سەرەتای ئاڕاستەبڕەکەوە بۆ خاڵی کۆتایی بچن بەو شێوەیەی کە پێکنەری یەکەمی x و پێکنەری دووەمی y بێت و بە $\langle x, y\rangle$ دەنوسرێت بۆ نموونە دەنووسرێت $\langle 2, 3\rangle$ کە ئاڕاستەبڕی $\overrightarrow{CD}$ دەگەیێنێت.

نموونە 1 نووسینی ئاڕاستەبڕ بە دوو پێکنەرەکانی

هەریەکە لەم ئاڕاستەبڕانە بە دوو پێکنەرەکەی بنووسە.

أ ئاڕاستەبڕی $\overrightarrow{EF}$



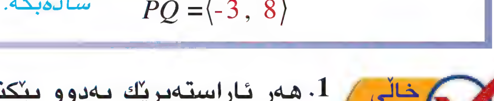
بۆ گواستنەوەی لە خاڵی E وە بۆ خاڵی F، 4 یەکە بۆ لای ڕاست و 3 یەکە بۆ خوارەوە بجوڵێت، پێکنەری یەکەم $+4$ و پێکنەری دووەم -3 دەبێت، کەواتە ئاڕاستەبڕی $\overrightarrow{EF}$ بریتییە لە ئاڕاستەبڕی $\langle 4, -3\rangle$

ب ئاڕاستەبڕی $\overrightarrow{PQ}$ کاتێك $P(7, -5)$ و $Q(4, 3)$

$\overrightarrow{PQ} = \langle x_2 - x_1, \ y_2 - y_1\rangle$ پۆوتانی خاڵی سەرەتا لە پۆوتانی خاڵی کۆتایی دەربکە لەجیاتی هەر پۆوتانێك بەهاکەی دابنێ.

$\overrightarrow{PQ} = \langle 4-7, \ 3-(-5)\rangle$

$\overrightarrow{PQ} = \langle -3, \ 8\rangle$ سادەبکە.



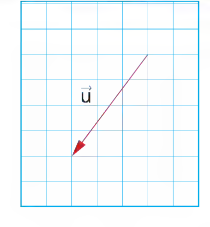


خاڵی چاودێری

1. هەر ئاڕاستەبڕێك بەدوو پێکنەرەکەی بنووسە.

أ $\vec{u}$

ب $\overrightarrow{AB}$ کاتێك $A(-1, 1)$ ، $B(6, 2)$

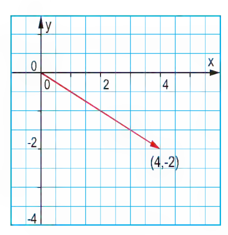


درێژی ئاراستەبڕ Magnitude بریتییە لەو دوورییەی دەکەوێتە نێوان خاڵی سەرەتاو خاڵی کۆتایی ئەم ژمارەیە لەئاراستەبڕدا بەشێوەی $|\overrightarrow{AB}|$ یان $|\vec{v}|$ دەنوسرێت.

کاتێك ئاراستەبڕ بۆ نواندنی خێرایی شتێکی جوڵاو بەئاراستەیەکی دیاریکراو بەکاردێت، ئەوا درێژی ئاراستەبڕەکە یەکسانە بەخێرایی تەنەجوڵاوەکە بەمەش درێژی ئەو ئاراستەبڕەی جوڵەی بەلەمی رووبارەکە دەنوێنێت بریتییە لە خێرایی بەلەمەکە.

نموونـــــە 2 دۆزینەوەی درێژی ئاراستەبڕ

وێنەی ئاراستەبڕی$\langle 4, -2\rangle$لە رووتەختی پۆوتاندا بکێشە درێژییەکەی هەژماربکە و وەڵامەکەت بۆ نزیکترین دەیەك نزیکبکەوە.



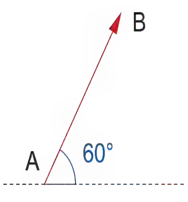
هەنگاوی 1: وێنەی ئاراستەبڕەکە بەبەکارهێنانی خاڵی بنەرەت وەك خاڵی سەرەتا بکێشە خاڵی کۆتایی بریتییە لە$(4, -2)$

هەنگاوی 2: درێژ ئاراستەبڕەکە بەبەکارهێنانی یاسای دووری هەژماربکە.

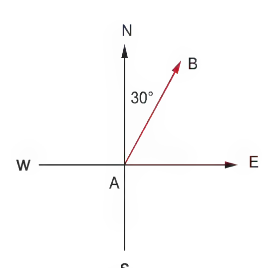
$$|\langle 4, -2\rangle| = \sqrt{(4-0)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{20} \approx 4.5$$



2. وێنەی ئاراستەبڕی$\langle -3, 1\rangle$ لە رووتەختی پۆوتاندا بکێشە درێژییەکەی هەژماربکە وەڵامەکەت بۆ نزیکترین دەیەك نزیکبکەوە.



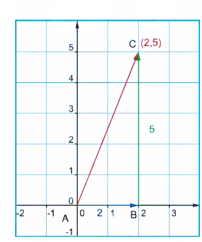
ئاراستەی ئاراستەبڕ Direction ئەو گۆشەیە کە لەگەڵ راستەهێڵی ئاسۆدا دروستی دەکات و ئەو گۆشەیە بە ئاراستەی پێچەوانەی میلی کاتژمێر دەپێورێت کە لەبەشی موجەبی تەوەرەی یەکەمەوە دەرچوو بێت.



هەروەها دەگونجێت ئاراستەی ئاراستەبڕ بە دیاریکردنی ئەو گۆشەیەی لەگەڵ یەکێك لە چوارئاراستەکان خۆرهەڵات، خۆرئاوا، باکوور، باشووردا پێکدێت دیاری بکرێت ئاراستەی ئاراستەبڕی بەرامبەر $\overrightarrow{AB}$ بریتییە لە باکوور – $30°$ – خۆرهەڵات.

نموونـــــە 3 دۆزینەوەی ئاراستەی ئاراستەبڕ

ئاراستەبڕی$\langle 2, 5\rangle$ ئاراستەی باو خێراییەکەی دەنوێنێت. وێنەی ئاراستەبڕەکە لەرووتەختی پۆوتانەکاندا بکێشە، ئاراستەکەی بدۆزەوە بۆ نزیکترین پلە نزیکیبکەوە.



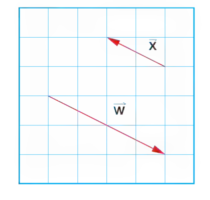
هەنگاوی 1: وێنەی ئاراستەبڕەکە لە رووتەختی پۆوتانەکاندا بەدیاریکردنی خاڵی بنەرەت وەك خاڵی سەرەتا بکێشە خاڵی کۆتایی خاڵی$(2, 5)$ دەبێت.

هەنگاوی 2: ئاراستەکە بدۆزەوە سێگۆشە وەستاوی ABC بکێشە ئەو گۆشەیەی ئاراستەبڕەکە لەگەڵ بەشی موجەبی تەوەرەی یەکەم دروستی دەکات بریتییە لە $\hat{A}$

$\tan \hat{A} = \frac{5}{2}$ لەمەوە دەردەچێت کە $m\hat{A} = \tan^{-1}\left(\frac{5}{2}\right) \approx 60°$



3. ئاراستەبڕی$\langle 7, 3\rangle$هێزی راکێشانی راکێشەرێکی دەریاییە، کە کەشتی بارهەڵگری خراپ بووی پێ رادەکێشرێت دەنوێنێت وێنەی ئاراستەبڕەکە لە رووتەختی پۆوتانەکاندا بکێشە ئاراستەکەی بەنزیککراوەیی بۆ نزیکترین پلە بدۆزنەوە.

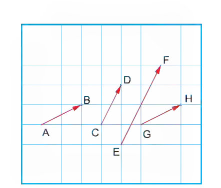


دوو ئاراستەبڕ **یەکسان** دەبن ئەگەر هەمان درێژی و هەمان ئاراستەیان هەبێت بۆ نموونە $\vec{u}=\vec{v}$ بۆ دوو ئاراستەبڕی یەکسان پێویست نییە کە هەمان خاڵی سەرەتاو خاڵی کۆتاییان هەبێت.

$$|\vec{u}|=|\vec{v}|=2\sqrt{5}$$

ئاگاداربە!

سەرنج بدە $\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{BA}$ چونکە ئاراستەی یەکەم لە ئاراستەی دووەم جیاوزە.



دوو ئاراستەبڕ **تەریب** دەبن ئەگەر ڕاستەهێڵەکانیان بەیەکتری تەریب بن، دەگونجێ دووئاراستەبڕی تەریب لەدرێژیدا جیاوازبن بۆ نموونە: دوو ئاراستەبڕی $\vec{x}$ و $\vec{w}$ تەریبن

ئەگەر دوو ئاراستەبڕ یەکسان بن بەیەکتری تەریب دەبن.

$$|\vec{w}|=2\sqrt{5}$$

$$|\vec{x}|=\sqrt{5}$$

نموونە 4 جیاکردنەوەی ئاراستەبڕە یەکسانەکان و ئاراستەبڕە تەرەیبەکان

لەوێنەی بەرامبەردا ئەمانە جیابکەوە.

أ ئاراستەبڕە یەکسانەکان

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{GH}$

ئەو ئاراستەبڕانەی هەمان درێژی و هەمان ئاراستەیان هەیە جیایان بکەوە.

ب ئاراستەبڕە تەریبەکان

$\overrightarrow{CD}\,//\,\overrightarrow{EF}$ و $\overrightarrow{AB}\,//\,\overrightarrow{GH}$

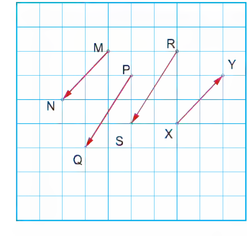
ئەو ئاراستەبڕانەی هەمان ئاراستەیان هەیە یان ئەوانەی ئاراستەی پێچەوانە یان هەیە جیایان بکەوە.



4. لەوێنەی بەرامبەردا ئەمانە جیابکەوە

أ ئاراستەبڕە یەکسانەکان.

ب ئاراستەبڕە تەریبەکان.



بەرەنجام Resultant ی دوو ئاراستەبڕ ئەو ئاراستەبڕەیە کە سەرجەمیان دەنوێنێت. بۆ کۆکردنەوەی دوو ئاراستەبڕ بە ئەندازەیی دەتوانی ڕێگای **لەسەرەوە بۆ کلك** یان ڕێگای **لاتەریب** بەکاربێنێت.

فێربە — **کۆکردنەوەی ئاراستەبڕەکان**

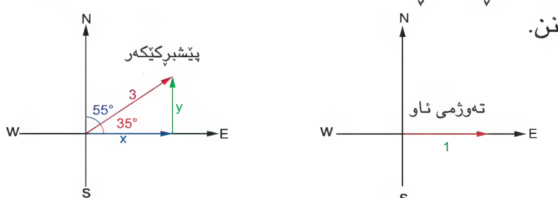
ڕێگاکە	نموونە
ڕێگای لەسەرەوە بۆ کلك خاڵی سەرەتای ئاراستەبڕی دووەم لەسەر خاڵی کۆتایی ئاراستەبڕی یەکەم دابنێ. بەرەنجامەکە بریتییە لەو ئاراستەبڕەی خاڵی سەرەتاکەی خاڵی سەرەتای ئاراستەبڕی یەکەمەو خاڵی کۆتاییەکەشی خاڵی کۆتایی ئاراستەبڕی دووەمە.	$\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$
ڕێگای لاتەریب خاڵێك وەك خاڵی سەرەتای دوو ئاراستەبڕەکە بەکاربێنە. لاتەریبەکە تەواوبکە بەزیادکردنی دانەیەك لەهەر ئاراستە برێك لەو خاڵە کۆتاییەدا کە خاڵی کۆتایی ئاراستەبڕێکی ترە. بەرەنجامەکە بریتییە لەو ئاراستەبڕەی کە خاڵی سەرەتاکەی خاڵی هاوبەشی دوو ئاراستەبڕەکەیە و خاڵی کۆتاییەکەشی لایەکەی تری تیرەکەیە.	$\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$

بۆئەوەی دوو ئاڕاستەبڕ بەجەبری کۆبکەیتەوە دوو پێکنەرەکەی کۆبکەوە ئەگەر $\vec{u}=\langle x_1, y_1\rangle$ و $\vec{v}=\langle x_2, y_2\rangle$ ئەوا $\vec{u}+\vec{v}=\langle x_1+x_2, y_1+y_2\rangle$

نموونــــە 5 جێبەجێکردن لەسەر وەرزش

بەلەمێك بەخێرایی 3 km/h بە ئاراستەی باکور ـ 55° ـ خۆرهەڵات. کەوتە ڕێ خێرایی تەوژمی ئاوەکە یەك کیلۆمەترلەهەر کاتژمێرێکدا بەئاراستەی خۆرهەڵات. خێرایی بەلەمەکە دەبێتە چەندە و ئاراستەکەی چۆنە؟ خێراییەکەی بۆ نزیکترین دەو ئاراستەکەی بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە.

هەنگاوی 1: ئەو دوو ئاراستەبڕە بکێشە کە جووڵەی بەلەمەوانەکە و جووڵەی تەوژمی ئاوەکە دەنوێنن.



هەنگاوی 2: ئاراستەبڕی جووڵەی بەلەمەوانەکە بەهەردوو پێکنەرەکانییەوە بنووسە. درێژی ئەو ئاراستەبڕەی جووڵەی بەلەمەوانەکە دەنوێنێ بریتییە لە 3 km/h کە گۆشەیەك پێکدێنێ پێوانەکەی°35 لەگەڵ ئاراستەی موجەبی تەوەری یەکەم.

$x=3\cos 35°\approx 2.5$ لەمەوە دەست دەکەوێت کە $\cos 35°=\frac{x}{3}$

$y=3\sin 35°\approx 1.7$ لەمەوە دەست دەکەوێت کە $\sin 35°=\frac{y}{3}$

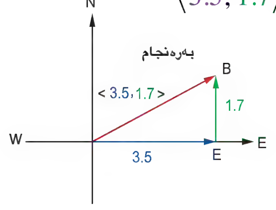
ئەو ئاراستەبڕەی جوڵەی بەلەمەوانەکە دەنوێنێت بریتییە لە$\langle 2.5, 1.7\rangle$

هەنگاوی 3: ئاراستەبڕی جوڵەی تەوژمەکە بەهەردوو پێکنەرەکانییەوە بنووسە. لەبەرئەوەی تەوژمەکە بەخێرایی **یەك کیلۆمەتر** بە ئاراستەی خۆرهەڵات دەجوڵێت ئەوا پێکنەری یەکەم یەکسانە بە 1 و پێکنەری دووەم یەکسانە بە 0 ئەو ئاراستەبڕەی جوڵەی تەوژمەکە دەنوێنێت بریتییە لە$\langle 1, 0\rangle$

هەنگاوی 4: بەرەنجامی دوو ئاراستەبڕەکە بدۆزەوە وێنەی بکێشە دوو پێکنەری ئاراستەبڕی یەکەم لەگەڵ دوو پێکنەری ئاراستەبڕی دووەم کۆبکەوە

$$\langle 2.5, 1.7\rangle+\langle 1, 0\rangle=\langle 3.5, 1.7\rangle$$

بەرەنجامی دوو ئاراستەبڕەکە بریتییە لە ئاراستەبڕی $\langle 3.5, 1.7\rangle$



هەنگاوی 5: درێژی بەرەنجامەکە و ئاراستەکەی بدۆزەوە.

درێژی بەرەنجامەکە بریتییە لە خێرایی ڕاستینەی بەلەمەوە ئەکاتە $|\langle 3.5, 1.7\rangle|=\sqrt{(3.5-0)^2+(1.7-0)^2}\approx 3.9$

خێرایی ڕاستینەی بەلەماوانەکە بریتییە لە 3.9 km/h بەنزیکەیی ئاراستەی بەرەنجامەکە بەو گۆشەیەی لەگەڵ بەشی موجەبی تەوەری یەکەم دروستی دەکات دیاری دەکرێت.

$\tan \hat{A}=\frac{1.7}{3.5}$ لەمەوە دەستدەکەوێت کە $m\hat{A}=\tan^{-1}\left(\frac{1.7}{3.5}\right)\approx 26°$ ئاراستەی بەرەنجامەکە بریتییە لە باکوور $64°$ خۆرهەڵات بەنزیکەیی لەبەرئەوەی $90°-26°=64°$

لەبیرت بێت

نوسینی ئاراستەبڕ بەپێکنەرەکانی یارمەتیت دەدات بۆ دیاریکردنی جوڵانی ستوونی و ئاسۆیی لە گواستنەوە لە خاڵی سەرەتاوە بۆ خاڵی کۆتایی.

خاڵی چاودێری

5. **چی دەبێت ئەگەر ...؟** گریمان بەلەماوانەکە بەخێرایی $4\ km/h$ بەئاراستەی باکور -$55°$- خۆرهەڵات جووڵانەوەی خێرایی ڕاستینەی بەلەمەوانەکە چەندە؟ و ئاراستەی جووڵەکەی چەندە؟ خێراییەکەی بۆ نزیکترین دە و ئاراستەکەی بۆ نزیکترین پلە بدۆزەوە

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. ڕوونیبکەوە هۆی چییە ئەو پارچە ڕاستەهێڵەی دوو سەرەکانی$(0, 0)$ و$(1, 4)$ نابێتە ئاراستەبڕ.

2. گریمان دوو پێکنەری ئاراستەبڕێك دەزانیت بەبێ بەکارهێنانی یاسای دووری چۆن درێژییەکەی دەدۆزیتەوە؟

3. ڕوونیبکەوە چۆن دوو ئاراستەبڕ جەبریانە کۆدەکەیتەوە؟

4. ڕێکخەریە ئەم هێلکارییە دروستبکەوە پاشان تەواوی بکە.





4-1 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاراستەکراو

زاراوەکان **زاراوەکانی وانەکە بۆ وەڵامدانەوەی هەریەکە لەم پرسیارانە بەکاربێنە.**

1 ئەگەر دوو ئاراستەبڕ هەمان درێژی و هەمان ئاراستەیان هەبێت ___؟___ (یەکسانن، تەریبن).

2 ئەگەر دوو ئاراستەبڕ هەمان ئاراستەیان هەبێت یان لە ئاراستەدا پێچەوانەبن___؟___ (یەکسانن، تەریبن).

3 ___؟___ ئاراستەبڕ نیشانەی گەورەییەتی (درێژی ، ئاراستەی).

بڕوانە نموونە 1

هەر ئاراستەبڕێك بەدوو پێکنەرەکەی بنووسە.

4 $\overrightarrow{AC}$ کاتێك $A(1, 2)$ و$C(6, 5)$

5 ئەو ئاراستەبڕەی خاڵی سەرەتای$M(-4, 5)$ وخاڵی کۆتایی$N(4, -3)$

6 ئاراستەبڕی $\overrightarrow{PQ}$ ی بەرامبەر.

بڕوانە نموونە 2

هەر ئاراستەبڕێك لە ڕووتەختی پۆوتانەکاندا بکێشە درێژییەکەی بۆ نزیکترین دەیی بدۆزەوە.

7 $\langle 1, 4\rangle$ **8** $\langle -3, -2\rangle$ **9** $\langle 5, -3\rangle$

بڕوانە نموونە 3

هەر ئاراستەبڕێك لە ڕووتەختی پۆوتانەکاندا بکێشە ئاراستەکەی بۆ نزیکترین پلە بدۆزەوە.

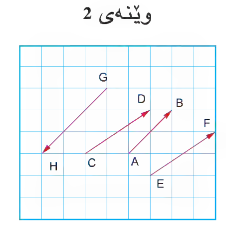
10 ئاراستەبڕی$\langle 4, 6\rangle$ تەوژمی ئاوی ڕووبارێك دەنوێنێت.

11 ئاراستەبڕی $\langle 5, 1\rangle$ جوولەی فڕۆکەیەك دەنوێنێت.

12 ئاراستەبڕی$\langle 6, 3\rangle$ جوولەی تیرێك دەنوێنێت.

بڕوانە نموونـە 4

هەریەك لەمانەی خوارەوە جیابكەوە.



وێنەی 2

وێنەی 1

13 ئاڕاستەبرە یەكسانەكان لەوێنەی 1 دا.

14 ئاڕاستەبرە تەریبەكان لەوێنەی 1 دا.

15 ئاڕاستەبرە یەكسانەكان لەوێنەی 2 دا.

16 ئاڕاستەبرە تەریبەكان لەوێنەی 2 دا.

ڕاهێنان و جێبەجێكردنەكان

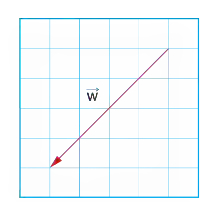
ڕاهێنانی ئازاد	
بۆ شیكاركردنی پرسیارەكان	تەماشای نموونەی
19–17	1
22–20	2
25–23	3
29–26	4
30	5

هەر ئاڕاستەبرێك بەدوو پێكنەرەكەی بنووسە.

17 $\overrightarrow{JK}$ كاتێك $K(3, -5)$ و $J(-6, -7)$

18 $\overrightarrow{EF}$ كاتێك $F(-2, 2.5)$ و $E(1.5, -3)$

19 $\overrightarrow{W}$ (لەوێنەی بەرامبەر)



وێنەی هەر ئاڕاستەبرێك لە ڕووتەختی پۆوتاندا بكێشە درێژییەكەی بۆ نزیكترین دەیەك نزیكبكەرەوە.

20 $\langle -2, 0\rangle$ **21** $\langle 1.5, 1.5\rangle$ **22** $\langle 2.5, -3.5\rangle$

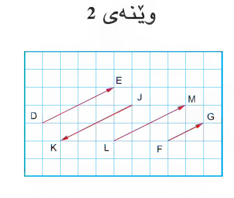
وێنەی هەر ئاڕاستەبرێك لە ڕووتەختی پۆوتاندا بكێشە ئاڕاستەكەی بۆ نزیكترین پلە نزیكبكەوە.

23 ئاڕاستەبری $\langle 4, 1.5\rangle$ جوولەی پاپۆڕێك دەنوێنێت.

24 ئاڕاستەبری $\langle 3.5, 2.5\rangle$ جوولەی ژێردەریاییەك دەنوێنێت.

25 ئاڕاستەبری $\langle 2, 5\rangle$ جوولەی موشەكێك دەنوێنێت.

هەریەك لەمانەی خوارەوە جیابكەوە.



وێنەی 2

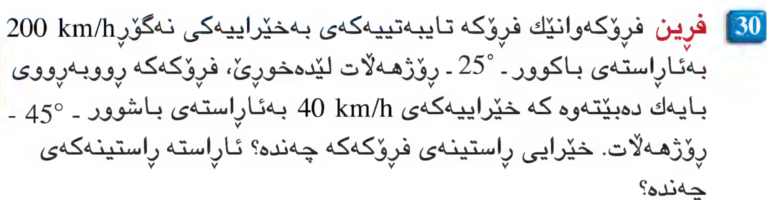
وێنەی 1

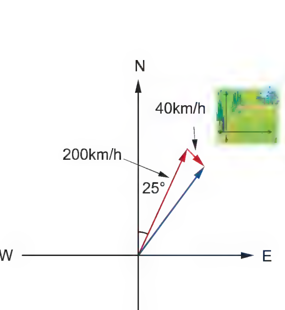
26 ئاڕاستەبرە یەكسانەكان لەوێنەی 1 دا.

27 ئاڕاستەبرە تەریبەكان لەوێنەی 1 دا.

28 ئاڕاستەبرە یەكسانەكان لەوێنەی 2 دا.

29 ئاڕاستەبرە تەریبەكان لەوێنەی 2 دا.

30 
فڕین فڕۆكەوانێك فڕۆكە تایبەتییەكەی بەخێراییەكی نەگۆڕ 200 km/h بەئاڕاستەی باكوور - °25 - ڕۆژهەڵات لێدەخوڕێ، فڕۆكەكە ڕووبەڕووی بایەك دەبێتەوە كە خێراییەكەی 40 km/h بەئاڕاستەی باشوور - °45 - ڕۆژهەڵات. خێرایی ڕاستینەی فڕۆكەكە چەندە؟ ئاڕاستە ڕاستینەكەی چەندە؟



هەردوو ئاڕاستە بر كۆبكەوە.

31 $\langle 1, 2\rangle + \langle 0, 6\rangle$ **32** $\langle -3, 4\rangle + \langle 5, -2\rangle$

33 $\langle 0, 1\rangle + \langle 7, 0\rangle$ **34** $\langle 8, 3\rangle + \langle -2, -1\rangle$

35 **بیری ڕەخنەگر** ئایا كۆكردنەوە لە ئاڕاستەبرەكاندا ئاڵوگۆڕە؟ واتە ئایا ئاڕاستەبرەكانی $\vec{u}+\vec{v}$ و $\vec{v}+\vec{u}$ یەكسانن؟ ڕێگای لەسەرەوە بۆ كلك بەكاربێنە بۆ كۆكردنەوەی ئاڕاستەبرەكان بەمەبەستی ڕوونكردنەوەی وەڵامەكان.

هەر ئاراستەبڕێك بەدوو پێكنەرەكەی بنووسە، بۆ نزیكترین دەیەك نزیكرابێتەوە.

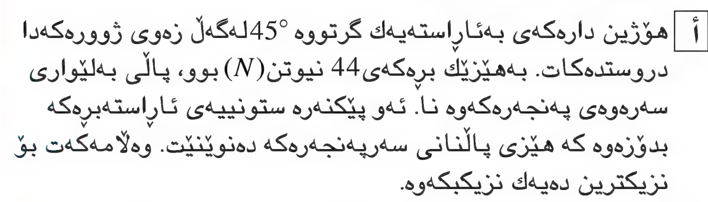
36 درێژی 15 ئاراستە $42°$

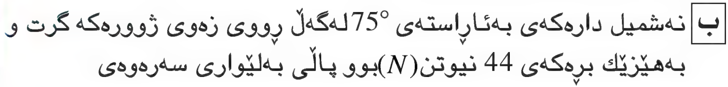
37 درێژی 7.2 ئاراستە $9°$

38 درێژی 12.1 ئاراستەی باكور-$57°$- خۆرهەڵات

39 درێژی 5.8 ئاراستەی باكوور-$22°$- خۆرهەڵات.

40 **فیزیا** ژووری پۆلێك پەنجەرەیەكی تێدایە لە بنمیچەكەوە نزیكە بۆ داخستنی داردەستێك بەكاردێت.





أ هۆزین دارەكەی بەئاراستەیەك گرتووە $45°$لەگەڵ زەوی ژوورەكەدا دروستدەكات. بەهێزێك بڕەكەی44 نیوتن(N) بوو، پاڵی بەلێواری سەرەوەی پەنجەرەكەوە نا. ئەو پێكنەرە ستونییەی ئاراستەبڕەكە بدۆزەوە كە هێزی پاڵنانی سەرپەنجەرەكە دەنوێنێت. وەڵامەكەت بۆ نزیكترین دەیەك نزیكبكەوە.

ب نەشمیل دارەكەی بەئاراستەی $75°$لەگەڵ ڕووی زەوی ژوورەكە گرت و بەهێزێك بڕەكەی 44 نیوتن(N)بوو پاڵی بەلێواری سەرەوەی پەنجەرەكەوە تا ئەو پێكنەرە ئەستونییەی ئاراستەبڕەكە بدۆزەوە كە هێزی پاڵنانی سەر پەنجەرەكە دەنوێنێت. وەڵامەكەت بۆ نزیكترین دەیەك نزیكبكەوە.

ج بۆ داخستنی پەنجەرەكە، كام لەم دوو خوێندكارە ڕووبەرووی دژواری كەمتر دەبێتەوە؟ كام لەو دوو پێكنەرە ئەستونییە هێزی پاڵپێوەنانیان گەورەترە؟

41 **ئەگەر** دڵسۆز ژمارەكانی 1 و 2 و 3 و 4 لەسەر چەند پارچە كاغەزێك نووسی و لەناو توورەكەیەكدا داینا، بە هەرەمەكی پارچە كاغەزێكی ڕاكێشا وای دانا كە ئەمە پێكنەری ئاسۆیی دەنوێنێ، پاشان كاغەزێكی تری ڕاكێشا بێ ئەوەی كاغەزی یەكەم بگەڕێنێتەوە بۆ ناو تورەگەكە وای دانا كە ئەوەیان پێكنەری ستونی دەنوێنێت بۆ هەمان ئاراستەبڕ.

أ ئەگەری ئەوەی ئاراستەبڕەكە$\langle 1, 2\rangle$ بێت چەندە؟

ب ئەگەری ئەوەی ئاراستەبڕەكە تەریب بێت بە ئاراستەبڕی$\langle 1, 2\rangle$ چەندە؟

42 **خەمڵاندن** ئاراستەبڕی$\langle 4, 6\rangle$بۆ تەواوكردنی هەریەك لەمانەی خوارەوە بەكاربێنە.

أ وێنەی ئاراستەبڕەكە لەسەر كاغەزی ڕوونكردنەوەیی بكێشە.

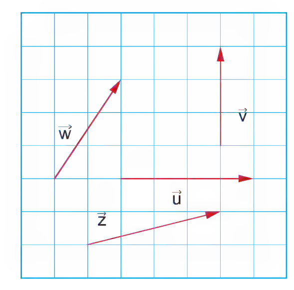
ب خەمڵاندنی ئاراستەی ئاراستەبڕەكە بۆ نزیكترین پلە نزیكرابێتەوە.

ج پێوانەی ئەو گۆشەیەی ئاراستەبڕەكە لەگەڵ ڕاستەهێڵی ئاسۆیدا دروستیدەكات بە بەكارهێنانی گۆشەپێو.

د هەژماركردنی ئاراستەی ئاراستەبڕەكە بەبەكارهێنانی پێكنەرەكانی.

هـ بەراوردبكە لەنێوان ئەو خەمڵاندنەی نێوان لقی (ب)دا و ئەو پێوانەیەی لە لقی (ج)دا كردووتە، و ئەو هەژمارەی لە لقی (د)دا ئەنجامتداوە.

هەنگاوی جۆراوجۆر درێژی هەریەكە لەم ئاراستەبڕانە بدۆزەوە ئاراستەكەی دیاریبكە. درێژییەكەی بۆ نزیكترین دەیەك و ئاراستەكەی بۆ نزیكترین پلە نزیكبكەوە.



43 $\vec{u}$

44 $\vec{v}$

45 $\vec{w}$

46 $\vec{z}$

بۆ هەر ئاراستەبڕێك ئاراستەبڕێکی تر بدۆزەوە کەهەمان درێژی هەبێت بەڵام ئاراستەکەی جیاوازبێت پاشان ئاراستەبڕێك بدۆزەوە کە هەمان ئاراستەی هەبێت بەڵام لەدرێژیدا جیاوازبن.

47 $\langle 2, 0\rangle$ **48** $\langle -3, 6\rangle$

49 $\langle 12, 5\rangle$ **50** $\langle 8, -11\rangle$

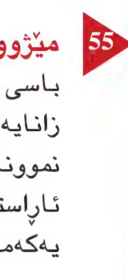
هەنگاوی جۆراوجۆر دوو ئاراستەبڕەکە کۆبکەوە پاشان درێژی بەرەنجام و ئاراستەکەی بدۆزەوە درێژییەکەی بۆ نزیکترین دە و ئاراستەکەی بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە.

51 $\vec{v}=\langle 2.5, -1\rangle$ و $\vec{u}=\langle 1, 2\rangle$ **52** $\vec{v}=\langle 4.8, -3.1\rangle$ و $\vec{u}=\langle -2, 7\rangle$

53 $\vec{v}=\langle -2, 4\rangle$ و $\vec{u}=\langle 6, 0\rangle$ **54** $\vec{v}=\langle 5.2, -2.1\rangle$ و $\vec{u}=\langle -1.2, 8\rangle$

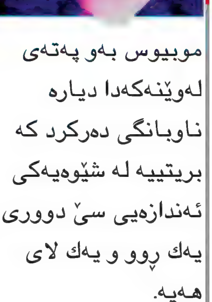
دەروازەیەك

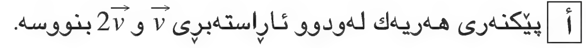
لەسەر مێژووی بیرکاری



موبیوس بەو پەتەی لەوێنەکەدا دیارە ناوبانگی دەرکرد کە بریتییە لە شێوەیەکی ئەندازەیی سێ دووری یەك ڕوو و یەك لای هەیە.

55 **مێژووی بیرکاری** ئۆگەست موبیوس August Möbius لە ساڵی 1827 کتێبێکی بڵاوکردەوە تیایدا باسی پارچە ڕاستەهێڵە ئاراستەکراوەکان دەکات ئەوەی ئەمڕۆ بە ئاراستەبڕەکان دەناسرێت ئەو زانایە لە کتێبەکەیدا باسی کردووە چۆن ئاراستەبڕێك لێکدانی ژمارەیەکی ڕاستی دەکرێت بۆ نموونە: ئەگەر ئاراستەبڕی $\vec{v}$ جوولەی ئوتومبیلێك بنوێنێت ئەوا ئاراستەبڕی $2\vec{v}$ جوولەی ئاراستەبڕی دووەم دەنوێنێت کە بەهەمان ئاراستە دەڕوات و خێراییەکەی دوو ئەوەندەی خێرایی یەکەمە.





أ پێکنەری هەریەك لەودوو ئاراستەبڕی $\vec{v}$ و $2\vec{v}$ بنووسە.

ب درێژی هەریەکە لەو دوو ئاراستەبڕە بدۆزەوە و بەراورد لەنێوان درێژییەکانیدا بکە.

ج ئاراستەی هەریەك لەم ئاراستەبڕە بدۆزەوەو بەراورد لەنێوان ئاراستەکانیدا بکە.

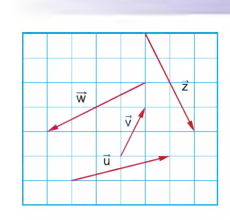
د ڕوونیبکەوە چۆن دوو پێکنەرەکەی ئاراستەبڕی $k\vec{v}$ دەدۆزیەوە کاتێك k ژمارەیەکی ڕاستی بێت و دوو پێکنەرەکەی $\vec{v}$ زانراوبێت.

هـ ئاراستەبڕەکە لێکدانی $k=-1$ بکە بۆ نووسینی دژی $\vec{v}$ بە دوو پێکنەرەکەیەوە.

56 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** ئاراستەبڕی $\vec{u}$ کە درێژییەکەی u بەئاراستەی خۆرئاوایە کەچی ئاراستەبڕی $\vec{v}$ کە درێژییەکەی v ڕووە و خۆرهەڵاتە.
باسی هەرسێ ئەنجامی کۆکردنەوەی ئەم دوو ئاراستەبڕە بکە.

57 **بنووسە** بەراوردبکە لەنێوان پارچە ڕاستەهێڵ و تیشك و ئاراستەبڕدا .





58 كام لەم ئاڕاستەبرانە بە ئاڕاستەبڕی$\langle 2, 1\rangle$تەریبە؟

(أ) $\vec{u}$ (ج) $\vec{w}$

(ب) $\vec{v}$ (د) $\vec{z}$

59 ئاڕاستەبڕی$\langle 7, 9\rangle$جووڵەی هەلیكۆپتەرێك دەنوێنێت ئاڕاستەی ئەو ئاڕاستەبڕە بۆ نزیكترین پلە چەندە؟

(أ) $38°$ (ب) $52°$ (ج) $128°$ (د) $142°$

60 ئاڕاستەبڕی$\langle 5, 11\rangle$جوولەی كەشتیەك دەنوێنێت درێژی ئاڕاستەبڕەكە بۆ نزیكترین یەكە نزیكبكەوە.

(أ) 6 (ب) 8 (ج) 12 (د) 16

61 **تەنها وەڵام** $(-3, 6)$ خاڵی سەرەتای ئاڕاستەبڕی$\overrightarrow{AB}$ و$(-5, -2)$ خاڵی كۆتاییەكەیەتی، درێژی $\overrightarrow{AB}$ بۆ نزیكترین دەیەك بدۆزەوە.

بەرەنگاری و فراوانكردن

بیرت بێتەوە ئەو گۆشەیەی ئاڕاستەی ئاڕاستەبڕ دیاریدەكات لەبەشی موجەبی تەوەرەی یەكەمەوە دەردەچێت بە ئاڕاستەی پێچەوانەی میلی كاتژمێر دەپێورێت. ئاڕاستەی هەریەك لەم ئاڕاستەبرانە بدۆزەوە بۆ نزیكترین پلە نزیكیبكەوە.

62 $\langle -2, 3\rangle$ **63** $\langle -4, 0\rangle$ **64** $\langle -5, -3\rangle$

65 **دەریاوانی** فەرماندەی پاپۆڕێك پلاندادەنێت بۆ ئەوەی لەناوچەیەكدا كە تەوژمی ئاوی دەریا بەئاڕاستەی خۆرهەڵات بەخێرایی$4\ km/h$دەرواتت دەریاوانی بكات. ئاڕاستەی جولەی پاپۆڕەكە و خێراییەكەی بدۆزەوە بۆئەوەی خێراییە ڕاستییەكەی بكاتە $10\ km/h$ و ئاڕاستە ڕاستییەكەی باكور $75°$ خۆرهەڵات بێت (تەوژمی ئاوی دەریاكە بەهەند وەرگیراوە) خێراییەكەی بۆ نزیكترین دەیەك و ئاڕاستەكەی بۆ نزیكترین پلە نزیكبكەوە.

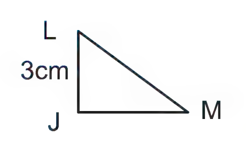
66 بۆ گەیشتن بەباخی گشتی، شوان دووری $3\ km$ بەئاڕاستەی باكور $30°$ خۆرهەڵات پاشان $6\ km$ بەئاڕاستەی خۆرهەڵات پاشان $4\ km$ بەئاڕاستەی باكور$80°$خۆرهەڵات ڕۆیشت. درێژی ئەو ئاڕاستەبڕە چەندە كە ڕۆیشتنی شوان لەماڵەكەیەوە بۆ باخی گشتی دەنوێنێت؟ئاڕاستەكەی چەندە؟ درێژییەكەی بۆ نزیكترین دەیەك و ئاڕاستەی بۆ نزیكترین پلە نزیكبكەوە.

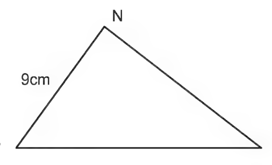
پێداچوونەوەی لولپێچی

هەریەكە لەم سستەمی هاوكێشە هێڵییانە بە ڕوونكردنەوەیی شیكاربكە (پۆلەكانی پێشوو)

67 $\begin{cases} x - y = -5 \\ y = 3x + 1 \end{cases}$ **68** $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2y + x = 8 \end{cases}$ **69** $\begin{cases} x + y = 5 \\ 3y + 15 = 2x \end{cases}$

دوو سێگۆشەی JLM و NPS هاوشێوەن، چێوەی سێگۆشەی JLM 12cm و ڕووبەرەكەی $6\ cm^2$ پێوانەی داواكراو بدۆزەوە (پۆلەكانی پێشوو)





70 چێوەی سێگۆشەی NPS

71 ڕووبەری سێگۆشەی NPS

بەشی 1

تاقیکردنەوەی نیوەی بەش

تاقیکردنەوەی بەش وانەکان 1-1 تا 4-1.

1-1 بۆشایی پۆوتان

هەریەکە لەم خاڵانەی خوارەوە لە بۆشایی پۆوتاندا بنوێنە.

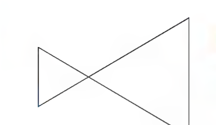
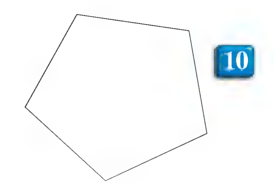
1. $(-3, 2, 1)$
2. $(2, -3, -2)$
3. $(3, 1, -3)$

لەبۆشایی پۆوتاندا وێنەی هەریەك لەم هاوکێشە هێلییانە (رووتەختانە)ی خوارەوە بە ڕوونکردنەوەیی بکێشە.

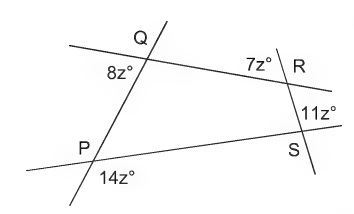
4. $2x-2y+4z=8$
5. $2x+y-2z=-4.5$
6. $x+5y+3z=15$

2-1 چەندلایەکان

ئەگەر شێوەکە چەندلایە دیارییکە، ئەگەر وابوو ناوی بنێ.

7. 
8. 
9. 
10. 

11. سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلایەکی قۆقزی 16 لا بدۆزەوە.
12. ستونێك بنکەکەی شەشلایەکی ڕێکە پێوانەی هەر گۆشەیەکی ناوەوەی چەندە؟
13. وێنەی بەرامبەر هێلکاری باخێکی پەرژین کراو پیشاندەدات پێوانەی هەریەکە لە دەرە گۆشەکانی بدۆزەوە.
14. پێوانەی هەریەکە لەگۆشەکانی دەرەوەی دەلایەکی ڕێك بدۆزەوە.

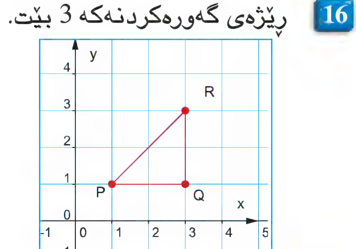


3-1 هاوڕێژەی ئەندازەیی

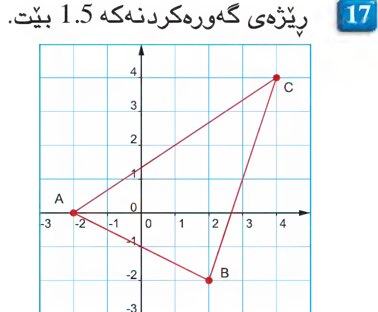
15. بیسەلمێنە دوو سێگۆشەی ABC و ADE کاتێك $A(-1, 2)$، $B(-3, -2)$، $C(3, 0)$، $D(-2, 0)$، $E(1, 1)$ هاوشێوەن

وێنەی هەر سێگۆشەیەك بەو هاوڕێژە ئەندازەییەی ڕێژەکەی دیاریکراوە بکێشە. ساغبیکەوە سێگۆشە بنەڕەتییەکە و وێنەکەی هاوشێوەن.

16. ڕێژەی گەورەکردنەکە 3 بێت.



17. ڕێژەی گەورەکردنەکە 1.5 بێت.



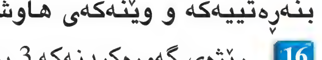
4-1 ئاڕاستەبڕەکان

وێنەی هەریەك لەم ئاڕاستەبڕانە لە ڕووتەختی پۆوتاندا بکێشە، درێژییەکەی بۆ نزیکترین دەیەك هەژماربکە.

18. $\langle 3, 1\rangle$
19. $\langle -2, -4\rangle$
20. $\langle 0, 5\rangle$

وێنەی هەریەك لەم ئاڕاستەبڕانە لە ڕووتەختی پۆوتاندا بکێشە، لارییەکەی بۆ نزیکترین پلە هەژماربکە.

21. خێرایی با بە ئاڕاستەبڕی $\langle 2, 1\rangle$ نوێنراوە.
22. تەوژمی ئاوی ڕووبارێك بەئاڕاستەبڕی $\langle 5, 3\rangle$ نوێنراوە.
23. هێزی سپرینگ بەئاڕاستەبڕی $\langle 4, 4\rangle$ نوێنراوە.



5-1

ڕووبەری بازنە و چەندلاڕێکەکان

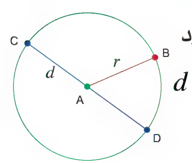
Area of circles and regular polygons

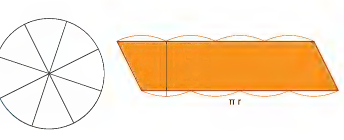
کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

تەپڵ ژەنەکان بۆ دەستکەوتنی دەنگە دیاریکراوەکان تەپڵی پێوانە جیاواز بەکاردێنن، ئەو دەنگانەی تەپڵەکان دەریدەکەن بەندە بە ڕووبەری ڕووە بازنەییەکەیەوە. (نموونەی 2).

بازنە Circle کۆمەڵە خاڵێکە لە ڕووتەختدا دووری هەریەکیان لەخاڵێکی زانراوەوە کە پێی دەوترێت **چەقی بازنە** یەکسانە بە **نیوەتیرەی بازنە** (درێژی **تیرەی بازنە** دوو ئەوەندەی نیوەتیرەکەیەتی، (ئەو پارچە . لەوێنەی بەرامبەردا، A چەقی بازنەکەیە و نیوەتیرەکەی بریتییە لە $r = AB$ و تیرەکەی بریتییە لە $d = CD$.

ڕێژەی چێوەی بازنەی C بۆ درێژی تیرەکەی d ژمارەیەکی نەگۆڕە و ناگۆڕێت بەگۆڕانی نیوەتیرەکەی ئەو ڕێژەیەش ژمارەیەکی نارێژەییە π بە پای دەخوێنرێتەوە بەجۆرێك دەتوانیت بنووسیت $\pi = \frac{C}{d}$. ئەگەر C مان بەپێی d هەژمارکرد ئەوا ڕێسای چێوەی بازنەمان دەستدەکەوێت $C = \pi d$ یان $C = 2\pi r$ لەبەرئەوەی $d = 2r$ دەتوانین چێوەی بازنە بەکاربێنین بۆ دۆزینەوەی ڕووبەرەکەی. بازنەکە دابەشکە وپارچەکان ڕێکبخە بەجۆرێك شێوەیەکت بۆ دەربچێت هاوشێوەی لاتەریبێك بێت وەك لە شێوەکەدا دیارە.





بنکەی لاتەریبەکە یەکسانە بەنیوەی چێوەی بازنەکە بەنزیکەیی یان πr . بەرزییەکەشی نیوەتیرەی بازنەکەیە بەنزیکەیی لەمەشەوە دەستدەکەوێت ڕووبەری بازنەکە بەنزیکەیی. $A \approx \pi r \times r = \pi r^2$





هەر کاتێك ژمارەی پارچەکان زیاتربێت، ڕووبەری لاتەریبەکە لە ڕووبەری بازنەکە نزیکدەبێتەوە، بەمەش بەها نزیکەییەکەی لەبەها ڕاستییەکەی نزیکتردەبێتەوە.

فێربە

چێوە و ڕووبەری بازنە



کاتێك بازنەیەك نیوەتیرەکەی r و تیرەکەی d بێت چێوەکەی c بەیاسای $C = \pi d$ یان $C = 2\pi r$ و ڕووبەرەکەی بە یاسای $A = \pi r^2$ هەژماردەکرێت.

ئامانجەکان

- دۆزینەوەی یاسایەك بۆ هەژمارکردنی ڕووبەری بازنەو یاسایەك بۆ هەژمارکردنی چێوەکەی و بەکارهێنانیان
- دۆزینەوەی یاسایەك بۆ هەژمارکردنی ڕووبەری چەندلاڕێکەکان و بەکارهێنانی.

زاراوەکان Vocabulary

بازنە
Circle

چەقی بازنە
Center of a circle

نیوەتیرەی بازنە
Radius of a circle

تیرەی بازنە
Diameter of a circle

چەقی چەندلای ڕێك
Center of a regular polygon

ئەستوندەگی چەندلای ڕێك
Apothem of regular polygon

چەقەگۆشە لەچەندلای ڕێك
Central angle of a regular polygon

نموونــــە 1 هەژمارکردنی چێوە و ڕووبەری بازنە

P
16cm

داواکراو هەژماربکە.

أ ڕووبەری بازنەی بەرامبەر.

$A = \pi r^2$ یاسای ڕووبەری بازنە.

$A = \pi (8)^2$ تیرە دابەش 2 بکە بۆ دۆزینەوەی نیوەتیرە، پاشان لەجیاتی نیوەتیرەکە بەهاکەی دابنێ ئینجا سادەی بکە.

$A = 64\pi$

ڕووبەری بازنەکە $A = 64\pi \text{ cm}^2$

ب نیوەتیرەی بازنەیەك چێوەکەی 24π m بێت.

یاسای چێوەی بازنە	$C = 2\pi r$
لەجیاتی چێوە بەهاکەی دابنێ.	$24\pi = 2\pi r$
هەردوولا دابەشی π بکە.	$24 = 2r$
هەردوو لا دابەشی 2 بکە.	$r = 12$

ج چێوەی بازنەیەك رووبەرەکەی $9x^2\pi$ بێت بەپێی π و x دوە.

هەنگاوی 1: نیوەتیرە r بەپێی x هەژماربکە.

یاسای رووبەر	$A = \pi r^2$
لەجیاتی A بەهاکەی دابنێ	$9x^2\pi = \pi r^2$
هەردوولا دابەشی π بکە	$9x^2 = r^2$
رەگی دووجای هەردوولا وەربگرە.	$3x = r$

هەنگاوی 2:چێوەی بازنەکە هەژماربکە بەکارهێنانی بەهای نیوەتیرەکە.

یاسای چێوە	$C = 2\pi r$
بەهای نیوەتیرەکە لەجیاتی دابنێ	$C = 2\pi(3x)$
کورتی بکەوە.	$C = 6x\pi$



1. رووبەری بازنەیەك بەپێی π هەژماربکە کە چێوەکەی $(4x-6)\pi$ cm بێت.

نموونـــــە 2 جێبەجێکردن لە میوزیك

جاز لەسێ تەپڵ کە تیرەکانیان لە **10**ئنج، **12**ئنج، **14**ئنج، پێکدێت رووبەری هەر تەپڵێك بدۆزەوە و وەڵامەکەت لە نزیکترین دەیەك نزیکبکەوە.

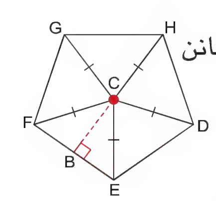
تیرە 10ئنج	تیرە 12ئنج	تیرە 14ئنج
$r = \frac{10}{2} = 5 \quad A = \pi(5)^2$	$r = \frac{12}{2} = 6 \quad A = \pi(6)^2$	$r = \frac{14}{2} = 7 \quad A = \pi(7)^2$
$A \approx 78.5$	$A \approx 113.1$	$A \approx 153.9$
رووبەر 78.5 ئنج دووجایە.	رووبەر 113.1 ئنج دووجایە	رووبەر 153.9 ئنج دووجایە.

لەبیرت بێت

کلیلی π لە بژمێری رونکردنەوەدا باشترین نزیکەرەوەیە بۆ بەهای π چاوەروان بە تا لە هەژمارکردنی تەواودەبێت پێش ئەوەی نزیکبکەیت.

خاڵی چاودێری

2. چێوەی هەر تەپڵێکی نمونەی 2 هەژماربکە.



چەقی Center چەندلای رێك خاڵێکی ناوەوەیەتی، دوورییەکەی لەسەرەکانییەوە یەکسانن

ئەستوندەکی Apothem چەندلای رێك دووری نێوان چەق و یەکێك لەلایەکانییەتی،

ئەو گۆشەیەی سەرەکی چەقی چەندلارێکەکە بێت و لایەکانی بەدوو سەری هاوسێی یەکتریدا برۆن **چەقەگۆشەی Central angle** چەندلارێکەکەیە.

هەموو چەقەگۆشەکانی چەندلای رێك لە پێوانەدا یەکسانن. پێوانەی هەریەکێکیان $\frac{360^\circ}{n}$ کاتێك n ژمارەی لایەکانی چەندلارێکەکە بێت.

بۆ دۆزینەوەی رووبەری چەندلای رێك کەژمارەی لایەکانی n و ئەستوندەکەی a و درێژی لایەکی s بێت چەندلایەکە دابەش بکە بە n سێگۆشەی دوولایەکسان رووبەری هەرسێگۆشەیەك دەکاتە $\frac{1}{2}as$.

رووبەری چەندلایەکە $\frac{1}{2}a(ns) = n\left(\frac{1}{2}as\right) = A$ یان $A = \frac{1}{2}ap$ هێمابێت بۆ چێوەی چەندلارێکەکە. $p = ns$



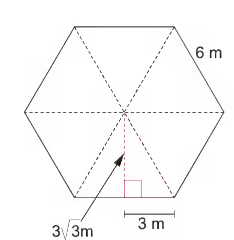
رووبەری چەندلای رێك

رووبەری چەندلایەکی رێك کە چێوەکەی p و ئەستوندەکەی (بەرزییەکەی) a بێت، بەیاسای $A = \frac{1}{2}ap$ هەژماردەکرێت.

نموونـــــه 3 دۆزینەوەی ڕووبەری چەندلای ڕێك

ڕووبەری هەریەکە لەم چەندلاڕێکانە بدۆزەوە وەڵامەکەت نزیکبکەرەوە بۆ نزیکترین دەیەك.

أ شەشلایەکی ڕێك درێژی لایەکەی **6 m** بێت.



چێوەی چەندلایەکە دەکاتە $36\ m\ (6\times6)$ شەشلای ڕێك دابەش دەبێت بۆ 6 سێگۆشەی ڕێك درێژی بنکەکەی $6\ m$. لەوەشەوە دەردەچێت کە ئەستوندەکی شەشلاڕێکەکە بریتییە لە $3\sqrt{3}$

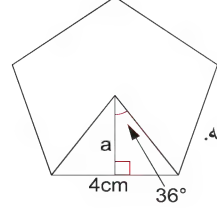
$A=\frac{1}{2}ap$ یاسای ڕووبەری چەندلا.

$A=\frac{1}{2}3\sqrt{3}\times36$ لەجیاتی دابنێ.

$A=54\sqrt{3}\approx93.5$ سادەبکە ونزیکبیکەوە بۆ نزیکترین دەیەك.

ڕووبەری شەشلایەکی ڕێك بەنزیکەیی دەکاتە $93.5\ m^2$

ب پێنجلایەکی ڕێك درێژی لایەکی **8 cm** بێت.



هەنگاوی 1 وێنەی پێنجلایەك بکێشە، سێگۆشەیەکی دوولایەکسان بکێشە سەرەکەی چەقی چەندلایەکە بێت و بنکەکەی یەکێ لەلایەکانی پێنجلایەکە بێت. پێوانەی چەقەگۆشەی چەندلایەکە $\frac{360°}{5}=72°$. لەتکەری چەقەگۆشەکە بکێشە تا سێگۆشەیەکی گۆشەوەستاوت دەستبکەوێت.

هەنگاوی 2: ڕێژەی سێگۆشەیی tan بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی ئەستوندەك a.

$\tan36°=\frac{4}{a}$ پێناسەی ڕێژەی سێگۆشەیی tan)

$a=\frac{4}{\tan36°}$ بەهای a هەژماربکە.

هەنگاوی 3: ئەستوندەك و درێژی لایەکی بەکاربهێنە بۆ هەژمارکردنی ڕووبەری 5 لاڕێکەکە.

$A=\frac{1}{2}ap$ یاسای ڕووبەری چەندلا.

$A=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{\tan36°}\right)(5\times8)$ لەجیاتی دابنێ.

$A\approx110.1$ سادەبکە ونزیکبیکەوە بۆ نزیکترین دەیەك

ڕووبەری 5 لایەکە بەنزیکەیی دەکاتە $110.1\ cm^2$

لەبیرت بێت

لە سێگۆشەی گۆشە وەستاودا تانجنتی گۆشە $=\frac{\text{لای بەرامبەر}}{\text{لای تەنیشت}}$

خاڵی چاودێری

3. ڕووبەری هەشتلایەکی ڕێك هەژماربکە کە درێژی لایەکی $4\ m$ بێت.

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. پەیوەندی نێوان π وچێوەی بازنە ڕوونبکەوە.
2. باسی چۆنیەتی هەژمارکردنی چەقەگۆشەی چەندلایەکی ڕێك بکە کە لە n لا پێکهاتبێت.
3. ڕێکخەربە ئەم خشتەیە دروست بکەو و تەواوی بکە.



چەندلای ڕێك درێژی لایەکەی 1 بێت					
چەندلا	ژمارەی لایەکان	چێوەکەی	پێوانەی چەقەگۆشەی	ئەستوندەك	ڕووبەر
سێگۆشە					
چوارگۆشە					
شەشلا					

5-1 ڕاهێنانەکان

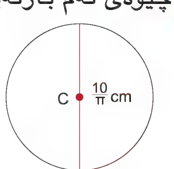
ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** چۆن ئەستوندەکی چوارگۆشەیەك دەدۆزیتەوە درێژی لایەکی 5 یەکە بێت؟

بڕوانە نموونە 1

بدۆزەوە.

2 چێوەی ئەم بازنەیەی خوارەوە.



3 ڕووبەری ئەم بازنەیەی خوارەوە.

4 چێوەی بازنەیەك ڕووبەرەکەی $36\pi\ m^2$

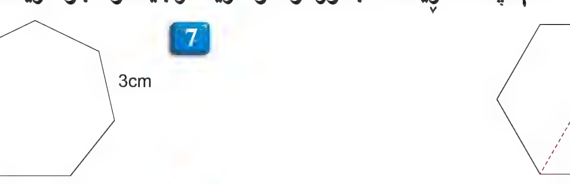
بڕوانە نموونە 2

5 **خواردن** چێشتخانەی پیتزای فورات سێ قەبارەی جیاواز لە پیتزا پێشکەش دەکات کەتیرەکانی یەك لەدواییەك 15 cm و 25 cm و 40 cm ڕووبەری هەر پیتزایەك هەژماربکە و نزیکیبکەوە بۆ نزیکترین دەیەك

بڕوانە نموونە 3

ڕووبەری هەریەك لەم چەندلاڕێکانە بدۆزەوە و نزیککرابێتەوە بۆ نزیکترین دەیەك

6 **7**



8 سێگۆشەیەکی ڕێك ئەستوندەکەی 2 cm بێت.

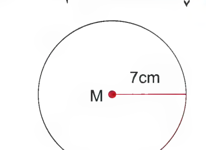
9 بازنەیەك چێوەکەی 5 m بێت.

ڕاهێنان و جێبەجێکردنەکان

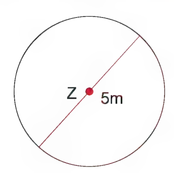
ڕاهێنانی ئازاد	
بۆ شیکارکردنی پرسیارەکان	سەیری نموونەی
12–10	1
13	2
17–14	3

بەپێی π ی ئەو ئەنجامانەی خوارەوە بدۆزەوە.

10 ڕووبەری ئەم بازنەیە



11 چێوەی ئەم بازنەیە

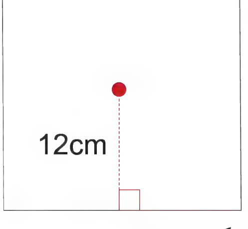


12 تیرەی بازنەیەك چێوەکەی 10 m بێت.

13 **وەرزش** ڕاهێنەرێکی ئەسپ سێ حەلەبەی جیاواز بەکاردەهێنێت کەیەك لەدوای یەك تیرەکانیان 7 m و 10 m و 13 m . ڕووبەری هەریەکە لە حەلەبەکان بدۆزەوە و نزیکیبکەوە بۆ نزیکترین دەیەك.

ڕووبەری هەریەك لەم چەندلاڕێکانە بدۆزەوە نزیکیبکەرەوە بۆ نزیکترین دەیەك.

14 **15**



16 نۆلایەکی ڕێك چێوەکەی 144 m بێت.

17 پێنجلایەکی ڕێك ئەستوندەکەی 2 km

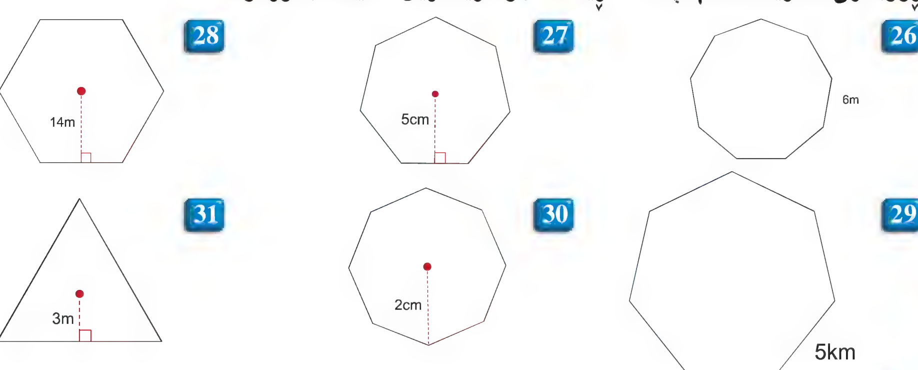
چەقەگۆشەی هەریەك لەم چەندلا ڕێکانەی خوارەوە بدۆزەوە.

18 سێگۆشەیکی ڕێك **19** چوارگۆشە **20** پێنجلا **21** شەشلا

22 حەوتلا **23** هەشتلا **24** نۆلا **25** دەلا.

ڕووبەری هەریەك لەم چەندلا ڕێکانە بۆ نزیکترین دەیەك بدۆزەوە.

26 **27** **28**



29 **30** **31**

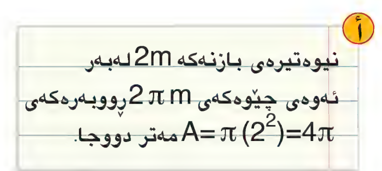


زاناکانی ڕووەك ناسی لێکۆڵینەوە لەسەر ئەڵقەکانی درەختەکان دەکەن بۆ دەرئەنجامهێنانی ئەو گۆڕانانەی کە لە شێوازەکانی نموونەکانیان ڕوویانداوە.

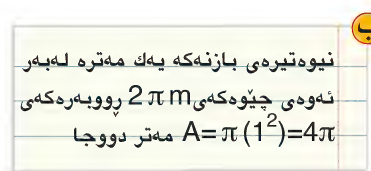
32 **زیندەزانی** دەتوانرێت تەمەنی درەختێك بخەمڵێنرێت بەبەکارهێنانی یاسای $a=\frac{r}{w}$ کاتێك r هێمای نیوەتیرەی درەختەکە بێتوێکڵەکەی بێت و w هێمای ناوەندە ژمێرەیی ئەستووری ئەڵقەکانی درەختەکەبێت. تەمەنی داری (سندیان) بە ڕوویەك بخەمڵێنە کە چێوەکەی 150 cm و ئەستووری توێکڵەکەی 0.2 cm وپانی ئەڵقەکانی 0.5 cm بێت.

33 **هەڵە لە شیکردنداوەدا** دوو خوێندکار ڕووبەری بازنەیەکیان بەو دوو شێوەیەی خوارەوە دۆزییەوە کامیان توشی هەڵەبوون؟ لەکوێ؟

أ


نیوەتیرەی بازنەکە 2m لەبەر
ئەوەی چێوەکەی 2π m ڕووبەرەکەی
$A=\pi(2^2)=4\pi$ مەتر دووجا.

ب


نیوەتیرەی بازنەکە یەك مەترە لەبەر
ئەوەی چێوەکەی 2π m ڕووبەرەکەی
$A=\pi(1^2)=4\pi$ مەتر دووجا

پێوانە نادیارەکان بەپێی π بدۆزەوە.

	تیرە	نیوەتیرە	ڕووبەر	چێوە
34	6	■	■	■
35	■	■	100	■
36	■	17	■	■
37	■	■	■	36π

38 **هەنگاوی جۆراوجۆر** سالار نەخشە بۆ باخچەیەك دەکێشێت بەدەوری گۆمێك ئاو کە لەشێوەی شەشلایەکی ڕێك دابێت درێژی لایەکی 60 m بێت. ئەگەر باخچەکە لەشێوەی بازنەیەك دابێت و 10 m دووربێت لە هەرسەرێك لەسەرەکانی گۆمەکە ڕووبەری باخچەکە چەندە؟ وەڵامەکەت بۆ نزیکترین دەیەك نزیکبکەوە.

39 بۆ هێمای وەستان لەیاسای هاتوچۆدا شێوەی هەشتلایەکی ڕێك بەدو جۆر پێوانە هەیە 30 cm و 36 cm

أ ڕووبەری هێمای یەکەم بۆ نزیکترین دەیەك بدۆزەوە.

ب ڕووبەری هێمای دووەم بۆ نزیکترین دەیەك بدۆزەوە.

ج ڕێژەی سەدی بۆ ڕووبەری زیادکراو لە کانزای پێویست بۆ دروستکردنی جۆری دووەم لەباتی جۆری یەکەم چەندە؟

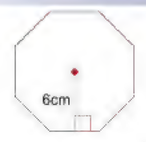
30 cm
یان 36 cm
STOP

40 **پێوانە** هەندێك لەئەندازیاران ڕەوڕەوەیەك بەکاردەهێنن کە بە دەوری تەوەرەیکدا دەخولێتەوە بۆ پێوانی دوورییەکان بەخولانەوەی ڕەوڕەوەکە و ژماردنی جاری خولانەوەکەی تیرەی ئەو ڕەوڕەوەیە بدۆزەوە ئەگەر بزانیت چێوەکەی یەك مەترە.

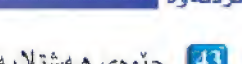
41 **بیری ڕەخنەگر** کام یەکێك لەم دوو مێزە زۆرترین خەڵك دەگرن مێزێکی لاکێشەیی درێژییەکەی 6 m وپانییەکەی 4 m بێت یان مێزێکی خڕ تیرەکەی 6 m بێت؟ بەنزیکەیی چەند کەس لەسەر مێزەکان دادەنیشن؟ بیرۆکەکان ڕوونبکەوە.

42 **بنووسە** چەقی هەر بازنەیەك لە وێنەی بەرامبەر دەکەوێتە سەر ڕاستەهێڵی ژمارەکان. پەیوەندی نێوان چێوەی بازنە گەورەکە و چێوەی هەریەك لە بازنەکانی تر ڕوونبکەوە.





43 چێوەی هەشتلایەکی ڕێکی بەرامبەر بۆ نزیکترین سانتیمەتر چەندە؟



(أ) 5 (ب) 40 (ج) 20 (د) 68

44 کام لەم ڕێژانەی خوارەوە π دەنوێنێت کاتێك C چێوەی بازنەکە و d تیرەکەی بێت.

(أ) $\frac{C}{d}$ (ب) $\frac{4C}{d^2}$ (ج) $\frac{d}{C}$ (د) $\frac{d}{2C}$

45 ئاراس مێزێکی بازنەیی هەیە تیرەکەی 2 m . دەیەوێت لەسەر ڕووەکەی وێنەی لاکێشەیەك کە درێژییەکەی 2 m وپانییەکەی 1 m بێت و 4 گۆشە کە درێژی هەرلایەکی $\frac{1}{2}$m بێت بکێشێت. کام یەکێك لەمانە ئەستەمی ویستی ئاراس دەردەبڕێت.

(أ) دوای کێشانی وێنەی لاکێشەکە هیچ جێگایەك نامێنێتەوە.

(ب) ئاراس ناتوانێت لاکێشەیەك لەسەر ڕووی مێزەکە بکێشێت درێژیەکەی 2 m بێت.

(ج) ناتوانرێت وێنەی چوارگۆشەکان بکێشرێت.

(د) هیچ جێگایەك لەسەر ڕووی مێزەکە نامێنێتەوە بۆ کێشانی 4 چوارگۆشەکە درێژی لای هەریەکەیان $\frac{1}{2}$ m بێت

بەرەنگاری و فراوانکردن

46 وێنەی بەرامبەر دوو بازنە دەنوێنێت کە هەمان چەقیان هەیە نیوەتیرەی گەورەکە 5 cmی زیاترە لەنیوەتیرەی بچوکەکە جیاوازی نێوان چێوەی هەردوو بازنەکە بەپێی π بدۆزەوە.

47 **جەبر** یاسایەك بۆ هەژمارکردنی ڕووبەری بازنە بەپێی چێوەکەی بنووسە.

48 **بیری ڕەخنەگر** ڕوونیبکەوە کە ڕووبەری ئەو چەندلا ڕێکەی ژمارەی لایەکانی n لە ڕووبەری بازنەیەك نزیکدەبێتەوە هەتا ژمارەی n زیادبکات.

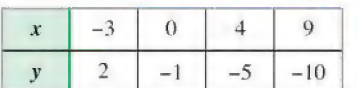
پێداچوونەوەی لولپێچی

ئەو نەخشە هێڵییە بنووسە کە هەر خشتەیەك دەینوێنێت. (پۆلەکانی پێشوو)

49

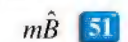
x	−2	0	5	10
y	−19	−13	2	17

50



x	−3	0	4	9
y	2	−1	−5	−10

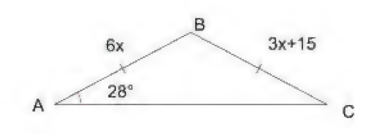
ئەمانە بدۆزەوە. (پۆلەکانی پێشوو)



51 $m\hat{B}$



52 AB



ئەمانە بدۆزەوە. (پۆلەکانی پێشوو)

53 d_2 ئەگەر بزانیت $d_1 = 20$ و ڕووبەرەکەی $A = 14$ یەکەی ڕووبەر

54 ڕووبەری نیمچەلاتەریبەکە بنکەکانی یەك لەدوای یەك 3 m و 6 m و بەرزییەکەی 4 m بێت.

6-1

هەندێك لە یاساكانی بۆشایی

Formulas in 3 dimensions



كێ ئەمە بەكاردەهێنێت؟

مەلەوانەكانی ژێرئاو پۆوتانەكانی بۆشایی بەكاردەهێنن بۆ دۆزینەوەی دووری نێوان دوخاڵی ژێرئاو (نمونە 5)

ئامانجەكان

- یاسای ئۆلەر بۆ دۆزینەوەی ژمارەی سەرولایەكان و ڕووەكانی چەندڕوو بەكاردەهێنێت.
- یاسای دووری پەرەپێدەدات لە بۆشاییدا و بەكاریدەهێنێت.
- یاسای پۆوتانی ناوەڕاستی پارچە ڕاستەهێڵ لەبۆشاییدا پەرەپێدەدات و بەكاری دەهێنێت.

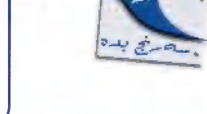
زاراوەكان
Vocabulary

چەندڕوو
Polyhedron

چەندڕوو Polyhedron لەچوار ڕوو یان زیاتر پێكدێت كە تەنها لە لایەكانیدا یەكتری دەبڕن. پوازك و هەرەم چەندڕوون بەڵام لوولەك و قوچەك بەچەند ڕووا دانانرێت.

ئەم شێوە ئەندازەییانە چەندڕوون	ئەم شێوە ئەندازەییانە چەندڕوو نین

پەیوەندییەك هەیە كە ژمارەی سەرەكان و ژمارەی لایەكان و ژمارەی ڕووەكان لەچەند ڕوودا بەیەكەوە دەبەستێت.

یاسای ئۆلەر Euler's formula

ئەگەر V ژمارەی سەرو E ژمارەی لایەكانی و F ژمارەی ڕووەكانی چەندڕوویەك بن ئەوا.

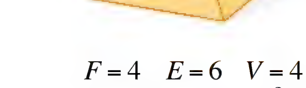
$$V - E + F = 2$$

نموونــــە 1

بەكارهێنانی یاسای ئۆلەر

ژمارەی سەرەكان ولایەكان و ڕووەكانی بدۆزەوە و بەكاریان بێنە بۆ پاسادان لەڕاستی یاسای ئۆلەر

أ



$F = 4 \quad E = 6 \quad V = 4$

$4 - 6 + 4 \stackrel{?}{=} 2$ یاسای ئۆلەر بەكاربێنە

$2 = 2$ ✓ سادەبكە.

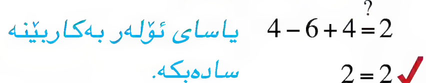
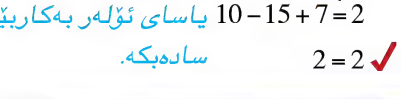
ب



$F = 7 \quad E = 15 \quad V = 10$

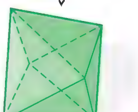
$10 - 15 + 7 \stackrel{?}{=} 2$ یاسای ئۆلەر بەكاربێنە

$2 = 2$ ✓ سادەبكە.

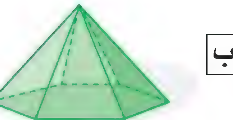




1. ژمارەی سەرەكان ولایەكان و ڕووەكانی بدۆزەوە و بەكاریان بهێنە بۆ پاسادان لە ڕاستی یاسای ئۆلەر.

أ




ب



تیرەی چەندڕوو ئەو پارچە ڕاستەهێڵەیە دوو سەر بەیەك دەگەیەنێت و ناكەوێتە هیچ ڕوویەك لە ڕووەكانی. وێنەی بەرامبەر یەكێك لەتیرەكانی d لاكێشە تەریبەكە ڕووندەكاتەوە بۆ ئەوەی درێژی تیرەكە هەژماربكەیت دووجار سەلمێنراوی فیثاگۆرس بەكاربێنە.

$d^2 = h^2 + x^2$ و $x^2 = \ell^2 + w^2$ پاش لەجیاتی دانانی x^2 بە بەهاكەی دەردەچێت كە $d^2 = h^2 + \ell^2 + w^2$



تیرەی لاكێشە تەریب

درێژی تیرەی لاكێشە تەریبێك كە درێژییەكەی ℓ وپانییەكەی w و بەرزییەكەی h بێت بریتییە لە

$$d = \sqrt{h^2 + \ell^2 + w^2}$$

نموونــــــە 2 بەكارهێنانی سەلمێنراوی فیساگۆرس لە بۆشاییدا بدۆزەوە

ئەمانە بدۆزەوە.

أ درێژی تیرەی ئەولاكێشە تەریبە بدۆزەوە كەدرێژی 3 cm وپانی 4 cm بەرزی 5 cm

$d = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2}$ بەهای ℓ و w و h لەجیاتی بكە.

$= \sqrt{9 + 16 + 25}$ سادەبكە.

$= \sqrt{50} \approx 7.1$

درێژی تیرەكە بەنزیكەیی 7.1 cm

ب بەرزی لاكێشە تەریبێك كە درێژی 12 m وپانی 8 m و درێژی تیرەكەی 18 m بێت.

$18 = \sqrt{8^2 + 12^2 + h^2}$ بەهای ℓ و w و h لەجیاتی بكە.

$(18)^2 = 8^2 + 12^2 + h^2$ هەردولا دوجابكە.

$324 = 64 + 144 + h^2$ سادەبكە

$h^2 = 116$ بەهای h^2 هەژماربكە.

$h = \sqrt{116} \approx 10.8$ ڕەگی دوجای هەردولا وەربگرە.

بەرزی لاكێشە تەریبەكە بەنزیكەیی 10.8 m



2. درێژی تیرەی خشتەكێك بدۆزەوە كەدرێژی لایەكی 5 cm بێت.

لەبیرت بێت بۆ دیاریكردنی شوێنی خاڵێك لەسەر ڕووتەختی پۆتانەكان پێویستت بە پۆتانەكەی هەیە و بۆ دیاریكردنی خاڵێك لە بۆشاییدا 3 جێكەوتت پێویستە. هەروەها لەبیرت بێت تەوەری بۆشایی پێویستی بە 3 تەوەرە هەیە وەك لەوێنەی بەرامبەردا دیارە. هەموو سیانە ڕێكخراوێك (x, y, z) تەنها خاڵێك دیاریدەكات لەتەوەری بۆشاییدا. هەروەها هەموو خاڵێك سیانە ڕێكخراوێك دیاریدەكات. بۆ دیاریكردنی خاڵی $(2, 3, 4)$ لەخاڵی بنەڕەتەوە $(0, 0, 0)$ دوو یەكە بجولێ بۆ پێشەوە لەسەر تەوەری یەكەم، پاشان سێ یەكە بۆ لای ڕاست تەریب بەتەوەری دووەم پاشان 4 یەكە بۆ سەرەوە تەریب بەتەوەری سێیەم.

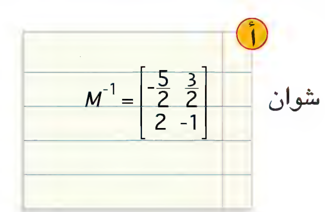


28 **بیری ڕەخنەگر** ئەو پەیوەندییە چییە. ڕیزکراوە و هەڵگەڕاوەکەی و ڕیزکراوەی یەکە بەیەکەوە دەبەستێت؟

29 هەکار نامەیەکی جفرە کرد و دەیەوێت بۆ هاوڕێیەکەی بینێرێت نامە جفرەکراوەکە لە ڕیزکراوەی C دا نووسی. ڕیزکراوەی شاردنەوەی M ی بەکارهێنا. نامەیەکی شاراوەی جفرەکراوی D دەستکەوت. ئەو مەرجانە چین پێویستە ڕەچاوبکرێن بۆ ڕیزکردنی ڕیزکراوەکان.

30 **هەڵە لە شیکردنەوە** هەریەکە لە شوان و ساڤان. هەژماری هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ یان کرد. ئایا کامیان هەڵەی کردووە؟ هەڵەکە ڕوونبکەوە.

أ شوان



ب ساڤان

$M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

31 **بۆ خۆشی** باوکت ووتی 5000 دینار لە گیرفانمدایە، پێکهاتووە لە جۆری 50 دیناری و 100 دیناری دەیدەم بە تۆ ئەگەر بزانیت چەند پارچە لەهەر جۆرێك لە گیرفانمدایە، بۆ یارمەتیدانت ووتی ژمارەی پارچەکان هەمووی 73 پارچەیە. هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوە بەکاربێنە بۆ بردنەوەی 5000 دینارەکە.

32 **ئاو** شارەوانی شارێك بۆڕییەکی ئاوی لە یەکێك لە باخچە گشتییەکانی شار دانا. بۆئەوەی گەشتیاران بەکاریبێنن. ئەم بۆڕیە 24 کاتژمێر لە ڕۆژێکدا ئیش دەکات دەتوانرێت بەسێ خێرایی هێواش و ناوەند و خێرا بەکاربهێنرێت. ئەم خشتەیەی خوارەوە پێدراوەکانی بەکارهێنانی بۆڕیە ئاوەکەیە. لەماوەی سێ ڕۆژدا. خێرایی هەرسێ جۆرەکە بە کیلۆلیتر بۆ هەر کاتژمێرێك بدۆزەوە.

	هێواش ژمارەی کاتژمێرەکان	ناوەند ژمارەی کاتژمێرەکان	خێرا ژمارەی کاتژمێرەکان	برەکەی بە کیلۆمەتر
یەکشەممە	15	7	2	199
دووشەممە	16	4	4	208
سێشەممە	12	8	4	236

33 **چی دەبێت ئەگەر...** وا دابنێین کە دانەکانی ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ بکەیت بە دوو ئەوەندە؟

أ دانەکانی هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەکە چۆن دەگۆڕێت؟

ب دەستەواژەیەك بنووسە لەسەر چۆنیەتی گۆڕانی دانەکانی هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوێکی سنووردار. ئەگەر ڕیزکراوەکە لێکدانی ژمارە k بکەیت؟

34 هەرێم 000 24 دیناری دا بۆ نرخی چوونەژوورەوەی 7 بلیتی منداڵان و 2 بلیتی گەورە بۆ باخچەی ئاژەڵان. مازن 000 46 دینار پارەی دا نرخی 4 بلیتی گەورە و 13 بلیتی منداڵان. نەزانراوی x بەکاربێنە بۆ نرخی بلیتی گەورە و نەزانراوی y بۆ نرخی بلیتی منداڵان.

أ بەهۆی سستەمی هاوکێشەکانەوە ئەم پرسیارە دەرببڕە.

ب ئایا سنووردەری ڕیزکراوەی هاوکۆڵکەکان یەکسانە بە سفر؟ ژمارەی شیکارەکانی چەندە؟

ج شێوەی ڕیزکراوە و هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوە بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی x و y.

د نرخی بلیتی گەورە چەندە؟ نرخی بلیتی منداڵان چەندە؟

35 **بیركردنەوەی ڕەخنەگرانە** (أ) بیسەلمێنە هەڵگەڕاوەی ڕیزكراوەی $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ بریتییە لە $\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

(ب) هەڵگەڕاوەی ڕیزكراوێك $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ سنووردەرەكەی 1 بێت چەندە؟

(ج) ئەو هۆیە چییە كە وادەكات دانەكانی هەڵگەڕاوەی ڕیزكراوەی $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ژمارەی تەواوبێت. كاتێك دانەكانی ڕیزكراوەكە ژمارەی تەواوبن و سنووردەرەكەی 1 بێت.

36 بەهای x بدۆزەوە كاتێك ڕیزكراوەی $\begin{bmatrix} 2 & x \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ هەڵگەڕاوەی نەبێت.

37 هەڵگەڕاوەی ئەو ڕیزكراوەیە چەندە كە تەنها یەك دانەی هەیە $[a]$ ؟

38 **كیمیا** سانا بڕێك لە گیراوەیەك 15%ی ترشی گۆگرد بێت تێكەڵ كرد لەگەڵ گیراوەیەكی تر كە 40% ئەو ترشەی تێدابێت. بڕی 50L بەدەستهێنا ڕێژەی ترشی گۆگرد تێیدا 35% بوو. ئایا چەند لیتر لەهەریەك لە گیراوەكان تێكەڵ كرا؟

39 **بنووسە** ئەنجامی لێكدانی $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$ بدۆزەوە. پەیوەندی چییە لەنێوان ئەم دوو ڕیزكراوەیە؟



40 كام لەمانەی خوارەوە هاوكێشەی ڕیزكراوەیی سستەمی $\begin{cases} 3x+2y=8 \\ x=y+1 \end{cases}$ ؟

(أ) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$

(ج) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

(د) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$

41 كام لەمانەی خوارەوە ڕاستە بۆ ئەم ڕیزكراوەیە $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -9 \end{bmatrix}$ ؟

(أ) ڕیزكراوەكە هەڵگەڕاوەی هەیە. چونكە سنووردەرەكەی یەكسان نییە بە سفر.

(ب) ڕیزكراوەكە هەڵگەڕاوەی هەیە. چونكە سنووردەرەكەی یەكسانە بە سفر.

(ج) ڕیزكراوەكە هەڵگەڕاوەی نییە. چونكە سنووردەرەكەی یەكسانە بە سفر.

(د) ڕیزكراوەكە هەڵگەڕاوەی نییە. چونكە سنووردەرەكەی یەكسان نییە بە سفر.

42 دانەی b_{11} چەندە؟ ئەگەر B هەڵگەڕاوەی ڕیزكراوەی $A=\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ بێت؟

(أ) 1 (ب) $-\frac{1}{9}$ (ج) 3 (د) $-\frac{1}{27}$

43 كام لەمانەی خوارەوە ڕاستە لەسەر ڕیزكراوەی $M=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ئەگەر سنووردەرەكەی یەكسان نەبێت بە سفر و كاتێك $a>0$ و $b<0$ و $c<0$ و $d>0$ ؟

(أ) هەموو دانەكانی M^{-1} سالب نییە.

(ب) ڕیزكراوەی M^{-1} تەنها یەك دانە سالبی تێدایە.

(ج) ڕیزكراوەی M^{-1} تەنها دوو دانە سالبی تێدایە

(د) ڕیزكراوەی M^{-1} تەنها سێ دانە سالبی تێدایە.

44 **کورتە وەڵام** پێشانگایەکی تابلۆکانی هونەر. تابلۆیەکی هونەری تێچوونەکەی 000 25 دینارە پێشکەش بەو کەسە دەکات کە 000 500 دینار دەبەخشێت. تابلۆیەك تێچوونەکەی 000 50 دینار دەبەخشێتە ئەو کەسەی 000 000 1 دینار دەبەخشێت. پێشانگاکە 000 000 24 دیناری لە بەخشینەکان کۆکردەوە بەرامبەر پێدانی 35 تابلۆ. ژمارەی بەخشینەکان لەهەر جۆرێك چەندبوو؟

بەرەنگاری و فراوانکردن

45 **خولیاکان** نمرەکانی کۆتایی ساڵی خوێندکارێك بەرزدەکرێتەوە بەهاوکۆلکەی جیاواز بە پێی هەر بابەتێك. ئەم خشتەیەی خوارەوە نمرەکانی 4 خوێندکار لە 4 بابەت و سەرجەمی هەریەکەیان ڕووندەکاتەوە. پێویستە لەسەرت بەرزکردنەوەی هەر بابەتێك بدۆزێتەوە.

نمرەکانی تاقیکردنەوەی کۆتایی ساڵ					
خوێندکار	بیرکاری	زانست	زمانی عەرەبی	زمانی بیانی	سەرجەم
هیوا	65	72	55	50	1038
ڕێبەر	40	45	66	60	890
ڕەوەند	55	65	60	65	1030
عیماد	85	75	65	75	1275

46 بەهای دانەکانی ڕیزکراوەی $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ بدۆزەوە بۆئەوەی یەکسان بێت بە هەڵگەڕاوەکەی.

47 ژیکاڵ لە باوکیەوە ئەم نامەیەی پێگەیشت 18 ، 0 ، 30 ، 15 ، 33- ، 8- ، 7 ، 5- ، 3- ، 5 ، 3 ، 12 ، 4 ، 8 ، 33 ، 6 ، 0 ، 0 . بۆ کردنەوەی نامەکە ڕیزکراوەیەکی شاراوەی 3 × 3 کە هەموو دانەکانی ژێرتیرەی سەرەکی سفرە، لە کاتێکدا دانەکانی تر هەموویان یەکسانن بە 1.

أ ئەو نامەیە چییە کە ژیکاڵ پێی گەیشتووە؟

ب ڕیزکراوەی شاردنەوە کە کامەیە؟

ج ژیکاڵ وەڵامی نامەکەی باوکی داوە بەم شێوەیە «بەڵێن دەدەم». ئەو نامەیە چییە کە باوکی پێی دەگات.

پێداچوونەوەی لوولپێچی

شیکاریکە (پۆلەکەی پێشوو)

48 $\frac{2x}{10} = \frac{12}{30}$ **49** $\frac{0.5}{0.2x} = \frac{100}{7}$ **50** $125\%x = 117$

ڕێگای لابردن بەکاربێنە بۆ شیکارکردنی سیستمی ئەم هاوکێشانە. (وانەی 5-2)

51 $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + 3y - 6z = 5 \\ -4z - 5y + 0.25z = -9 \end{cases}$ **52** $\begin{cases} y - x - 3z = 4 \\ 2x + y - 4z = -3 \\ 0.25x + 8z + 3 = 2y \end{cases}$

سنووردەری ئەم ڕیزکراوانە بدۆزەوە. (وانەی 4-3)

53 $\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix}$ **54** $\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 3 \\ 1 & 12 \end{bmatrix}$ **55** $\begin{bmatrix} -4 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ **56** $\begin{bmatrix} \frac{4}{9} & 8 \\ \frac{3}{2} & -81 \end{bmatrix}$



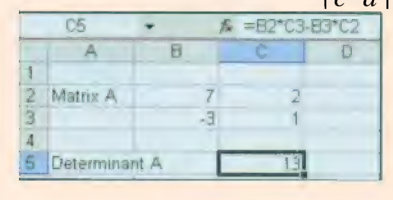
شیکارکردنی سیستمی هێڵی بە بەکارهێنانی بەرنامەی Excel

پەیوەندە بە وانەی 3-5

چالاکی

شیکاری ئەم سیستەمە بکە $\begin{cases}7x+2y=-8\\ -3x+y=9\end{cases}$

دەتوانیت بەرنامەی Excel بەکاربێنیت بۆ هەژمارکردنی سنووردەری ڕیزکراوەکە و هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەکە. بە نیازی شیکارکردنی سستەمی $AX=B$ بە نووسینی $X=A^{-1}B$ و هەژماری ڕیزکراوەی $A^{-1}B$ بۆ دۆزینەوەی A^{-1} . دەستبکە بەهەژماری سنووردەری ڕیزکراوەیی A لەبیرت بێت. سنووردەری ڕیزکراوەی $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ بریتییە لە $|A|=ad-bc$



	A	B	C	D
1				
2	Matrix A	7	2	
3		-3	1	
4				
5	Determinant A		13	

هەرچوار هاوکۆلکەکانی سستەمەکە a لە $B2$ b لە $C2$، c لە $B3$، d لە $C3$ بخە ناو بژمێرەکەوە. بۆ هەژمارکردنی سنووردەری ڕیزکراوە ئەمانە $\boldsymbol{=B2*C3-B3*C2}$ لە خانەی $C5$ تۆماربکە.

لەلایەکی تر، لەبیرت بێت هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ بریتییە لە $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$ یان $A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{d}{|A|} & -\frac{b}{|A|}\\ -\frac{c}{|A|} & \frac{a}{|A|}\end{bmatrix}$، $\boldsymbol{=C3/C5}$ بخەناو خانەی $\boldsymbol{C7}$ بۆ هەژماری $\frac{d}{|A|}$ و بۆ هەژماری $\frac{a}{|A|}$، $\boldsymbol{=B2/C5}$ لەخانەی $\boldsymbol{D8}$ تۆماربکە.

	A	B	C	D	E
6					Matrix B
7	Inverse A or A⁻¹		0.076923	-0.15385	-8
8			0.230769	0.538462	9
9					
10		Solution A⁻¹B		-2	
11					

	A	B	C	D	E
6					Matrix B
7	Inverse A or A⁻¹		0.076923	-0.15385	-8
8			0.230769	0.538462	9
9					
10		Solution A⁻¹B		-2	
11				3	

شیکاری ڕیزکراوەکە لە ستوونێك پێکدێت ئەویش $A^{-1}B$ دوو ژمارەی لای ڕاستی هاوکێشەکە واتە(8- و 7)لە دوو خانەی $E7$ و $E8$ بەودای یەکدا تۆماربکە. بۆ هەژماری ڕیزکراوەی $A^{-1}B$ ئەمانە تۆماربکە.

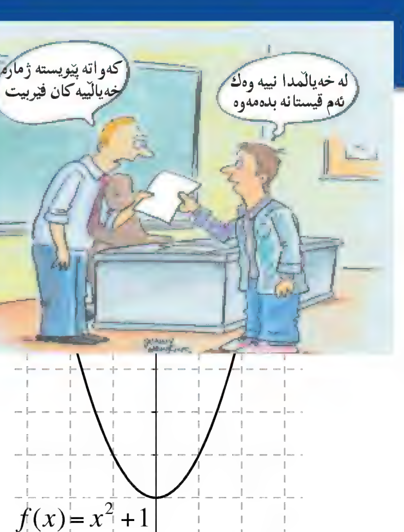
$\boldsymbol{=C7*E7+D7*E8}$ لە خانەی $D10$

و $\boldsymbol{=C8*E7+D8*E8}$ لە خانەی $D11$.

شیکار بریتییە لە $x=-2$ و $y=3$. بەرنامەیەکت دارشت بۆ شیکارکردنی سستەمی هاوکێشە هێڵیەکانی 2×2 . یەکێك لە هاوکۆلکەکانی سستەمی پێشوو بگۆڕە یان یەکێك لە ژمارەکانی لای ڕاست بگۆڕە. تێبینی بکە چۆن ئەنجامەکان دەگۆڕێت.

هەوڵبدە

1. هەردوو ژمارەی لای ڕاستی دوو هاوکێشەکە بگۆڕە بەدوو ژمارەی 5− و 9 ، سستەمی نوێ شیکاربکە بە بەکارهێنانی ئەو بەرنامەی داتڕشتووە.
2. چۆن ڕاستی ئەنجامەکەت دەسەلمێنێت بەکارهێنانی بەرنامەی Excel ؟
3. بیری ڕەخنەگر ئەو بەرنامەیە بەکاربێنە بۆ شیکارکردنی سستەمێکی ئەستەم کە پێشتر زانیوتە. و یەکێکی تر دیارینەکراو بێت. چۆن بەرنامەی Excel بەکاردەهێنیت بۆئەوەی بزانیت کە ئەم سستەمە ئەستەمە یان دیارینەکراوە.



6-3 ژمارە ئاوێتەکان

Complexe Numbers

بۆچی ئەمە فێردەبین؟

دەتوانرێت ژمارە ئاوێتەکان بۆ شیکاری ئەو هاوکێشە دووجایانە بەکاربهێنرێت کە لە ژمارە ڕاستیەکاندا شیکاریان نییە (نموونە 4)

ئامانجەکان

- ناسینەوەی ژمارە خەیاڵییەکان و ئاوێتەکان و چۆنیەتی بەکارهێنانیان
- هاوکێشە دووجاکان کە لەژمارە ڕاستییەکاندا ڕەگیان نییە شیکاردەکات.

زاراوەکان Vocabulary

یەکەی خەیاڵی Imaginary unit

ژمارەی خەیاڵی Imaginary number

ژمارەی ئاوێتە Complex number

بەشی ڕاستی Real part

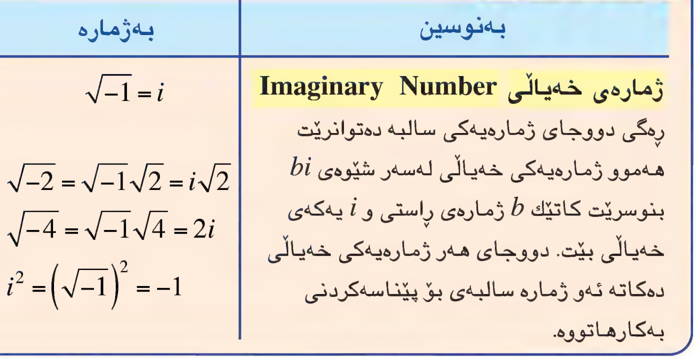
بەشی خەیاڵی Imaginary part

ئاوەڵی ژمارەی ئاوێتە Complex conjugate

دەتوانیت بە ڕوونکردنەوەیی دڵنیابیت کە نەخشەی $f(x)=x^2+1$ شیکاری نییە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستیەکاندا. ئەگەر هەوڵبدەیت شیکاری ئەم هاوکێشە دووجایە $x^2+1=0$ بکەیت کە ئاوەڵیەتی ئەوا -1 $x=\pm\sqrt{-1}$ دەستدەکەوێت. ئەمەش دڵنیات دەکات کە ڕەگەکانی ڕاستی نین.

بەڵام بۆئەوەی لەتواناتدا هەبێت ئەم جۆرە هاوکێشانە شیکاربکەیت پێویستە ڕەگی دووجای ژمارەی سالب بزانیت. زانایانی بیرکاری ئەم جۆرە ڕەگانەیان خستەناو زانستی بیرکاریەوە و ناویان لێنا **ژمارە ئاوێتەکان Complex numbers** . یەکەمین ژمارە لەم ژمارانە $i=\sqrt{-1}$ ناویان لێنا **یەکەی خەیاڵی Imaginary Unit**. دەتوانیت ڕەگی دووجا بۆهەر ژمارەیەکی سالب بە بەکارهێنانی یەکەی خەیاڵی بنووسیت.



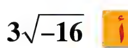


ژمارە خەیاڵیەکان

بەنووسین	بەژمارە	بەجەبر
ژمارەی خەیاڵی Imaginary Number ڕەگی دووجای ژمارەیەکی سالبە دەتوانرێت هەموو ژمارەیەکی خەیاڵی لەسەر شێوەی bi بنوسرێت کاتێك b ژمارەی ڕاستی و i یەکەی خەیاڵی بێت. دووجای هەر ژمارەیەکی خەیاڵی دەکاتە ئەو ژمارە سالبەی بۆ پێناسەکردنی بەکارهاتووە.	$\sqrt{-1}=i$ $\sqrt{-2}=\sqrt{-1}\sqrt{2}=i\sqrt{2}$ $\sqrt{-4}=\sqrt{-1}\sqrt{4}=2i$ $i^2=\left(\sqrt{-1}\right)^2=-1$	ئەگەر b ژمارەیەکی ڕاستی موجەب بێت ئەوا: $\sqrt{-b}=i\sqrt{b}$ $\sqrt{-b^2}=ib$ $\left(\sqrt{-b}\right)^2=-b$

نموونــــە 1 سادەکردنی ڕەگە دووجاکانی ژمارە سالبەکان

هەر برەیەك بەپێی i بنووسە.



أ $3\sqrt{-16}$

$3\sqrt{(16)(-1)}$ — -16 شیتەڵ بکە

$3\sqrt{16}\sqrt{-1}$ — سیفەتی لێکدانی ڕەگەکان

$3\times 4\sqrt{-1}$ — سادەبکە

$12\sqrt{-1}$ — لێکبدە

$12i$ — بەپێی i بنووسە



ب $-\sqrt{-75}$

$-\sqrt{(75)(-1)}$ — -75 شیتەڵ بکە

$-\sqrt{75}\sqrt{-1}$ — سیفەتی لێکدانی ڕەگەکان

$-\sqrt{25}\sqrt{3}\sqrt{-1}$ — سیفەتی لێکدانی ڕەگەکان

$-5\sqrt{3}\sqrt{-1}$ — سادەبکە

$-5\sqrt{3}i=-5i\sqrt{3}$ — بەپێی i بنووسە



1. هەر برەیەك بە پێی i بنووسە.

أ $\sqrt{-12}$ ب $2\sqrt{-36}$ ج $-\frac{1}{3}\sqrt{-63}$

نموونـــــە 2 شیکارکردنی ئەو هاوکێشە دووجایانەی کە دوو ڕەگەکەی خەیاڵین

هاوکێشەکە شیکاربکە.

أ $x^2 = -81$

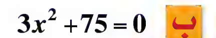
$x = \pm\sqrt{-81}$ ڕەگی دووجای هەردوولا وەربگرە

$x = \pm 9i$ بەپێی i بنووسە

پاسادانبکە

$x^2 =$	-81
$(9i)^2$	-81
$81i^2$	-81
$81(-1)$	-81 ✓

$x^2 =$	-81
$(-9i)^2$	-81
$81i^2$	-81
$81(-1)$	-81 ✓



ب $3x^2 + 75 = 0$

$3x^2 = -75$ -75 بۆهەردوولا زیادبکە

$x^2 = -25$ هەردوولا دابەشی بکە

$x = \pm\sqrt{-25}$ ڕەگی دووجای هەردوولا وەربگرە

$x = \pm 5i$ بەپێی i بنووسە

پاسادانبکە

$3x^2 + 75 =$	0
$3(\pm 5i)^2 + 75$	0
$3(25)i^2 + 75$	0
$75(-1) + 75$	0 ✓



2. هاوکێشەکە شیکاربکە.

أ $x^2 + 36 = 0$ ب $x^2 + 48 = 0$ ج $9x^2 + 25 = 0$

ژمارەی ئاوێتە Complex Number

ژمارەیەکە دەتوانیت بەشێوەی $a + ib$ بینووسیت کاتێك a و b ژمارەی ڕاستی بن، $i = \sqrt{-1}$ کۆمەڵەی ژمارەی ڕاستییەکان R بەشێکە لە کۆمەڵەی ژمارە ئاوێتەکان C واتە $R \subseteq C$



هەموو ژمارەیەکی ئاوێتە **بەشێکی ڕاستی Real Part** (a) و **بەشێکی خەیاڵی Imaginary Part** (b) هەیە.



ژمارە ڕاستییەکان ژمارەیەکی ئاوێتەن کە بەشە خەیاڵییەکانیان سفرە. ژمارە خەیاڵییەکانیان ژمارەی ئاوێتەن کە بەشە ڕاستییەکانیان سفرە. بەشە خەیاڵییەکەیان سفر نییە. دوو ژمارەی ئاوێتە یەکسان دەبن ئەگەر بەشە ڕاستییەکانیان یەکسان بن و بەشە خەیاڵییەکانیان یەکسان بن.

نموونـــــە 3 یەکسانبوونی دوو ژمارەی ئاوێتە

بەهای هەریەکە لە x و y بدۆزەوە بەمەرجێك ئەم یەکسانبوونە دروستبێت. $3x - 5i = 6 - (10y)i$

دوو بەشە ڕاستییەکە

$3x - 5i = 6 - (10y)i$

دوو بەشە خەیاڵییەکە

$3x = 6$ دوو بەشە ڕاستییەکە یەکسان دەبن

$x = 2$

$-(10y) = -5$ دوو بەشە خەیاڵییەکە یەکسان دەبن

$y = \frac{1}{2}$



3. بەهای هەریەکە لە x و y بدۆزەوە بۆئەوەی یەکسانبوونەکە دروستبێت.

أ $2x-6i=-8+(20y)i$ ب $-8+(6y)i=5x-i\sqrt{6}$

نموونـــــە 4 دۆزینەوەی سفرە ئاوێتەکانی نەخشە دووجاکان

هەردوو سفری نەخشە دووجاکە بدۆزەوە.

أ $f(x)=x^2-2x+5$

$x^2-2x+5=0$ هاوکێشەکە بنووسە

$x^2-2x+1=-5+1$ زیادبکە بۆ ئەوەی

$(x-1)^2=-4$ ببێت بەدووجای تەواو

$x-1=\pm\sqrt{-4}$ ڕەگی دووجا وەربگرە

$x=1\pm 2i$ سادەبکە

ب $g(x)=x^2+10x+35$

$x^2+10x+35=0$ هاوکێشەکە بنووسە

$x^2+10x+25=-35+25$ زیادبکە بۆ ئەوەی

$(x+5)^2=-10$ ببێت بەدووجای تەواو

$x+5=\pm\sqrt{-10}$ ڕەگی دووجا وەربگرە

$x=-5\pm i\sqrt{10}$ سادەبکە



4. هەردوو سفری نەخشە دووجاکە بدۆزەوە.

أ $f(x)=x^2+4x+13$ ب $g(x)=x^2-8x+18$

ڕۆشنایی

ئەگەر هاوکۆلکەکانی هاوکێشەیەکی دووجا ژمارەی ڕاستی بن، یەکێك لە ڕەگەکانیمان زانی و ژمارەی ئاوێتە بوو ئەوا ڕەگی دووەم دەبێتە ئاوەڵی ئەو ڕەگە.

لە نموونەی 4ـ ب دا پەیوەندییەك هەیە هەردوو سفری نەخشەکە $-5+i\sqrt{10}$ و $-5-i\sqrt{10}$ بە یەکەوە دەبەستێت. ئەو دوو ژمارە ئاوێتەیە **ئاوەڵی یەکتردەبن**. بەشە ڕاستییەکانیان یەکسانن و بەشە خەیاڵییەکانیان دژە کۆی یەکتردەبن. **ژمارەی ئاوەڵ Conjugate Number** بۆ ژمارەی ئاوێتەی $a+bi$ بریتییە لە ژمارە ئاوێتەی $a-bi$ ئەگەر هەردوو ڕەگەکانی هاوکێشەیەکی دووجا هاوکۆلکەکانیان ژمارەی ڕاستی بن و خۆیان ڕاستی نەبوون ئەوا ڕەگەکانیان دوو ژمارەی ئاوێتەی ئاوەڵی یەکتردەبن.

نموونـــــە 5 دۆزینەوەی ژمارەی ئاوەڵ بۆ ژمارەیەکی ئاوێتە

ئاوەڵی ئەم ژمارە ئاوێتانە بدۆزەوە.

أ $2i-15$

$-15+2i$ بەشێوەی $a+bi$ بنووسە

$-15-2i$ بدۆزەوە $a-bi$

ب $-4i$

$0+(-4)i$ بەشێوەی $a+bi$ بنووسە

$0-(-4)i$ بدۆزەوە $a-bi$

$4i$ سادەبکە



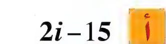
5. ئاوەڵی ئەم ژمارە ئاوێتانە بدۆزەوە.

أ $9-i$ ب $i+\sqrt{3}$ ج $-8i$

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. ئەگەر زانیت $3+i$ ڕەگێکی هاوکێشەیەکی دووجایە کە هاوکۆلکەکانی ژمارەی ڕاستین چۆن ڕەگەکەی تر دەدۆزیەوە

2. ژمارە ئاوێتەی $a+bi$ بنووسە کاتێك $a\neq 0$ و $b=0$ پاشان ژمارە ئاوێتەی $a+bi$ بنووسە کاتێك $a=0$ و $b\neq 0$ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە




3. ڕێکخەربە ئەم هێلکاریە درووستبکە و پاشان تەواوی بکە. لەهەر چوار چێوەیەکدا پێناسە و نموونەی گونجاو بنووسە.



6-3 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** ژمارە 7 بریتییە لە ________ لە ژمارەی $\sqrt{5}+7i$. (بەشی ڕاستی یان بەشی خەیاڵی).

پڕوانە نموونە 1 ژمارەکە بەپێی i بنووسە.

2 $5\sqrt{-100}$ **3** $\frac{1}{2}\sqrt{-16}$ **4** $-\sqrt{-32}$ **5** $\sqrt{-144}$

پڕوانە نموونە 2 هاوکێشەکە شیکاربکە.

6 $x^2=-9$ **7** $2x^2+72=0$ **8** $4x^2=-16$ **9** $x^2+121=0$

پڕوانە نموونە 3 بەهای x و y بدۆزەوە کە وادەکەن ئەم یەکسانییە دروست بێت.

10 $-2x+6i=(-24y)i-14$ **11** $-4+yi=-12x-i+8$

پڕوانە نموونە 4 سفرەکانی نەخشەکە بدۆزەوە.

12 $f(x)=x^2-12x+45$ **13** $g(x)=x^2+6x+34$

پڕوانە نموونە 5 ژمارەی ئاوەڵ بدۆزەوە.

14 $-9i$ **15** $\sqrt{5}+5i$ **16** $8i-3$ **17** $6+i\sqrt{2}$

ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

ڕاهێنانی ئازاد

بۆشیکارکردنی ڕاهێنانەکان	سەیری نموونە
21–18	1
25–22	2
27–26	3
31–28	4
35–32	5

ژمارەکە بەپێی i بنووسە.

18 $8\sqrt{-4}$ **19** $-\frac{1}{3}\sqrt{-90}$ **20** $6\sqrt{-12}$ **21** $\sqrt{-50}$

هاوکێشەکە شیکاربکە.

22 $x^2+49=0$ **23** $5x^2=-80$ **24** $3x^2+27=0$ **25** $\frac{1}{2}x^2=-32$

هەردوو بەهای x و y بدۆزەوە کە وادەکەن یەکسانیەکە دروست بێت.

26 $9x+yi-5=-12i+4$ **27** $5(x-1)+(3y)i=-15i-20$

سفرەکانی نەخشەکە بدۆزەوە.

28 $f(x)=x^2+2x+3$ **29** $g(x)=4x^2-3x+1$

30 $f(x)=x^2+4x+8$ **31** $g(x)=3x^2-6x+10$

ژمارەی ئاوەڵ بدۆزەوە. پاشان هاوکێشە دووجاکە کە ڕەگەکانی ئەم ژمارەو ئاوەڵەکەیتی بنووسەوە:

32 i **33** $-\frac{\sqrt{3}}{2}-2i$ **34** $-2.5i+1$ **35** $\frac{i}{10}-1$



36 چی دەبێت ئەگەر؟ لە یەکێك لە یارییەکانی شاری یاری پێویستە یاریکەرەکە چەندی لەتوانادابێت سپرنگێك ڕابکێشێت بۆئەوەی گۆیە ئاسنەکە بە ئاڕاستەی زەنگەکە هەڵبدات. یاریکەرەکە یارییەکە دەباتەوە ئەگەر گۆیەکە بەر زەنگەکە بکەوێت، نەخشەی $d(t)=16t^2-32t+18$ نموونەی هەژمارکردنی دووریە d بەپێ لەنێوان گۆ و زەنگەکە بە پێی ژمارەی چرکەکان t لەو کاتەوە کە یاریکەرەکە لەتوانایدایە یارییەکە بباتەوە؟

ڕەگی دووەمی ئەو هاوکێشە بدۆزەوە کەهاوکۆلکەکانی ڕاستین ئەگەر بزانی ژمارە پێدراوەکە یەکێکە لەڕەگەکانی

37 $1+14i$ **38** $\frac{5}{7}i$ **39** $4i-2\sqrt{5}$

40 $-12-i$ **41** $9-i\sqrt{2}$ **42** $-\frac{17}{3}i$

هەردوو بەهای c و d بدۆزەوە کە وادەکەن یەکسانییەکە دروست بێت

43 $2ci+1=-d+6-ci$ **44** $c+3ci=4+di$ **45** $c^2+4i=d+di$

هاوکێشەکە شیکاربکە.

46 $8x^2=-8$ **47** $\frac{1}{3}x^2=-27$ **48** $2x^2+12.5=0$

49 $\frac{1}{2}x^2+72=0$ **50** $x^2=-30$ **51** $2x^2+16=0$

52 $x^2-4x+8=0$ **53** $x^2+10x+29=0$ **54** $x^2-12x+44=0$

55 $x^2+2x=-5$ **56** $x^2+18=-6x$ **57** $-149=x^2-24x$

ئەم دەستەواژانەی خوارەوە هەمیشە دروستن یان هەندێك جار دروست نین یان هەمیشە نادروستن. ئەگەر هەندێك جار دروست بوون نموونەیەك بێنەوە پاڵپشتی وڵامەکەت بکات.

58 ژمارەیەکی ڕاستی، ژمارەیەکی خەیاڵییە. **59** ژمارەی خەیاڵی ژمارەیەکی ئاوێتەیە.

60 ژمارەی ڕێژەیی ژمارەیەکی ئاوێتەیە. **61** ژمارەی ئاوێتە ژمارەیەکی خەیاڵییە.

62 ژمارەیەکی ڕاستی، ژمارەیەکی ئاوێتەیە. **63** هاوکێشە دووجاکان ڕەگی ڕاستیان نیە.

64 هاوکێشەی دووجا ڕەگێکی ڕاستی و ڕەگێکی ئاوێتەی هەیە. **65** هاوکێشە دووجاکان ڕەگی ڕاستییان نیە.



زانای بیرکاری سویسری لیونارد ئۆلر *Euler* (1707–1783) یەکەم کەس بوو هێمای i بەکارهێنا بۆ $\sqrt{-1}$ وە $f(x)$ بەکارهێنا بۆ بەهای نەخشەی f کاتێك گۆڕاوی x گۆڕاوێکی ئازاد بێت.

سفرەکانی نەخشەکە بدۆزەوە.

66 $f(x)=x^2-10x+26$ **67** $g(x)=x^2+2x+17$ **68** $h(x)=x^2-10x+50$

69 $f(x)=x^2+16x+73$ **70** $g(x)=x^2-10x+37$ **71** $h(x)=x^2-16x+68$

72 بیری ڕەخنەگر ئایا دەتوانێت دوو سفری نەخشەی $f(x)=x^2+64$ بە ڕوونکردنەوەیی بدۆزیتەوە؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

73 بیری ڕەخنەگر ئەو ژمارە ئاوێتەیەی ئاوەڵی ژمارەیەکی ڕاستیە چییە؟



74 بنووسە ئەو ڕێگایە چییە بەکاریدێنیت بۆ شیکارکردنی هاوکێشەیەکی دووجا کە ڕەگی ڕاستی نییە؟

75 یاریکەرێك تۆپێکی بۆ سەرەوە لێدا نەخشەی $h(t)=-4.9t^2+40t$ نموونەیە کە بۆهەژمارکردنی بەرزی تۆپەکە بە مەتر لەدوای t چرکە لەکاتی لێدانیدا.

أ گۆڕەپانەکە سەقفێکی بەتۆڕی هەبێت بەرزیەکەی 72 مەتر بیت هاوکێشەی $-4.9t^2+40t=85$ شیکاربکە.

ب پشتبەستن بەوەی لە پرسیاری (أ) دا دۆزیتەوە ئایا تۆپەکە دەگاتە تۆڕەکە؟ ئەوە ڕوونبکەوە.

ج بەرزترین بەرزی چەندەکە تۆپەکە دەتوانێت بیگاتێ. بەپشت بەستن بە نموونەکە؟



76 كام لەمانە ئاوەڵی ژمارە ئاوێتەی $-2+i$ یە؟

ا) $2+i$ ب) $2-i$ ج) $i-2$ د) $-2-i$

77 كام لەمانە دەكاتە $\sqrt{-225}$ نوسراوە بەپێی i ؟

ا) $15i$ ب) $-15i$ ج) $i\sqrt{15}$ د) $-i\sqrt{15}$

78 كام لەمانە دوو سفری نەخشەی $f(x)=x^2-2x+17$ ؟

ا) $1\pm 4i$ ب) $4\pm i$ ج) $-1\pm 4i$ د) $-4\pm i$

79 كام بەها بۆ نەزانراوی c دا لەم یەكسانییە $3-4i-5=(9+ci)-11$ دروست بێت؟

ا) -2 ب) -4 ج) 2 د) 4

80 كام لەم هاوكێشانەی خوارەوە ئەم دوو ڕەگەی $-6i$ و $6i$ هەیە؟

ا) $-\frac{1}{6}x^2=6$ ب) $\frac{1}{4}x^2=9$ ج) $x^2-30=6$ د) $20-x^2=-16$

81 كورتە وەڵام جۆری شیكارەكانی ئەو هاوكێشانەی لەسەر شێوەی $x^2=a$ دەنوسرێت كاتێك $a>0$ و كاتێك $a<0$ ڕوونبكەوە؟

بەرەنگاری و بەرەپێدان

82 ژمارە ئاوێتەی $a+bi$ بدۆزەوە كاتێك $5a+3b=1$ و $-5b=7+4a$.

83 ئایا دەگونجێت هاوكێشەیەكی دووجا یەك ڕەگی ڕاستی هەبێت؟ یەك ڕەگی خەیاڵی هەبێت؟ یەك ڕەگی ئاوێتەی هەبێت؟

84 ئەنجامی هەر مەرجێك لەسەر شیكاركردنی هاوكێشەی $x^2+bx+c=0$ دیاریبكە.

ا) $b=0$ ب) $c\leq 0$ ج) $c>0$

د) كام مەرجە وا لەبەشی خەیاڵی شیكارەكە دەكات یەكسان نەبێت بە سفر؟

پێداچوونەوەی لوولپێچی

ئەم ڕیزكراوانەی خوارەوە بەكاربێنە بۆ شیكاری پرسیارەكانی 85 تا 88 هەژماریان بكە ئەگەر توانرا (وانەی 3—2)

$$S=\begin{bmatrix}1 & -5\\ -2 & 0\end{bmatrix},\quad T=\begin{bmatrix}-4 & 1 & -2\\ 0 & -3 & 1\\ 2 & -2 & 2\end{bmatrix},\quad V=\begin{bmatrix}10 & 1\\ 0 & -1\\ -5 & 5\end{bmatrix}$$

85 T^2 **86** TV **87** ST **88** S^2

بۆهەر نەخشەیەك: أ) دیاریبكە ئایا وێنە ڕونكردنەوەییەكەی لەسەرەوە بۆ خوارەوە دەكرێتەوە. ب) تەوەرەی هاوجێبوونی وێنە ڕونكردنەوەییەكەی بدۆزەوە. ج) سەری وێنە ڕوونكردنەوەییەكەی بدۆزەوە. د) یەكتربڕەكەی لەگەڵ تەوەرەی دووەم بدۆزەوە و وێنە ڕونكردنەوەییەكەی بكێشە. (پۆلەكانی پێشوو)

89 $f(x)=\frac{1}{5}x^2+x-10$ **90** $f(x)=-x^2+3$

91 $f(x)=2x^2+4x-3$ **92** $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+3x+1$

هاوكێشەكە بەشیتەڵكردن شیكاربكە (پۆلەكانی پێشوو)

93 $x^2+5x=14$ **94** $6x^2=-x+2$ **95** $4x^2+9=15x$

96 $4x^2=1$ **97** $x^2+11x=-24$ **98** $x^2=-7x$

7-3 کردارەکان لەسەر ژمارە ئاوێتەکان

Operations With Complex Numbers



- چوار کردارەکە لەسەر ژمارە ئاوێتەکان ئەنجام دەدات.

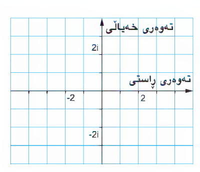
زاراوەکان
Vocabulary

ڕووتەختی ئاوێتە
Complexe plane

بەهای ڕووتی ژمارەی ئاوێتە
Absolute value of a complex number

بۆچی ئەمە فێردەبین؟

ژمارە ئاوێتەکان بەکاردەهێنرێن لەو ڕێسایانەی شێوە لەیەکبووەکان پێکدەهێنێت. (پرسیاری 84)



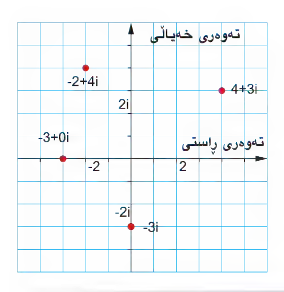
لەوانەکانی پێشوو ژمارە ڕاستییەکانت بە خاڵ لەسەر تەوەرەی ژمارەکان نواند. لەم وانەیەدا فێردەبیت چۆن ژمارە ئاوێتەکان لە ڕووتەختی پۆوتانەکاندا بە خاڵ بنوێنیت. **ڕووتەختی ئاوێتە Complex plane** ڕووتەختێکی پۆوتانە تەوەری یەکەمی کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان و تەوەری دووەمی ژمارە خەیاڵییەکان دەنوێنێت.

نموونــــە 1 نواندنی ژمارەی ئاوێتە:

هەریەك لەم ژمارە ئاوێتانە بە ڕوونکردنەوەیی بنوێنە.

أ $-3+0i$ ج $4+3i$

ب $-3i$ د $-2+4i$



ڕۆشنایی

تەوەری ڕاستی تەوەری یەکەمە و تەوەری خەیاڵی تەوەری دووەمە. بیربکەوە لە نموونەی $a+bi$. کە بریتییە لە $x + iy$



1. هەریەك لەم ژمارە ئاوێتانە بە ڕوونکردنەوەیی بنوێنە.

أ $3+0i$ ب $2i$ ج $-2-i$ د $3+2i$

لەبیرت بێت کە بەهای ڕووتی ژمارەیەکی ڕاستی دەکاتە ئەو دووریەی دەکەوێتە نێوان ئەو خاڵەی کە ژمارە دەنوێنێت لەسەر تەوەرەی ژمارەکان و خاڵی بنەڕەت لەسەر هەمان تەوەرە. هەمان ڕێگا بەکاردەهێنین بۆ پێناسەی **بەهای ڕووتی ژمارەی ئاوێتە Absolute value** کە بریتییە لەو دوورییەی نێوان ئەو خاڵەی ژمارەکە دەینوێنێت لە ڕووتەختی ئاوێتەکە و خاڵی بنەڕەت لەو ڕووتەختەدا.

فێربە — بەهای ڕووتی ژمارەی ئاوێتە

بەنووسین	بەجەبر	نموونە
بەهای ڕووتی ژمارەی ئاوێتەی $a+bi$ **Absolute value** دەکاتە دووری نێوان خاڵی (a, b) و خاڵی بنەڕەت لە ڕووتەختی پۆوتاندا. بەهای ڕووتی ژمارەی ئاوێتەی $a+bi$ بە شێوەی $\lvert a+bi\rvert$ دەنووسرێت.	$\lvert a+bi\rvert=\sqrt{a^2+b^2}$	$\lvert 3+4i\rvert=\sqrt{3^2+4^2}$ $=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

نموونــــه 2 هەژمارکردنی بەهای ڕووتی ژمارەی ئاوێتە

بەهای ڕووتی ئەم ژمارە ئاوێتانە هەژماربکە.

أ $|-9+i|$

$|-9+i|$

$\sqrt{(-9)^2+1^2}$

$\sqrt{81+1}=\sqrt{82}$

ب $|6|$

$|6+0i|$

$\sqrt{6^2+0^2}$

$\sqrt{36}=6$

ج $|-4i|$

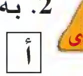
$|0-4i|$

$\sqrt{0^2+4^2}$

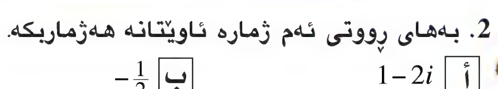
$\sqrt{16}=4$

خاڵی چاودێری

.2 بەهای ڕووتی ئەم ژمارە ئاوێتانە هەژماربکە.




أ $1-2i$ ب $-\frac{1}{2}$ ج $23i$



کۆکردنەوە و لێدەرکردنی ژمارە ئاوێتەکان هاوشێوەی کۆکردنەوە و لێدەرکردنی ئەو برە جەبریانەیە کە چەند ڕادەیەکی هاوشێوەی تێدایە. بۆ کۆکردنەوەی ژمارە ئاوێتەکان بەشە ڕاستییەکان بەیەکەوە و بەشە خەیاڵییەکانیش بەیەکەوە کۆدەکرێنەوە.

کردارەکانی کۆکردنەوە و لێدەرکردن و لێکدان لە کۆمەڵەی ژمارە ئاوێتەکان هەمان سیفەتەکانی ئەو کردارانەیان هەیە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان. بۆیە دەتوانیت سیفەتەکانی ئاڵوگۆڕ و یەکتربەستن و بەشینەوە بەکاربهێنیت بۆ نووسینی برە ئاوێتەکان بە سادەترین شێوە.

نموونــــه 3 کۆکردنەوە و لێدەرکردنی ژمارە ئاوێتەکان



کۆبکەوە یان دەربکە. ئەنجامەکە لەسەر شێوەی $a+bi$ بنووسە.

أ $(3-11i)+(-2+4i)$ — دووبەشە ڕاستیەکە بە جیاو دووبەشە

$(3-2)+(-11i+4i)$ — خەیالیەکە بە جیا کۆبکەوە

$1-7i$

ب $(4-i)-(5+8i)$ — بەشینەوە بکە

$(4-i)-5-8i$ — هەردوو بەشە ڕاستیەکە کۆبکەوە

$(4-5)+(-i-8i)$ — هەروەها دووبەشە خەیالیەکە

$-1-9i$

ج $(6-2i)+(-6+2i)$ — دووبەشە ڕاستیەکە کۆبکەوە هەروەها

$(6-6)+(-2i+2i)$ — دووبەشە خەیالیەکە.

$0+0i$

0

د $(10+3i)-(10-4i)$ — بە شینەوەبکە

$(10+3i)-10-(-4i)$ — دووبەشە ڕاستیەکە کۆبکەوە،

$(10-10)+(3i+4i)$ — هەروەها دووبەشە خەیالیەکە

$0+7i=7i$

ڕۆشنایی

ژمارەی ئاوێتەی $a+bi$ دژە کۆیەکەی دەکاتە $-a-bi$

خاڵی چاودێری

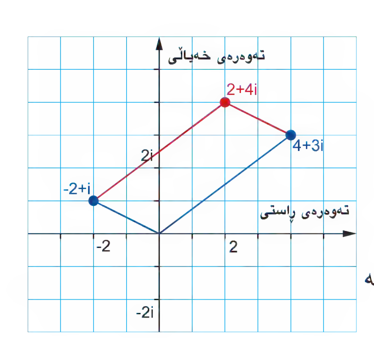
.3 کۆبکەوە یان دەربکە. ئەنجامەکە بە شێوەی $a+bi$ بنووسە.

أ $(-3+5i)+(-6i)$ ب $2i-(3+5i)$ ج $(4+3i)+(4-3i)$

دەتوانیت ژمارە ئاوێتەکان کۆبکەیتەوە بە بەکارهێنانی ڕووتەختی پۆوتان.

نموونــــە 4 کۆکردنەوەی ژمارە ئاوێتەکان لەسەر ڕووتەختی ئاوێتە

سەرجەمی $(4+3i)+(-2+i)$ بەڕوونکردنەوەیی بدۆزەوە.



هەنگاوی 1 هەردوو ژمارەی ئاوێتەی $4+3i$ و $-2+i$ لە ڕووتەختی ئاوێتەکەدا بەڕوونکردنەوەیی دیاریدەکەین. بە پارچە ڕاستەهێڵێك هەر خاڵێکیان دەگەیەنین بە خاڵی بنەڕەت.

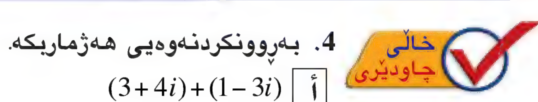
هەنگاوی 2 لاتەریبەکە تەواوبکە. سەری چوارەمی لاتەریبەکە بریتییە لە کۆی دوو ژمارە ئاوێتەکە دەکاتە $2+4i$

کەواتە $(4+3i)+(-2+i)=2+4i$

ساغکردنەوە دوو ژمارە ئاوێتەکە کۆدەکەینەوە. بەشی ڕاستی بەیەکەوە و بەشە خەیاڵییەکانیش بەیەکەوە. $(4+3i)+(-2+i)=(4-2)+(3i+i)=2+4i$

خاڵی چاودێری

4. بەڕوونکردنەوەیی هەژماربکە.

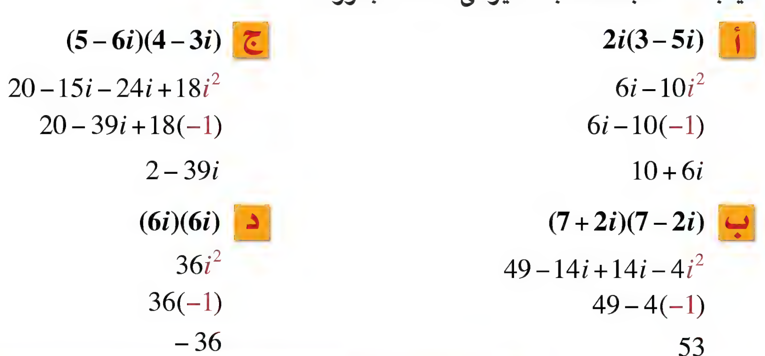


أ $(3+4i)+(1-3i)$ ب $(-4-i)+(2-2i)$

دەتوانیت ژمارە ئاوێتەکان لێکبدەیت بە بەکارهێنانی بەشینەوە. بە ڕەفتارکردن لەگەڵ بەشە خەیاڵییەکان وەك ڕادە لەیەکچووەکان. بە گۆڕینی i^2 بە ژمارە -1 لەهەر شوێنێکدا هەبوو.

نموونــــە 5 لێکدانی ژمارە ئاوێتەکان

لێکبدە. ئەنجامەکە بە شێوەی $a+bi$ بنووسە.



أ $2i(3-5i)$

$6i-10i^2$

$6i-10(-1)$

$10+6i$

ب $(7+2i)(7-2i)$

$49-14i+14i-4i^2$

$49-4(-1)$

53

ج $(5-6i)(4-3i)$

$20-15i-24i+18i^2$

$20-39i+18(-1)$

$2-39i$

د $(6i)(6i)$

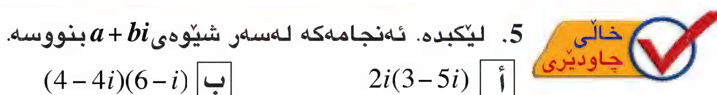
$36i^2$

$36(-1)$

-36

خاڵی چاودێری

5. لێکبدە. ئەنجامەکە لەسەر شێوەی $a+bi$ بنووسە.



أ $2i(3-5i)$ ب $(4-4i)(6-i)$ ج $(3+2i)(3-2i)$

دەتوانیت هێزەکانی یەکەی خەیاڵی i بدۆزیتەوە. وەك چۆن لەم خشتەیەی خوارەوەدا ڕوونکراوەتەوە.

هێزەکانی ژمارە i		
$i^1=i$	$i^5=i^4\times i=1\times i=i$	$i^9=i$
$i^2=-1$	$i^6=i^4\times i^2=1\times(-1)=-1$	$i^{10}=-1$
$i^3=i^2\times i=(-1)\times i=-i$	$i^7=i^4\times i^3=1(-i)=-i$	$i^{11}=-i$
$i^4=i^2\times i^2=(-1)(-1)=1$	$i^8=i^4\times i^4=1\times1=1$	$i^{12}=1$

ڕۆشنایی

سەرنج بدە ئەو شێوازەی دووبارەبوونەوە لەهەر ڕیزێك یارمەتیت دەدات بۆ هەژماری هەر هێزێك لە هێزەکانی ژمارە i کە بریتییە لە ژمارەکانی i ، -1 ، $-i$ ، 1

نموونــــــە 6 هەژماری هێزەکانی ژمارە i

أ $-3i^{12}$ بە سادەترین شێوە بنووسە.

$$-3i^{12}=-3\left(i^2\right)^6$$
$$=-3(-1)^6=-3\times1=-3$$

ب i^{25} بە سادەترین شێوە بنووسە.

$$i^{25}=i\times i^{24}$$
$$=i\left(i^2\right)^{12}$$
$$=i(-1)^{12}=i\times1=i$$



6. ئەمانە بە سادەترین شێوە بنووسە.

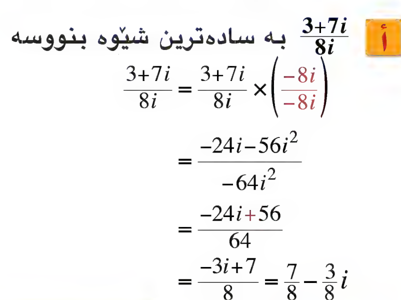
أ $\frac{1}{2}i^7$ ب i^{42}

بیربکەوە ئەو بڕەی بە سادەترین شێوە دەینووسێت نابێت ژێرەکەی ڕەگی تێدابێت. لەبەرئەوەی i ڕەگێکی دووجایە بۆیە نووسینی بڕێکی ئاوێتە بە سادەترین شێوە پێویست دەکات ژێرەکەی ڕزگار بکەین لە i بە ڕێژەیی کردنی ژێرە. بە لێکدانی سەرە و ژێرە لە ئاوەڵی ئەو ژمارە ئاوێتەیەی کە لە ژێرە دایە.



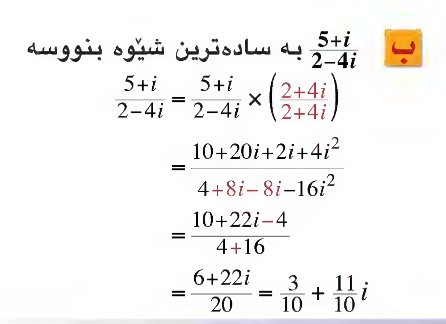
دابەشکردنی ژمارە ئاوێتەکان

أ $\frac{3+7i}{8i}$ بە سادەترین شێوە بنووسە



$$\frac{3+7i}{8i}=\frac{3+7i}{8i}\times\left(\frac{-8i}{-8i}\right)$$
$$=\frac{-24i-56i^2}{-64i^2}$$
$$=\frac{-24i+56}{64}$$
$$=\frac{-3i+7}{8}=\frac{7}{8}-\frac{3}{8}i$$

ب $\frac{5+i}{2-4i}$ بە سادەترین شێوە بنووسە



$$\frac{5+i}{2-4i}=\frac{5+i}{2-4i}\times\left(\frac{2+4i}{2+4i}\right)$$
$$=\frac{10+20i+2i+4i^2}{4+8i-8i-16i^2}$$
$$=\frac{10+22i-4}{4+16}$$
$$=\frac{6+22i}{20}=\frac{3}{10}+\frac{11}{10}i$$



7. ئەمانە بە سادەترین شێوە بنووسە.

أ $\frac{3+8i}{-i}$ ب $\frac{3-i}{2-i}$

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. ڕوونیبکەوە کەی ژمارەی ئاوێتەی $a+bi$ و ئاوەڵەکەی یەکسان دەبن؟
2. ئەنجامی لێکدانی $(a+bi)(c+di)$ بدۆزەوە بەشی ڕاستی و خەیاڵی ئەنجامەکەی دیاریبکە.
3. ڕێکخەرە ئەم هێڵکارییە دروست بکە و پاشان تەواوی بکە. لەهەر چوارچێوەیەکدا نموونەیەکی گونجاو دابنێ.



کۆکردنەوە	بەهای ڕووت
ژمارە ئاوێتەکان	
ژمارەی ئاوەڵ	لێکدان

7-3 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** لە ڕووتەختی ئاوێتە دا تەوەری یەکەم ژمارەی ——— دەنوێنێت، بەڵام تەوەری دووەم ژمارەی ——— دەنوێنێت. (ڕاستی، ڕێژەیی، خەیاڵی).

بڕوانە نموونە 1
ئەم ژمارە ئاوێتەیە بە ڕوونکردنەوەیی بنوێنە.

2 4 **3** $-i$ **4** $3+2i$ **5** $-2-3i$

بڕوانە نموونە 2
بەهای ڕووت بدۆزەوە.

6 $|4-5i|$ **7** $|-33.3|$ **8** $|-9i|$ **9** $|5+12i|$ **10** $|-1+i|$ **11** $|15i|$

بڕوانە نموونە 3
کۆبکەوە یان لێدەربکە. ئەنجامەکە بە شێوەی $a+bi$ بنووسە.

12 $(2+5i)+(-2+5i)$ **13** $(-1-8i)+(4+3i)$
14 $(1-3i)-(7+i)$ **15** $(4-8i)+(-13+23i)$
16 $(6+17i)-(18-9i)$ **17** $(-30+i)-(-2+20i)$

بڕوانە نموونە 4
بە ڕوونکردنەوەیی سەرجەم بدۆزەوە.

18 $(3+4i)+(-2-4i)$ **19** $(-2-5i)+(-1+4i)$ **20** $(-4-4i)+(4+2i)$

بڕوانە نموونە 5
لێکبدە. ئەنجامەکە بە شێوەی $a+ib$ بنووسە.

21 $(1-2i)(1+2i)$ **22** $3i(5+2i)$ **23** $(9+i)(4-i)$
24 $(6+8i)(5-4i)$ **25** $(3+i)^2$ **26** $(-4-5i)(2+10i)$

بڕوانە نموونە 6
ئەمانە بە سادەترین شێوە بنووسە.

27 $-i^9$ **28** $2i^{15}$ **29** i^{30}

بڕوانە نموونە 7
دابەشبکە. ئەنجامەکە بە شێوەی $a+ib$ بنووسە.

30 $\frac{5-4i}{i}$ **31** $\frac{11-5i}{2-4i}$ **32** $\frac{8+2i}{5+i}$
33 $\frac{17}{4+i}$ **34** $\frac{45-3i}{7-8i}$ **35** $\frac{-3-12i}{6i}$

ڕاهێنان و شکیارکردنی پرسیارەکان

ئەم ژمارە ئاوێتانە بە ڕوونکردنەوەیی بنوێنە.

36 -3 **37** $-2.5i$ **38** $i+1$ **39** $4-3i$

بەهای ڕووت بدۆزەوە.

40 $|2+3i|$ **41** $|-18|$ **42** $\left|\frac{4}{5}i\right|$ **43** $|6-8i|$ **44** $|-0.5i|$ **45** $|10-4i|$

ڕاهێنانی ئازاد

بۆشیکارکردنی پرسیارەکان	تەماشای نموونە
39-36	1
45-40	2
51-46	3
54-52	4
60-55	5
63-61	6
69-64	7

کۆبکەوە یان دەربکە. ئەنجامەکە بە شێوەی $a+bi$ بنووسە.

46 $(8-9i)-(-2-i)$ **47** $4i-(11-3i)$ **48** $(4-2i)+(-9-5i)$

49 $(13+6i)+(15+35i)$ **50** $(3-i)-(-3+i)$ **51** $-16+(12+9i)$

سەرجەم بە ڕوونکردنەوەیی بدۆزەوە.

52 $(4+i)+(-3i)$ **53** $(5+4i)+(-1+2i)$ **54** $(-3-3i)+(4-3i)$

لێکبدە. ئەنجامەکە بەشێوەی $a+ib$ بنوسە.

55 $-12i(-1+4i)$ **56** $(3-5i)(2+9i)$ **57** $(7+2i)(7-2i)$

58 $(5+6i)^2$ **59** $(7-5i)(-3+9i)$ **60** $-4(8+12i)$

بە سادەترین شێوە بنووسە.

61 i^{27} **62** $-i^{11}$ **63** $5i^{10}$

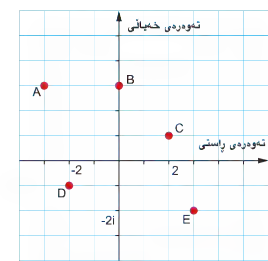
دابەشبکە. ئەنجامەکە بە شێوەی $a+ib$ بنووسە.

64 $\frac{2-3i}{i}$ **65** $\frac{5-2i}{3+i}$ **66** $\frac{3}{-1-5i}$

67 $\frac{19+9i}{5+i}$ **68** $\frac{8+4i}{7+i}$ **69** $\frac{6+3i}{2-2i}$

ئەو ژمارە ئاوێتەیە بنووسە کە خاڵەکە دەینوێنێت.

70 A **71** B **72** C **73** D **74** E



بەهای ڕووتی ژمارە ئاوێتەکە بدۆزەوە.

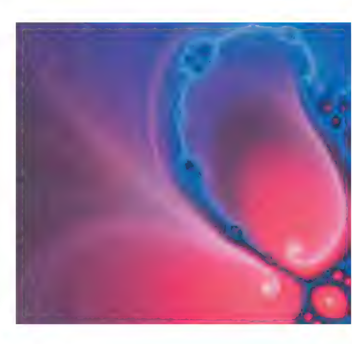
75 $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$ **76** $7i$ **77** $2\sqrt{2}-i\sqrt{3}$ **78** $-1-8i$

دەروازەیەک

شێوە لەیەکبووەکان

شێوەی لەیەکبووەکان Fractal شێوەیەکە یەک لەیەکتری پەیدادەبن لەسەر هەمان شێواز واتە بەشەکانی شێوەکە هاوشێوەی شێوە گشتییەکەیە. لە سروشتدا وێنە لەیەکبووەکان زۆرن وەک دەماری گەڵاکانی درەختێك کلوە بەفرەکانی بەدوای یەکدا دەبارن. زاناکان شێوە لەیەکبووەکان بەکاردەهێنن بۆ دروستکردنی نموونە لەم چەشنانە.

79 شێوە لەیەکبووەکان **Fractals** شێوە لەیەکبووەکان شێوازێکن لە بەکارهێنانی ژمارە ئاوێتەکان و دووبارەکردنەوەی یاسا بیرکارییەکان پەیدادەبن. ژمارەی یەکەم لە یاساکەدا لە جیاتییەکە پاشان ئەنجامەکە بدۆزەوە. ئەنجامەکە جارێکی تر لە یاساکەدا لە جیاتی بکەوە . . . و هەروەها دەتوانرێت هەر ژمارەیەکی ئاوێتە کە لەم کردارە دووبارەبووەیە دەستمان دەکەوێت بەکاربهێنرێت بۆ دیاریکردنی ڕەنگی بیکسل (یان خاڵ) لەسەر شاشەی بژمێرەکە، وێنەی بەرامبەر نموونەیەك ڕووندەکاتەوە لەوەی دەستمان دەکەوێت. زۆر لە شێوازەکانی شێوە لە یەکبووەکان پشت دەبەستن بە یاسای کۆمەڵەی جولیا Julia کە بریتیە لە $Z_{n+1}=(Z_n)^2+c$ کاتێك c ژمارەیەکی نەگۆڕبێت، یاسای کۆمەڵەی جولیا بەکاربێنە کاتێك $c=0.25$



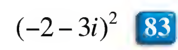
أ Z_2 هەژماربکە ئەگەر بزانیت $Z_1=0.5+0.6i$

ب Z_3 هەژماربکە بە بەکارهێنانی ژمارەی Z_2 کە لە لقی أ دۆزیتەوە.

ج Z_4 هەژماربکە بە بەکارهێنانی ژمارەی Z_3 کە لە لقی ب دۆزیتەوە.

دوای سادەکردن بڕە ئاوێتەکە بە شێوەی $a+ib$ بنووسە.

80 $6i-(4+5i)$ **81** $(-2.3+i)-(7.5-0.3i)$ **82** $(6-5i)^2$



83 $(-2-3i)^2$ **84** $(5+7i)(5-7i)$ **85** $(2-i)(2+i)(2-i)$

86 $3-i^{11}$ **87** $i^{52}-i^{48}$ **88** $i^{35}-i^{24}+i^{18}$

89 $\frac{12+i}{i}$ **90** $\frac{18-3i}{i}$ **91** $\frac{4+2i}{6+i}$

92 $\frac{1+i}{-2+4i}$ **93** $\frac{4}{2-3i}$ **94** $\frac{6}{\sqrt{2}-i}$

هەنگاوی جۆراوجۆر تەوژمی كارەبا كاتێك بە تەنێكی دیاریكراودا دەڕوات ڕووبەڕووی بەرگرییەك دەبێتەوە كە بەئۆم دەپێورێت. ئەندازیارە كارەباییەكان بینیان كە ئەم بەرگرییە بە Z دەردەبڕێت، بە بەكارهێنانی ژمارە ئاوێتەكان زانایانی فیزیا وای دادەنێن كە ئەم بەرگرییە گشتییە بۆ سوڕێكی كارەبایی پێكدێت لە دوو سووڕی هاوڕێك بەرگرییەكانیان Z_1 و Z_2 ن هاوتای بەرگری سووڕێكی كارەباییە. كە بەرگریەكەی $Z_{eq}=\frac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}$

Z_1, Z_2, 12V

95 بەرگری گشتی سووڕە كارەباییەكە بدۆزەوە كە لەدوو سووڕی هاوڕێك پێكهاتوون بەرگرییەكەیان $Z_1=3+2i$ و بەرگری دووەمیان $Z_2=1-2i$

96 بەرگری گشتی سووڕە كارەباییەكە بدۆزەوە كە لەدوو سووڕی هاوڕێك پێكهاتوون بەرگری یەكەمیان $Z_1=2+2i$ و بەرگری دووەمیان $Z_2=4-i$

ڕوونیبكەوە دەستەواژەكە هەمیشە دروستە یان هەندێك جار دروستە یان هەمیشە نادروستە. ئەگەر دەستەواژەكە هەندێك جار نادروست بوو نمونەیەك بهێنەوە لەسەر بارێك كەتێیدا دروست بێت، نموونەیەكی تر لەسەر ئەو بارەی كە تێیدا نادروستە. ئەگەر دەستەواژەكە هەمیشە نادروست بوو نموونەیەك بهێنەوە هەمیشە نادروست بێت بۆ پاڵپشتی وەڵامەكەت.

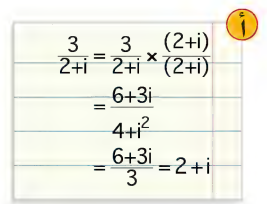
97 سەرجەمی هەر ژمارەیەكی ئاوێتە $a+bi$ و ئاوەڵەكەی ژمارەیەكی ڕاستییە.

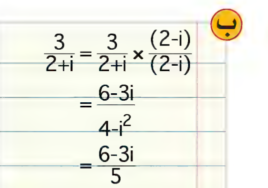
98 جیاوازی نێوان ژمارەیەكی ئاوێتە $a+bi$ $(b\neq0)$ و ئاوەڵەكەی ژمارەیەكی ڕاستییە.

99 ئەنجامی لێكدانی ژمارەیەكی ئاوێتە $a+bi$ $(b\neq0)$ لە ئاوەڵەكەی ژمارەیەكی ڕاستی موجەبە.

100 ئەنجامی لێكدانی ژمارەیەكی خەیاڵی bi $(b\neq0)$ لە یەكێكی تر di $(d\neq0)$ ژمارەیەكی ڕاستی موجەبە.

101 **هەڵە لە شیكردنەوە** ئەمەی خوارەوە دوو هەوڵدانە بۆ نووسینی ژمارە ئاوێتەی $\frac{3}{2+i}$ بە سادەترین شێوە. كام هەوڵیان هەڵەیە؟ هەڵەكە ڕوونبكەوە.





102 **بیری ڕەخنەگر** بۆچی بەهای ڕووتی ژمارەی ئاوێتە یەكسانە بە بەهای ڕووتی ئاوەڵەكەی؟ نواندنی ڕوونكردنەوەیی بەكاربێنە بۆ ڕوونكردنەوەی وەڵامەكەت.

103 **بنوسە** لە پەیوەندی نێوان جیاوازی نێوان دوو دووجا و $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ و ئەنجامی لێكدانی ژمارەیەكی ئاوێتە و ئاوەڵەكە بكۆڵەوە.

104 فێربوویت چۆن دوو ژمارەی ئاوێتە بە ڕوونكردنەوەیی كۆبكەیتەوە.

المحور التخيلي, 4+4i, المحور الحقيقي, -2, 2, -2i

أ سێ جووت ژمارەی ئاوێتە بدۆزەوە كەسەرجەمی هەرجوتێك بكاتە $4+4i$

ب كرداری كۆكردنەوەی هەریەكەیان لەهەمان ڕووتەختی ئاوێتە بەڕوونكردنەوەیی بنوێنە.

ج ئەوەی دەستتكەوتووە باسیبكە.

وێنەی ڕوونکردنەوەیی بەرامبەر بەکاربێنە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی 105 و 106.

105 کام خاڵ لە وێنەکە ژمارەی ئاوێتەی $1-2i$ دەنوێنێت.

(أ) خاڵی A (ب) خاڵی B (ج) خاڵی C (د) خاڵی D

106 ئەو ژمارە ئاوێتەیەی کە خاڵی E دەینوێنێت کامەیە.

(أ) -2 (ب) 2 (ج) $-2i$ (د) $2i$

107 کام لەم ژمارە ئاوێتانەی خوارەوە سادەترین شێوەی بڕی $(2-5i)-(2+5i)$ ـە؟

(أ) $10i$ (ب) $4+10i$ (ج) $-10i$ (د) $4-10i$

108 کام لەم ژمارە ئاوێتانەی خوارەوە سادەترین شێوەی بڕی $(-5+3i)^2$ ـە؟

(أ) $16-15i$ (ب) $16-30i$ (ج) $34-15i$ (د) $34-30i$

بەرەنگاری و فراوانکردن

109 ئەوەی فێری بوویت لە هێزەکانی یەکەی خەیاڵی i بەکاربێنە بۆ شیکاری ئەم پرسیارە.

(أ) ئەم خشتەیەی خوارەوە تەواوبکە و شێوازێك پوختەبکە.

$i^{1}=$ ▒	$i^{0}=$ ▒	$i^{-1}=$ ▒	$i^{-2}=$ ▒	$i^{-3}=$ ▒	$i^{-4}=$ ▒	$i^{-5}=$ ▒

(ب) ئەو شێوازەی دەستتکەوتووە پەیوەندی بە هێزەکانی توانی سالبی یەکەی خەیاڵی i ەوە هەیە ڕوونبکەوە. ئەو بەهایانەی کە لەتوانادایە ئەم هێزانە وەریبگرن چین؟

(ج) i^{-12} و i^{-37} و i^{-90} بەسادەترین شێوە بنووسە.

شێوەی گشتی ئەنجامی هەریەکە لەم دووکردارەی خوارەوەی سەر ژمارە ئاوێتەکە بنووسە:

110 $(a+bi)(c+di)$

111 $\frac{a+bi}{c+di}$

پێداچوونەوەی لوولپێچی

112 پارە ئەم خشتەیەی خوارەوە خەرجی هەفتانەی خواردنی بەیانیانی دڵسۆز دەنوێنێت لەماوەی هەفتەدا. پێدراوەکان بە ڕوونکردنەوەیی بنوێنە ڕاستەهێڵی نزیکترین نواندن بۆئەم خاڵانە بکێشە و هاوکێشەکەی بنووسە. (وانەکە)

ژمارەی ژەمەکان	5	7	3	5	6	2	4	5
تێچوون بەهەزاران دینار	10	13	8	9	8	5	10	11

لاسەنگەکە بە جەبری شیکاربکە.

113 $3x^2-6x\leq 0$

114 $10<x^2-4x-11$

115 $-6\geq 2x^2+7x-21$

116 $3-x^2<7-5x$

دیاریبکە ئەم نەخشانە نەخشەیەکی دووجا دەنوێنن یان نا ڕوونیبکەوە.

117

x	-2	-1	0	1
y	5	-1	-3	-1

118

x	0	2	4	6
y	18	10	2	-6

بەشی 3

ڕێبەری خوێندن: پێداچوونەوە

$$Q=\begin{bmatrix}2&3\\4&5\end{bmatrix} ، P=\begin{bmatrix}3&-5&2\\-4&1&3\end{bmatrix}$$

$$R=\begin{bmatrix}6&-8&4\\-10&2&4\end{bmatrix}$$

بڕەکە بدۆزەوە ئەگەر توانرا.

1 $P-2Q$ **2** $0.2Q$

3 $\frac{1}{2}R-\frac{1}{3}P$ **4** $\frac{1}{2}(2P+R)$

پێدراوەکانی خوارەوە بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی پرسیاری 5 تا 7

لە هەڵمەتی پاککردنەوەی سەیرانگایەك خوێندکارانی پۆلی یازدەهەم 125 قووتوی ساردی و 45 کارتۆنیان کۆکردەوە. خوێندکارانی پۆلی دە 95 قووتوی ساردی و 65 کارتۆنیان کۆکردەوە.

5 ڕیزکراوەی A بەکاربێنە بۆ پیشاندانی پێدراوەکانی سەرەوە

6 ڕیزکراوەی D بنووسە جیاوازی کۆکردنەوەی هەردوو پۆلەکە دەربخا

7 لە ڕۆژی داهاتودا هەرپۆلێك دووئەوەندەی لەهەر جۆرێکی ڕۆژی یەکەم کۆکردەوە. ڕیزکراوەیەك بنووسە ئەمە ڕونبکاتەوە.

أ پێدراوەکانی هەر خشتەیەك لەڕیزکراوەیەك ڕێکبخە.

ب لێکدانی ڕیزکراوەکان بەکاربێنە بۆدۆزینەوەی داهاتی ڕۆژانە.

ج داهاتی ڕۆژانەی فرۆشتنی بلیتی گەورە و فرۆشتنی بلیتی منداڵان بدۆزەوە.

$$C=\begin{bmatrix}4&0&1\\0&2&1\\-1&1&3\end{bmatrix} ، B=\begin{bmatrix}0&1&3\\-2&-1&4\end{bmatrix} ، A=\begin{bmatrix}-1&2\\0&-2\\-3&1\end{bmatrix}$$

بڕەکە بدۆزەوە ئەگەر پێناسەکراوبوو.

8 AB **9** CA **10** AC **11** BC

12 A^2 **13** C^2 **14** $(BA)^2$

15 ئەم دوو خشتەیەی خوارەوە نرخی بلیتەکان بە دینار فرۆشراوەکانی سێ ڕۆژ ڕووندەکاتەوە.

نرخی بلیتەکان		
	گەورە	منداڵ
سێشەممە	5 000	2 500
چوارشەممە	7 500	4 250
پێنجشەممە	9 000	5 750

بلیتە فرۆشراوەکان			
	سێشەممە	چوارشەممە	پێنجشەممە
گەورە	67	196	245
منداڵ	104	75	154

ڕیزکراوەکان بەکاربێنە بۆدۆزینەوەی وێنەی چوارلای $A(-2,-1)$، $B(-1,3)$، $C(2,4)$، $D(0,0)$ بەپێی ئەم جێگۆڕکێیانە:

16 ڕاکێشانی 2 یەکە بۆلای ڕاست و یەك یەکە بۆسەرەوە

17 گەورەکردنی چوارلایەکە بە هاوکۆلکەی 1.5

18 بە بەکارهێنانی ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$ باسی جێگۆڕکێکە بکە

19 بە بەکارهێنانی ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$ باسی جێگۆڕکێکە بکە

20 ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$ بەکاربێنە بۆ جێگۆڕکێی سێگۆشەی $A(-1,-2)$ ، $B(0,1)$ ، $C(3,-2)$ وێنەی سێگۆشەکە و وێنەی شێوەکەی بکێشە. جۆری جێگۆڕکێکە دیاربکە.

سنوردەری ڕیزکراوەکە بدۆزەوە.

21 $\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}$ **22** $\begin{bmatrix}3&2\\6&4\end{bmatrix}$

23 $\begin{bmatrix}-0.5&3\\-1&6\end{bmatrix}$ **24** $\begin{bmatrix}4&0&1\\0&2&1\\-1&1&3\end{bmatrix}$

25 $\begin{bmatrix}2&3&-1\\-1&5&3\\3&-1&-6\end{bmatrix}$ **26** $\begin{bmatrix}3&2&-1\\5&-3&2\\9&-13&8\end{bmatrix}$

ڕێسای کرامەر بەکاربێنە بۆ شیکارکردنی هەر سیستمێکی هێڵی.

27 $\begin{cases}x+y=9\\x-y=1\end{cases}$ **28** $\begin{cases}2x+5y+21=0\\7y+47=6x\end{cases}$

29 $\begin{cases}4.5x+3y=10.5\\3x+2y=7\end{cases}$ **30** $\begin{cases}5x-8y=7+7z\\6x-4y+10z=-34\\2x+4y=29+3z\end{cases}$

31 $\begin{cases}x-y+z=5\\y-x-z=2\\x-y+z=7\end{cases}$ **32** $\begin{cases}y-2.4x=0.8\\3x+0.5z=2.25\\3.5y+z=8.5\end{cases}$

33 خاڵی یەکتربڕینی دووڕاستەهێڵی $2x+3y=8$ و $y=x+1$ بدۆزەوە

أ ڕیزکراوەی هاوکۆلکەکان بنووسە سنوردەرەکەی هەژماربکە

ب سیستمەکە شیکاربکە بە بەکارهێنانی ڕیسای گرامر

هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەکە بدۆزەوە.

34 $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

35 $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

36 $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2.5 \end{bmatrix}$

37 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

38 $\begin{bmatrix} -1.5 & 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0.5 \end{bmatrix}$

39 $\begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -1 \end{bmatrix}$

سیستمە هێڵییەکە بە بەکارهێنانی ڕیزکراوەکان بنووسە. پاشان شیکاریان بکە.

40 $\begin{cases} \frac{3}{2}x = 20 + y \\ x + 6y = 80 \end{cases}$

41 $\begin{cases} x = 1 + y \\ x + y = 9 \end{cases}$

42 $\begin{cases} 2x + 9 = 2z \\ 5x + y + 32 = 7z \\ 2(3x + y) = 8z - 39 \end{cases}$

43 $\begin{cases} 2x + 9 = 2z \\ 5x + y + 32 = 7z \\ 2(3x + y) = 8z - 39 \end{cases}$

44 دوکانێکی فرۆشتنی دیارییەکان دیاری بۆ کڕیارەکانی پێشکەش دەکات. دیارییەکی بچووك کە نرخەکەی 5000 دینارە دەدات بەو کڕیارەی کە بەهای کڕینەکانی لە نێوان 000 25 دینار و 999 74 دینار دایە. دیارییەکی مام ناوەندی 000 8 دیناری دەدات بەو کڕیارەی کە بەهای کڕینەکانی لەنێوان 000 75 و 999 149 دینارە دیارییەکی گەورە کە بەهای 500 12 دینارە پێشکەش بەو کڕیارە دەکات کە بەهای کڕینەکەی لە 000 150 دینار کەمتر نەبێت. دوکانەکە دیاری پێشکەش کرد کە بەهایان گەیشتە 102 دینار. ژمارەی دیارییە بچووکەکان 6 ئەوەندی ژمارەی دیارییە گەورەکان بوو.

أ سیستمی هاوکێشەکان بنووسە ئەم پرسیارە دەرببڕێت.

ب ڕێسای گرامەر بەکاربێنە بۆ شیکاری سیستمەکە و دیاریکردنی ژمارەی دیارییەکان لەهەر جۆرێك.

هاوکێشەکە شیکاربکە.

45 $x^2 = -81$

46 $6x^2 + 150 = 0$

47 $x^2 + 6x + 10 = 0$

48 $x^2 + 12x + 45 = 0$

49 $x^2 - 14x + 75 = 0$

50 $x^2 - 22x + 133 = 0$

ئاوەڵی ژمارە ئاوێتەکە بدۆزەوە.

51 $5i - 4$

52 $3 + i\sqrt{5}$

بەهای ڕووت هەژماربکە.

53 $|-3i|$

54 $|4 - 2i|$

55 $|12 - 16i|$

56 $|7i|$

بڕەکە لەسەر شێوەی $a+bi$ بنووسە.

57 $(1+5i)+(6-i)$

58 $(9+4i)-(3+2i)$

59 $(5-i)-(11-i)$

60 $-5i(3-4i)$

61 $(5-2i)(6+8i)$

62 $(3+2i)(3-2i)$

63 $(4+i)(1-5i)$

64 $(-7+4i)(3+9i)$

65 i^{32}

66 $-5i^{21}$

67 $\frac{2+9i}{-2i}$

68 $\frac{5+2i}{3-4i}$

69 $\frac{-12+26i}{2+4i}$

70 $\frac{8-4i}{1+i}$

بەشی 3



پێدراوەکانی خشتەکە بەکاربێنە بۆشیکارکردنی پرسیاری 1 تا 4

	خەڵاتەکان			
	پلەی یەکەم	پلەی دووەم	پلەی سێیەم	کۆی خاڵەکان
ڤیان	5	1	2	41
شاناز	3	5	1	42
شیرین	3	1	4	29

1 ڕیزکراوەیەك بەکاربێنە پێدراوەکانی خشتەکە دەربخات

2 جۆری ڕیزکراوەکە چییە؟

3 بەهای دانەی a_{31} چەندە؟

4 ناونیشانی ئەو دانەیەی بەهایەکەی 2 چەندە؟

ڕیزکراوەکان لە پرسیاری 5 تا 10 بەکاربێنە ئەنجامەکان هەژماربکە ئەگەر توانرا.

$$E=\begin{bmatrix}2&3\\-1&0\\4&1\end{bmatrix},\ F=\begin{bmatrix}4&-2&0\\-1&1&-2\end{bmatrix},\ G=\begin{bmatrix}2&-1\\3&1\end{bmatrix}$$

$$H=\begin{bmatrix}-2&1\\3&0\\5&-1\end{bmatrix},\ J=\begin{bmatrix}1&-5&6\end{bmatrix},\ K=\begin{bmatrix}7\\0\\-2\end{bmatrix}$$

5 $E+F$ 6 EF 7 FE

8 H^2 9 G^3 10 FK

ڕیزکراوە بەکاربێنە بۆ جیگۆڕکێی سێگۆشەی PQR بە جیگۆڕکێی دیاریکراو (جیگۆڕکێی سنوردار).

11 ڕاکێشانی دوو یەکە بۆ سەرەوە یەك یەکە بۆلای ڕاست.

12 گەورەکردنێك بە هاوکۆلکەی $\frac{3}{2}$

13 جیگۆڕکێکردن بە $\begin{bmatrix}0&2\\2&0\end{bmatrix}$ ڕیزکراوەی و وێنەکەی باسبکە.

سنووردەری ڕیزکراوەکە بدۆزەوە.

14 $\begin{bmatrix}4&0\\0&-3\end{bmatrix}$ 15 $\begin{bmatrix}0.25&1\\2&8\end{bmatrix}$

16 $\begin{bmatrix}3&-1\\-2&-1\end{bmatrix}$ 17 $\begin{bmatrix}1&-2&3\\3&-1&-3\\2&1&5\end{bmatrix}$

سیستمەکە بە ڕێسای کرامەر شیکاربکە.

18 $\begin{cases}x+2y=1\\3x-y=10\end{cases}$ 19 $\begin{cases}x+3z=3+2y\\3x+22=y+3z\\2x+y+5z=8\end{cases}$

ئەگەر توانرا هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەکە بدۆزەوە.

20 $\begin{bmatrix}2&0.7\\4&1.4\end{bmatrix}$ 21 $\begin{bmatrix}3&-1\\1&3\end{bmatrix}$

22 $\begin{bmatrix}3&1\\2&-1\end{bmatrix}$ 23 $\begin{bmatrix}3&2&-1\\2&3&-5\\1&4&2\end{bmatrix}$

24 نرخی $2.5\,kg$ هەنجیر و $1.5\,kg$ خورما 14420 دینارە نرخی $3.5\,kg$ هەنجیر و $1\,kg$ خورما 16 910 دینارە ڕیزکراوەکان بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی نرخی $1\,kg$ لەهەر جۆرێکیان.

سیستمە هێڵییەکان بەشێوەی ڕیزکراوە بنووسە، پاشان شیکاریان بکە.

25 $\begin{cases}6x+y=2\\3x-2y+1=0\end{cases}$ 26 $\begin{cases}5x-2y=3\\2.5x-y=1.5\end{cases}$

27 $\begin{cases}x+2y=3.5\\3x=2.7+y\end{cases}$ 28 $\begin{cases}2x-z=3+y\\x+2=y+5\\4z+x+y=1\end{cases}$

برەکەی بەشێوەی $a+bi$ بنووسە.

29 $(1-2i)-(5+2i)$ 30 $(6-2i)(2-2i)$

31 $-2i^{18}$ 32 $\frac{1-8i}{4i}$

هاوکێشەکە شیکاربکە.

33 $x^2+25=0$ 34 $x^2+12x=-40$

35 $(x-1)^2+7=0$ 36 $2x^2-x+5=0$

ئاوەڵی ژمارە ئاوێتەکە بدۆزەوە.

37 $5+3i$ 38 $6-7i$ 39 $-2+i\sqrt{2}$

بەشی 3



1 تەمەنی هیوا دووساڵ کەمترە لە چوارئەوەندی تەمەنی هێرش، تەمەنی سەردار 6 ساڵ زیاترە لەنیوەی تەمەنی هیوا. هێمای x بۆتەمەنی هێرش و هێمای y بۆتەمەنی هیوا دابنێ. کام لەم برانە تەمەنی سەردار دەنوێنێت؟

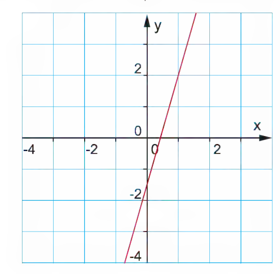
أ) $\frac{1}{2}x+6$

ب) $2x+5$

ج) $4x+\frac{1}{2}y+4$

د) $\frac{1}{2}(4x+2)-6$

2 وێنە ڕوونکردنەوەییەکە ڕاستەهێڵێك دەردەخات کە هێڵی سنووری ناوچە شیکاری لاسەنگەیەکی هێڵییە، ئەم دوو جووتە ڕێکخراوە(21, 83) و(16, 62) سەربە کۆمەڵە شیکارەکەی نین. کام لەمانە دروستە؟



أ) هێڵی سنوور پێویستە خاڵخاڵ بێت، ناوچەی سەرەوەی هێڵەکە ڕەنگکراوبێت.

ب) پێویستە هێڵی سنوور نەپساو بێت، ناوچەی سەرەوەی هێڵەکە ڕەنگکراوبێت.

ج) پێویستە هێڵی سنوور خاڵخاڵ بێت، ناوچەی ژێرەوەی هێڵەکە ڕەنگکراوبێت.

د) پێویستە هێڵی سنوور نەپساو بێت، ناوچەی ژێرەوەی هێڵەکە ڕەنگکراوبێت.

3 کام بڕەی ڕیزکراوی یەکسانە بە $\begin{bmatrix}2 & -4\\11 & 14\end{bmatrix}$ ؟

أ) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4 & -8\\22 & 28\end{bmatrix}$

ب) $2\begin{bmatrix}0 & -6\\9 & 12\end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix}2 & -4\\11 & 14\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$

د) $\begin{bmatrix}-6 & 17\\8 & 10\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}8 & -13\\-3 & 4\end{bmatrix}$

4 خێرایی فرۆکەی$X-43A$ کە ئاژانسی بۆشایی ئاسمانی ئەمریکی (ناسا) پەرەیپێدا گەیشتە 7 ماك واتە حەوت ئەوەندی خێرایی دەنگ. ئەمەش مانای ئەم فرۆکەیە 16 میل لە 12 چرکەدا دەبڕێت. کام یەکێك لەم نەخشانەی خوارەوە ئەو دوورییە دەنوێنێت کە فرۆکەکە بەپێی کات بڕیویەتی کاتێك بەخێرایی 7 ماك دەفڕێت.

أ) $f(s)=16x+12s$

ب) $f(s)=\frac{3}{4}s$

ج) $f(s)=16s$

د) $f(s)=1\frac{1}{3}s$

5 دلشاد هاوبەشی کۆنگرەیەکی کرد. لە کۆنگرەکەدا بەشداری چەند ورشەیەکی کاری کرد. دلشاد هەستا بە هەڵسەنگاندنی ئەو ورشەکارانەی کە بەشداری تێداکردبوو بە پێدانی هەریەکێکیان هەڵسەنگاندنێك لە 1 – 10 پێکهاتووە ئەم خشتەیەی خوارەوە ماوەی هەر ورزشکارێك وهەڵسەنگاندنی دلشاد بۆی ڕووندەکاتەوە.

ژمارەی خولەکەکان	53	93	48	120	32
هەڵسەنگاندن	7	4	5	9	8

هاوکۆلکەی پەیوەستی پەیوەندی نێوان ماوەی ورزشکارەکە و هەڵسەنگاندنی دلشاد بۆی چەندە؟ نزیکیبکەوە بۆ نزیکترین بەش لەسەد؟

أ) 0.01

ب) 0.12

ج) 0.88

د) 0.13

6 $M=\begin{bmatrix}6 & -2\\3 & 7\end{bmatrix}$ و $N=\begin{bmatrix}-1 & 8 & 2\\0 & 1 & 6\end{bmatrix}$. کام لەمانەی خوارەوە ڕیزکراوەی $2MN$ دەنوێنێت؟

أ) $\begin{bmatrix}-24 & 184 & 0\\-12 & 124 & 192\end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix}-12 & 92 & 0\\-6 & 62 & 96\end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix}-24 & -12\\184 & 124\\0 & 192\end{bmatrix}$

د) $\begin{bmatrix}-12 & -6\\92 & 62\\0 & 96\end{bmatrix}$

7 ئەم یەکتربڕینانەی خوارەوە لەگەڵ تەوەرەکان سەر بەکام ڕووتەختن. پۆوتانەکان(0, 0, 20)، (0, 40, 0) ، (5, 0, 0)

أ) $20x+40y+5z=0$

ب) $20x+40y+5z=1$

ج) $4x+8y+z=5$

د) $2x+y+8z=40$

8 کام لەمانەی خوارەوە یەکسانە بە بڕی $\frac{5(6-8i)}{2-i}$ ؟

(أ) $-20+10i$ (ب) $15-8i$

(ج) $15-40i$ (د) $20-10i$

9 کام لەمانە هەڵگەڕاوەی ئەم ڕیزکراوەیە $\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ؟

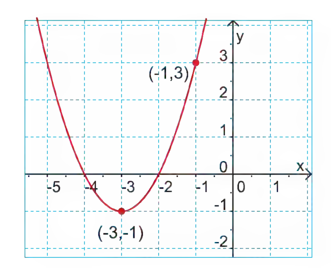
(أ) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(ج) $\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$

10 کام لەمانەی خوارەوە هاوکێشەی نەخشە ڕوونکراوەکەیە.

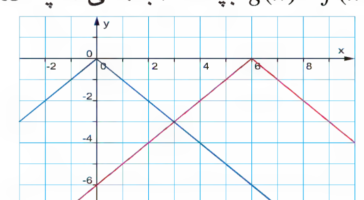
(أ) $y=(x-3)^2-1$ (ب) $y=(x+3)^2-1$

(ج) $y=(x-1)^2-3$ (د) $y=(x+1)^2-3$



کورتە وەڵام

11 ڕوونکردنەوەی ئەم دوونەخشەیە $f(x)=-|x|$ و $g(x)=f(x-h)$ بپشکنە. بەهای h چەندە؟



12 ڕیزکراوە بەکاربێنە بۆ جێگۆڕکێکردنی سێگۆشەی ABC کاتێك $A(-1, 0)$ ، $B(4, 3)$ ، $C(2, -1)$ بێت.

أ $A'B'C'$ وێنەی ڕاکێشراوی ABC بێت. یەك یەکە بۆلای ڕاست و 4 یەکە بۆ سەرەوە. پۆوتانی سەرەکانی سێگۆشەی $A'B'C'$ بدۆزەوە.

ب $A''B''C''$ وێنەی وێنەدانەی $A'B'C'$ بێت. بە دەوری تەوەری دووەم. پۆوتانی سەرەکانی سێگۆشەی $A''B''C''$ بدۆزەوە.

13 سنووردەری ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -1 \\ 0.4 & 10 \end{bmatrix}$ بدۆزەوە.

14 ئەم خشتەیەی خوارەوە کرێی وەستانی ئۆتۆمبیلەکانە لە گەراجی فرۆکەخانەیەك. بە پێی ماوەی وەستانەکەیان. لاری ئەو نەخشە هێڵییەی کرێی وەستانی بە دینار دەنوێنێت چەندە؟ بە پێی ماوەی وەستان بە کاتژمێر؟

ماوە	1	3	5	7
کرێ	3350	5050	6750	8450

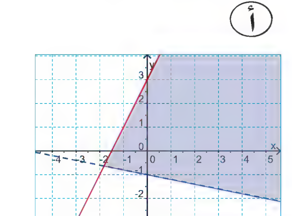
15 کام بەهای گۆڕاوی c وا لەم سستەمە هێڵییە دەکات بێ سنووربێت.

$$\begin{cases} 2y-x+10=0 \\ 3x-6y-c=16 \end{cases}$$

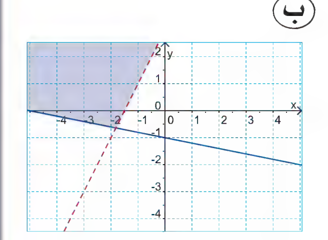
وەڵامی ڕاستەوخۆ

16 سیستمی ئەو لاسەنگانە بنووسە کە ئەم شێوانەی خوارەوە ڕوونکردنەوەییەکەیان دەنوێنێت.

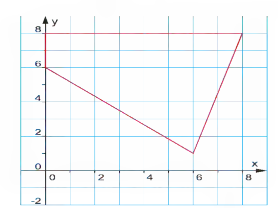
(أ)



(ب)



17 لێکنەچوونی نێوان دوو سیستمەکە لە پرسیاری پێشوودا ڕوونبکەوە. وێنەی ڕوونکردنەوەیی خوارەوە ناوچەی گونجاو پرۆگرامێکی هێڵی ڕووندەکاتەوە.



أ مەرجەکانی ئەم پرسیارە بنووسە.

ب گەورەترین بەها بۆ نەخشەی بەسوودی $P=3x-4y$ لەم پرسیارەدا بدۆزەوە.

درێژە وەڵام

18 هاوکێشەی هێڵی $2x-3y=-15$ بەکاربهێنە.

أ ڕوونبیکەوە چۆن ئەم هاوکێشەیە دەنووسیت بە شێوەی لاری – یەکتربڕین.

ب ئەو هۆیە چییە کەوا دەکات شێوەی لاری–یەکتربڕین باشترین شێوەبێت بۆ نووسینی ئەم جۆرە هاوکێشانە پێش کێشانی ئەو ڕاستەهێڵەی دەینوێنێت.

ج هەنگاوەکانی کێشانی ئەو ڕاستەهێڵەی ئەو هاوکێشە دەنوێنێت. هەنگاو بە هەنگاو بنووسە.

بەشی

4

نەخشە توانییەکان و لۆگاریتمییەکان

Exponential and Logarithmic Functions

بەشی چوارەم

وانەکان

لە کەوانەکە e بدۆزەوە

کەوانەی دەروازە لە شاری سانت لویس لە ئەمریکا بەناوبانگترین ئادگارەکانی ئەمریکایە، ئەو کەوانەیە شێوەیەکی چەماوەی هەیە هاوشێوەی برگەی هاوتایە ئەو جۆرە چەماوانە لەم بەشەدا دەخوێنیت.

ئایا تۆ ئامادەیت؟

زاراوەکان

هەر زاراوەیەك بەو پێناسەی لەلای چەپدا هاتووە ببەستەوە.

1	نەگۆڕ	أ	هێمایەکە بۆ نواندنی ژمارەیەك بۆی هەیە بەها جیاوازەکان وەربگرێت
2	نەخشە	ب	کۆمەڵە ژمارەیەکی بەکارهاتووە لە ژماردن و پێچەوانەکەیان.
3	پەیوەندی	ج	پەیوەندییەکە هەر بەهایەك لە بەهایەکانی گۆڕاوی ئازاد تەنها بە یەك بەهای گۆڕاوی پەیوەست دەبەستێتەوە.
4	گۆڕاو	د	ڕادەیەکە گۆڕاوەکانی تێدا نییە.
		هـ	کۆمەڵێك جووتە ڕێکخراوە.

سیفەتەکانی هێز

ئەم برانەی خوارەوە بەسادەترین شێوە بنووسە.

5. $x^2\left(x^3\right)(x)$
6. $3y^{-1}\left(5x^2y^2\right)$
7. $\frac{a^8}{a^2}$
8. $y^{15} \div y^{10}$
9. $\frac{x^2y^5}{xy^6}$
10. $\left(\frac{x}{3}\right)^{-3}$
11. $(3x)^2\left(4x^3\right)$
12. $\frac{a^{-2}b^3}{a^4b^{-1}}$

سوودی سادە

یاسای سوودی سادەی $I = Prt$ بەکاربێنە. کاتێك I بۆ سوود هێما دەکرێت، و P هێمای گوژمە بنەڕەتییە، بەڵام r هێمای « ڕێژەی سوودی ساڵانەیە» t هێمایە بۆ ماوە بەساڵ.

13. سوودی گوژمەی 30 ملیون دینار بدۆزەوە، بۆ دوو ساڵ خرابێتە کار بەسوودی ساڵانەی 3%.
14. سوودی گوژمەی 2 ملیون دینار بدۆزەوە، بۆ دوو ساڵ خرابێتە کار سوودی 90 000 دیناری بەدەستهێناوە.
15. کاروان بڕە پارەیەکی بۆ ماوەی سێ ساڵ بە سوودی سادەی 6% قەرزکرد بەهای ئەو قەرزە چەندە؟ ئەگەر بزانیت کاروان ئەو بڕە پارەیەی لەسەری بوو داویەتەوە کە 5310 ملیۆن دینار بوو.

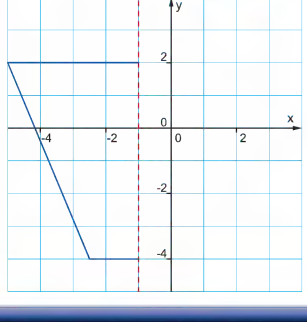
شیکارکردنی هاوکێشە بەپێی گۆڕاوێك

بەهای گۆڕاوی x بە پێی گۆڕاوەکانی تر هەژماربکە.

16. $3x - y = 4$
17. $y = -7x + 3$
18. $\frac{x}{2} = 3y - 4$
19. $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$

هاوجێبوون

20. وێنەی بەرامبەر دروستبکە، بەبەکارهێنانی تەوەرە سوورەکەی هاوجێبوون تەواوبکە.





شێوەی زانستی

بە شێوەی زانستی بنووسە.

21. 7 000 000 000
22. 0.0000000093
23. 16.75

بەشی 4

ڕێبەری خوێندن: تێڕوانین لەسەر بەشەکە

لە ڕابردوودا

خوێندووتە

- بەکارهێنانی سیفەتەکانی هێز بۆ نووسینی بڕێك بە سادەترین شێوە.
- جیبەجێکردنی کردارە پێچەوانەکان.
- شیکارکردنی ئەو پرسیارانەی نەخشە هێڵییەکان و دووجاکان و ڕادەرەکان لە خۆ دەگرێت.

لەم بەشەدا

ئەمانە فێردەبیت

- نەخشە توانییەکان.
- لۆگاریتمەکان و نەخشە پێچەوانەکان.
- شیکارکردنی ئەو پرسیارانەی نەخشە توانییەکان و لۆگاریتمییەکان لە خۆدەگرێت.

لە داهاتوودا

دەتوانیت کارامەییەکانی ئەم بەشە بەکاربێنیت

- بۆ شیکارکردنی ئەو پرسیارانەی سوودی ئاوێتە لە خۆدەگرن.
- لە بواری زانستی وەك زیندەزانی و کۆمەڵناسی، کاتێك پێدراوەکان کۆ دەکرێتەوە و ڕێکدەخرێن و شیدەکرێنەوە.
- لە قۆناغی بەرزتردا، کە ئامار و بیرکاری کار وەردەگرێت.

زاراوەکان	Vocabulary
دەرکەنار	Asymptote
بنچینە	Base
لۆگاریتمی ئاسایی	Common logarithm
هاوکێشەی توانی	Exponential equation
پێچەوانەی نەخشە	Inverse function
هاوکێشەی لۆگاریتمی	Logarithmic equation
نەخشەی لۆگاریتمی	Logarithmic function
لۆگارتمی سروشتی	Natural logarithm

ڕۆشناییەك لەسەر زاراوەکان

بۆ ئەوەی لەگەڵ هەندێك لەم زاراوانەدا ڕابێی کە لەم بەشەدا هاتووە ئەم هەنگاوانە پەیرەوبکە:

1. دەتوانیت بیر لە **بنچینە** بکەیتەوە. وەك ئاوەڵی توان، کام ژمارە بنچینەیە لە $10^3 = 1000$
2. **لۆگاریتمی دەیی** (ئاسایی) بریتییە لە توان لە هێزی ژمارە 10. چۆن بەهای لۆگاریتمی ئاسایی ژمارە 1000 دەبینیت.
3. لە کوێدا. پێشبینی دۆزینەوەی نەزانراوی x لە **هاوکێشەیەکی توانیدا** دەکەیت.
4. دابەشکردن بریتییە لە کرداری پێچەوانەی لێکدان. چۆن پێشبینی کاریگەری نەخشەی پێچەوانە بۆ نەخشەی پێدراو دەکەیت.
5. بنچینەی **لۆگاریتمی سروشتی** بریتییە لە ژمارە e، کام بەهای نەگۆڕی تر بە پیت هێما دەکرێت.
6. Asymptote وشەیەکی یۆنانییە واتە بەیەك نەگەیشتن. چۆن پەیوەندی نێوان چەماوەیەك و **هێڵی دەرکەنارەکەی** دەبینیت؟

بەشی

4



ستراتیژیەتی نوسینەوە: شێوازی خۆت بەکاربهێنە

کاتێك بیرۆکەیەکی دژوار لە بیرۆکەکانی بیرکاری دەخوێنێت، دووبارە بیرۆکەکە بە شێوازی خۆت بنووسەوە. ئەمەش یارمەتیت دەدات بۆ تێگەیشتنی ئەوەی دەیخوێنێت بە شێوەیەکی باشتر. لەوانەیە بەسوود تربێت بۆ ڕوونکردنەوەی بیرۆکەکە باشتر وایە نموونەیەکی تایبەت بە خۆت پیشکەش بکەیت بۆ ڕوونکردنەوەی بیرۆکەکە.

پلەی ڕادەدار بەبەکارهێنانی ڕادەی بەرزترین پلە دیاری دەکرێت. ڕادەداری یەك گۆڕاو بەشێوەی گشتییەکەی نوسراوە. کاتێك ڕادەکانی بەرێزکردنی سەربەرەوژێری پلەکانی نوسرابێت. بەو شێوەیەش کاتێك ڕادەدارێك بە شێوە گشتییەکەی نووسراوە ئەوا پلەی ڕادەی یەکەم دەبێتە پلەی ڕادەدارەکە. هاوکۆڵکەکەی ڕادەی یەکەم دەبێت بە هاوکۆڵکەی سەرەکی ڕادادارەکە.

بنووسە برگەی پێشوو بنووسە بە بەکارهێنانی ڕستەی کورت بۆ ڕوونکردنەوەی بیرۆکەی گرنگ کە ڕادەدارەکانی تێدابێت.

دڵنیابوون باسی نموونەیەك بکە، دەق و بیرکاری بەیەکەوە ببەستێتەوە.

ڕادەدارەکان

1. پلەی ڕادەدار پلەی بەرزترین ڕادەیە
2. شێوەی گشتی: ڕادەکان بەرێزێکی سەربەرەو ژێر بە پێی پلەکانی نوسراوە.
3. لە شێوەی گشتیدا، پلەی ڕادەی یەکەم بریتییە لە پلەی ڕادەدارەکە.
4. هاوکۆلکەی ڕادەی یەکەم بریتییە لە هاوکۆلکەی سەرەکی.

هاوکۆلکەی ڕادەی یەکەم بریتییە لە هاوکۆلکەی سەرەکی

نموونە: شێوەی گشتی $2x^4-5x^3+3x-9x+10$

پلەی ڕادەدارەکە : 4

هاوکۆلکەی سەرەکی: 2

هەوڵبدە

ئەم برگەیەی دێت بخوێنەوە و دووبارە بە شێوازی خۆت بینووسەوە.

لە سەلمێنراوی ڕەگی ناڕێژەییدا هاتووە. کە ڕەگە ناڕێژەییەکانی هاوکێشەیەك هاوکۆڵکەکانی ژمارەی ڕێژیی بن ئاوەڵی یەکتری دەبن. بۆ نموونە ئەگەر بزانیت $1+\sqrt{2}$ ڕەگێکە لە ڕەگەکانی هاوکێشەی $x^3-x^2-3x-1=0$ دەوترێت $1-\sqrt{2}$ ش ڕەگێکە لە ڕەگەکانی. بیرت بێت ژمارە ڕاستییەکان دوو جۆرن، ژمارە ڕێژەییەکان و ژمارە ناڕێژەییەکان دەتوانیت سەلمێنراوی ڕەگی ڕێژەیی و سەلمێنراوی ڕەگی ناڕێژەیی بەیەکەوە بەکاربهێنێت بۆ دۆزدینەوەی هەموو ڕەگەکانی هاوکێشەی $P(x)=0$.

1-4

نەخشە توانییەکان، و گەشە و پووکانەوە (گەرانەوە)
Exponential Functions, Growth and Decay

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

ئەوانەی شتە دەگمەنەکان کۆدەکەنەوە، دەتوانن نەخشەی توانی بەکاربێنن بۆ دارشتنی نموونەیەك، کە بەهای ئەو شتانەی کۆیدەکەنەوە بینوێنێت. وەك ئامێرە دەگمەنەکانی مۆسیقا (نموونە 2).

ئامانجەکان

• برە توانییەکان بۆ نواندنی بارەکانی گەشەو پووکانەوە دەنووسێت. و بەهای ئەم برانە هەژمار دەکات.

زاراوەکان
Vocabulary

نەخشەی توانی
Exponetial function
بنچینە
Base
دەرکەنار
Asymptote
گەشەی توانی
Exponential growth
پووکانەوەی توانی
Exponential decay

لەدەقی یاسای مۆر Moore کە لە پیشەسازی بژمێردا بەکاردێت هاتووە. ژمارەی ترانزیستەرەکان کە پێکهاتەکانی بژمێرێك لە خۆ دەگرێت هەموو ساڵێك ئەوەندەی خۆی زیاد دەکات. ئەم خشتەیەی خوارەوە ژمارەی ترانزستەرەکان بە نزیکەیی رووندەکاتەوە کە پێکهاتەکانی بژمێرن لە سەرەتای دروستبوونی ئەم پیشەسازییەوە.

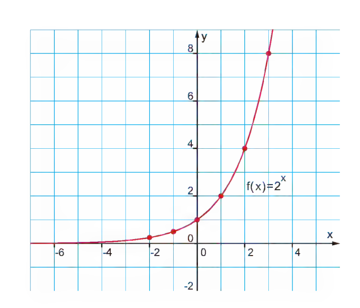
ژمارەی ترانزستەرەکان لە پێکهاتەکەدا							
1971	1970	1969	1968	1967	1966	1965	ساڵ
3840	1920	960	480	240	120	60	ژمارە

$\times 2$ $\times 2$ $\times 2$ $\times 2$ $\times 2$ $\times 2$

دەتوانرێت ئەو گەشەبوونە کە هەموو ساڵێك دوو ئەوەندە دەبێت، بەبەکارهێنانی نەخشەیەك توانەکەی گۆراوێك لە خۆ بگرێت بنوێنرێت. ئەم نەخشانە پێیان دەوترێت **نەخشەی توانی**، نەخشەی بنەرەتی بۆ **نەخشە توانییەکان Exponential functions** بریتییە لە نەخشەی $f(x)=b^x$. کاتێك **Base** b ژمارەیەکی نەگۆر و x گۆراوێکی سەربەخۆ بێت.

توان   بنچینە

$f(x)=b^x$ و $b>0, b\neq 1$



وێنەی بەرامبەر روونکردنەوەی نەخشەی توانی بنەرەتی دیاردەکات $f(x)=2^x$ مەودای ئەم نەخشەیە بریتییە لە کۆمەڵەی ژمارە راستیە مووجەبەکان $\{y/y>0\}$

x	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)=2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

لەبیرت بێت

لە پەیوەندی $y=b^x$ ، y گۆراوی بەستراوە بە گۆراوی x چونکە بەهای y بە بەهای x دیاریدەکرێت.

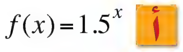
سەرەنجبدە روونکردنەوەی نەخشەکە بەرەبەرە نزیك دەبێتەوە لە تەوەری یەکەم هەرچەندە بەهای x کەمبکات، دیسان سەرەنجبدە روونکردنەوەکەی بەر تەوەری یەکەم ناکەوێت و لە سەرەوەوە دەمێنێتەوە بەهای بری 2^x بە موجەب دەمێنێتەوە بەهای x هەرچەند بێت. تەوەرەی یەکەم بریتییە لە **دەرکەناری ئاسۆیی** بۆ روونکردنەوەیی نەخشەی $f(x)=2^x$ **دەرکەنار Asymptote** راستەهێڵێکە. هێڵی روونکردنەوەیی نەخشەکە بەرەبەرە لێی نزیکەدەبێتەوە هەرچەندە بەهای x زۆر گەورەبێت یان زۆر بچووکبێت.

هەرنەخشەیەکی وەك $f(x)=ab^x$ ، کاتێك $a>0$ و $b>1$ بریتییە لە نەخشەیەکی **گەشەی توانی Exponential growth** بەهاکەی زیاددەکات بەزیادبوونی بەهای x بەڵام کاتێك $0<b<1$ ئەوا نەخشەکە $f(x)=ab^x$ بریتییە لە نەخشەی **پووکانەوە Exponential decay** بەهایەکەی بە زیادبوونی بەهای x کەمدەکات.

نموونـــــه 1 وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشە توانییەکان

دیاریبکە، ئایا ئەم نەخشەیە، نەخشەیەکی گەشەی توانییە یان نەخشەیەکی توانی پووکانەوەی توانییە پاشان وێنە ڕوونکردنەوەییەکەی بکێشە؟

أ $f(x)=1.5^x$



هەنگاوی 1 بەهای بنچینە بدۆزەوە

$f(x)=1.5^x$ بنچینە 1.5 گەورەترە لە 1 نەخشەکە بریتییە لە نەخشەیەکی گەشەی توانییە

هەنگاوی 2 بەبەکارهێنانی خشتەکە، وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.4	0.8	1	1.5	2.3	3.4	5.1

ب $f(x)=30(0.8)^x$

هەنگاوی 1 بەهای بنچینەیی بدۆزەوە.

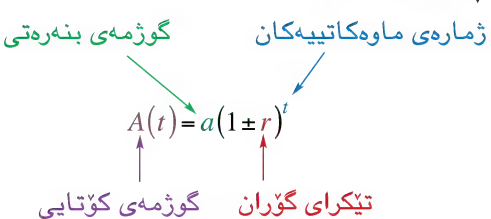
$f(x)=30(0.8)^x$ بنچینە 0.8 بچوکترە لە 1 نەخشەکە بریتییە لە نەخشەیەکی کەمبوونی توانی.

هەنگاوی 2 بەبەکارهێنانی بژمێرەی ڕوونکردنەوەیی، وێنەی نەخشەکە بکێشە.



1. دیاریبکە ئایا نەخشەی $f(x)=5(1.2)^x$ نەخشەیەکی توانی گەشەی توانییە یان نەخشەیەکی پووکانەوەی توانییە؟ وێنەی ڕوونکردنەوەییەکەی بکێشە.

دەتوانیت گەشە یان پووکانەوە بەبەکارهێنانی ڕێژەی سەدی نەگۆڕ بۆ گەشە و پووکانەوە بەبەکارهێنانی ئەم ڕێسایە بنوێنیت؟



$$A(t)=a(1\pm r)^t$$

بنچینەی نەخشەکەی سەرەوە $1+r$ پێی دەوترێت هاوکۆلکەی زیادبون بە هەمان شێوە بە بنچینەی $1-r$ دەوترێت هاوکۆلکەی کەمبوون.

لە خوێندکارەوە بۆ خوێندکار

گەشەو پووکانەوە

کاتێك بەهای نەخشەکە بە تێکرایەکی نەگۆڕ زیاد دەکات. وەك 7% مانای ئەوەیە لێکدانی $7\%+100\%$ واتە لە 107% بدە. لە شێوەی دەیی ئەمەش دەگۆڕێن بە لێکدان لە 1+0.07 واتە 1.07.

کاتێك بەهای نەخشەکە بە تێکرایەکی نەگۆڕ کەمدەکات. وەك 12% مانای ئەوەیە لێکدانی $100\%-12\%$ واتە لە 88% بدە لە شێوەی دەیی لێکدانی $1-0.12$ واتە 0.88 .

نموونـــــه 2 جێبەجێکردنی ئابووری

گۆڤەند لە ساڵی 2000 دا گیتارێکی دەگمەنی کڕی مێژووەکەی دەگەڕایەوە بۆ ساڵی 1959، 12 ملیۆن دیناری پێدا. شارەزایان وایان خەملاندن کە نرخەکەی ساڵانە بەرێژەی % 14 زیاد دەکات. بەبەکارهێنانی خشتەی خوارەوە ئەو ساڵە بدۆزەوە کە تییدا نرخی گیتارەکە دەبێتە 60 ملیۆن دینار.

هەنگاوی 1 نەخشەیەك بنووسە گۆڕانی نرخی گیتارەکە بنوێنێت.

$f(t)=a(1+r)^t$ نەخشەی گەشەی توانییە.

$=12(1+0.14)^t$ 12 لەجیاتی a و 0.14 لە جیاتی r دابنێ.

$=12(1.14)^t$

هەنگاوی 2 وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە.

کاتێك وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەیەکی توانی بەبەکارهێنانی ڕوونکردنەوەیی دەکیشێت، پێویستە پەنجەرەکە بگونجێنێت تا ئەو خاڵەی بەکاریدەهێنێت دەربکەوێت (شاشەکە و ئیلبکرێت وێنەکە بەباشی دەربکەوێت).

هەنگاوی 3 ڕوونکردنەوەکە بەکاربێنە بۆ خەملاندنی ئەو ساڵەی نرخی گیتارەکە دەبێت 60 ملیۆن دینار.

فرمانی TRACE بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی بەهای t کاتێك $f(t)=60$.

نرخی نەخشەکە دەگاتە 60 کاتێك $t=12.29$ نرخی گیتارەکە دەگاتە 60 ملیۆن دینار پاش 12.29 ساڵ لە کڕینی واتە لە ساڵی 2012 .

پارمەتی

لە بژمێرەی ڕوونکردنەوەییدا لە جیاتی x هێمای t بەکاربێنە.

$y_1 = 12\ 000 * 1.14 ^\wedge x$



2. ژمارەی نەهەنگە کوورەکانی ئوسترالیا 350 نەهەنگ بوو لە ساڵی 1981 دا. ساڵانە بە ڕێژەی 5% ژمارەیان زیاد دەکات. نەخشەیەکی توانی بنووسە ئەم زیادبوونە بنوێنێت. پاشان خشتەکە بەکاربهێنە بۆ دیاریکردنی ئەو ساڵەی ژمارەی نەهەنگەکان دەگاتە 550 نەهەنگ.

نموونـــــه 3 جێبەجێکردنی لەسەر پووکانەوە

نرخی بارهەڵگرێکی نوێ 28 ملیۆن دینارە. ساڵانە نرخەکەی بە ڕێژەی 6% دادەبەزێت نەخشەیەکی توانی بنووسە بۆ ئەم دابەزینە. پاشان خشتەکە بەکاربهێنە بۆ دیاریکردنی ئەو ساڵەی نرخی بارهەڵگرەکە دەگاتە 20 ملیون دینار.

هەنگاوی 1 نەخشەیەك بنووسە گۆڕانی نرخی بارهەڵگرەکە بنوێنێت.

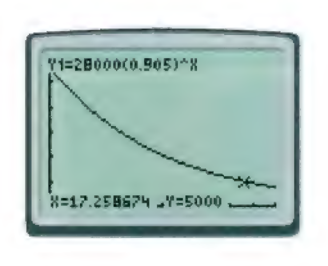
$f(t)=a(1-r)^t$ نەخشەی کەمبوونی توانی

$= 28\ (1-0.06)^t$ 28 لەجیاتی a و 0.06 لە جیاتی r دابنێ.

$= 28(0.94)^t$

هەنگاوی 2 وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە.

کاتێك وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشە توانییەکە بەبەکارهێنانی بژمێرەی ڕوونکردنەوەیی دەکێشێت. پێویستە خەسلەتەکانی پەنجەرەکە دەستکاری بکەیت بۆ ئەوەی ئەو خاڵەی بە کاریدەهێنێت دەربکەوێت. فەرمانی TRACE بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی بەهای t کاتێك $f(t)=5$



هەنگاوی 3 ڕوونکردنەوەییەکە بەکاربێنە بۆ خەملاندنی بەهای ئەو ساڵەی نرخی بارهەڵگرەکە دەگاتە 5 ملیۆن دینار

بەهای نەخشەکە بەنزیکەیی دەبێتە 5 کاتێك $t = 17.3$. نرخی بارهەڵگرەکە دەگاتە 5 ملیۆن دینار پاش 17.3 ساڵ لە کڕینی.



.3 ماتۆر سکیلێك نرخەکەی یەك ملیۆون دینارە. ساڵانە بە ڕێژەی 15% نرخەکەی دادەبەزێت نەخشەیەکی توانی بۆ نواندنی ئەم دابەزینە بنووسە پاشان خشتەکە بەکاربیهێنە بۆ دیاریکردنی ئەو ساڵەی نرخەکەی دەگاتە نیوەی نرخە بنەڕەتییەکەی.

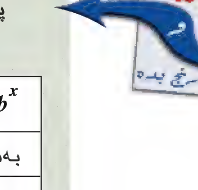
بیربکەوە و تاوتوێبکە

.1 بژمێر بەکاربێنە بۆ بەراورد کردن لە نێوان دوو بەهای 1.01^{500} و 0.99^{500} ئەوەی پێی گەیشتی باسبکە.

.2 لە بارە جیاوازەکانی نێوان ڕوونکردنەوەیی دوو نەخشەی $f(x)=1.1^x$ و $g(x)=0.9^x$ وتووێژبکە کاتێك $x = 0$ لە هەریەکەیان چی ڕوودەدات.

.3 باسی نەخشەی $f(t)=a(1-r)^t$ بکە، کاتێك $r>0$ باسی نەخشەکە بکە کاتێك $r>0$

.4 ڕێکخەر بە ئەم خشتەیەی خوارەوە دروست بکە و تەواویبکە. بەراوردی نێوان گەشەی توانی و پووکانەوەی توانی بکە.



$f(x)=ab^x$ کاتێك $a>0$	گەشە	پووکانەوە
بەهای b		
شێوەی گشتی ڕوونکردنەوەکە		
نەخشەکە لە زیادبوونی بەهای x چی بەسەردێت		
نەخشەکە بە کەمبوونی بەهای x چی بەسەردێت		

1-4 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاراستەکراو

1 **زاراوەکان** ئەگەر بنچینەی نەخشەیەکی توانی ژمارەیەك بێت لەنێوان 0 و 1 دا ئەوا نەخشەکە نەخشەیەکی ـ؟ـ (گەشەی توانی یان پووکانەوەی توانییە)

بڕوانە نموونە 1

دیاریبکە، ئایا نەخشەکە نەخشەیەکی گەشەی توانییە یان پووکانەوەی توانییە.

2 $f(x)=32\left(0.5^x\right)$ **3** $f(x)=0.5\left(1.2^x\right)$ **4** $f(x)=0.4\left(\frac{3}{4}\right)^x$

بڕوانە نموونە 2

5 **زیندەزانی** دەفرێکی چاندنی بەکتریا 150 بەکتریای تێدایە. لەو جۆرانەی کە دوو ئەوەندەی لێدێت پاش هەر کاتژمێرێك.



أ نەخشەی $f(t)$ بنووسە زۆربوونی ژمارەی بەکتریاکان دەنوێنێ.

ب وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە.

ج خشتەکە بەکاربهێنە بۆ خەملاندنی ژمارەی بەکتریاکان پاش 10 کاتژمێر.

پروانە نموونە 3

6 **فیزیا** لەبەرزی 25 m تۆپێکی نۆی نەرم بۆ سەر زەویەکی ڕەق بەرەدرایەوە چەند جارێك بەرەو سەرەوە هەڵبەزیەوە. هەرجارێك دەگەیشتە $\frac{2}{5}$ ی بەرزی جاری پێشوو.

أ نەخشەی $f(n)$ بنووسە ئەو بەرزییە بنوێنێت کە تۆپەکە لە هەر جارێکدا دەیگاتێ.

ب وێنەی ڕوونکردنەوەیی ئەو نەخشەیە بکێشە.

ج پاش چەند جار بەرزییەکەی لە 1 m کەمتر دەبێت؟

ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

ڕاهێنانی ئازاد	
بۆشیکارکردنی ڕاهێنانەکان	سەیری نموونە بکە
9–7	1
10	2
11	3

دیاریبکە ئایا نەخشەکە نەخشەیەکی گەشەی توانییە یان پووکانەوەی توانییە پاشان وێنە ڕوونکردنەوەییەکەی بکێشە.

7 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ **8** $f(x)=\frac{1}{3}(1.3)^x$ **9** $f(x)=10(2.7)^x$

10 **شەمەندەفەرەکان** شتوومەکە گواستراوەکان بە هۆی شەمەندەفەرەوە لە ئەمریکا گەیشتە 580 ملیار تەن/میل لە ساڵی 1960 دا، ئەم هێندە ساڵانە بە ڕێژەی 2.32% زیاد دەکات لە و ساڵەوە.

أ نەخشەیەك بنووسە زیادبوونی ساڵانەی شتومەکە گواستراوەکان بە هۆی شەمەندەفەرەکانەوە بنوێنێت. (1960 = ساڵی سفر).

ب وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە.

ج لە چ ساڵێکدا شتومەکە گواستراوەکان لە هەزار ملیار تەن/میل زیاتر دەبێت؟

11 **پزیشکی** هێندی ئەنسۆلینی بەکارهاتوو بۆ ڕێکخستنی ڕێژەی شەکر لە خوێندا بە تکێڕای 5% بە نزیکەیی لە هەر خولێکدا کەم دەکات ئەو هێندەی مرۆڤ پێویستی پێیەتی بە نزیکەیی دەگاتە 10 یەکە.

أ نەخشەی $f(t)$ بنووسە هێندی ئەو ئەنسۆلینە بە پێی کات بنوێنێت. کە لە خوێندا ماوەتەوە پاش ئەوەی نەخۆشەکە 10 یەکەی وەرگرت.

ب وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە.

ج هێندی ئەنسۆلینی ماوە لە خوێندا پاش 10 خولەك بخەمڵێنە.

د پاش چەند خولەك هێندی ئەنسۆلین لە لەشدا بۆ نیوە دادەبەزێت.

دیاریبکە ئەم نەخشانە توانین یان نا.

12 $f(x)=2(x)^{10}$ **13** $f(x)=0^x$ **14** $f(x)=1(0.5)^x$

15 لە ساڵی 1626 کۆمەڵێك لە کۆچبەرانی ئەڵمانی دوورگەی مانهاتنیان کڕی ، کە ئەمڕۆ بەشێکە لە شاری نیویۆرك. لە بڕی کەلوپەلێك نرخەکەی 24 دۆلاری ئەو کاتەبوو. وادابنێ ئەم پارەیە بە سودێکی ئاویتەی ساڵانە ڕێژەکەی 3.5% بێت دانرا بڕی ئەو پارەیە لە ساڵی 2008 دا دەبێتە چەند؟

16 **تەکنەلۆژیا** هێندی زانیارییە هەڵگیراوە ئەلیکترۆنیەکان لە ساڵی 2002 دا گەیشتە نزیکەی 5 ئەکزا بایت یان 5×10^{18} بایت. توێژینەوەرەکان ئەو هێندەیان بە دوو ئەوەندەی هەڵگیراوەکانی ساڵی 1999 خەملاند، وایدابنێ گەشەی هێندی زانیارییەکان بەو شێوازە بەردەوام بوو. نەخشەیەك بنووسە گەشەی هێندی زانیارییە هەڵگیراوە ئەلیکترۆنیەکان بنوێنێت لە سەرەتای ساڵی 1999.

17 **بژمێر** نرخی بژمێرەکان ساڵانە بە ڕێژەی 30% کەم دەکات. کاوە بژمێرێکی بە یەك ملیۆن دینار کڕی. نەخشەیەك بنووسە نرخی بژمێرە کە بەپێی کات بە ساڵانە بنوێنێت، وە لە دواییدا خشتەیەك دروستبکە بۆ دیارکردنی لە چ ساڵێك نرخی ئەم بژمێرە دەبێتە نیوەی نرخی بنەڕەتییەکەی.

ئەم خشتەیە بۆ هەر نەخشەیەك تەواو بكە. بەهایەكان نزیكبكەوە لە نزیكترین بەش لە سەد.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
18 $f(x)=2.2^x$	■	■	■	■	■	■	■	■	■
19 $g(x)=0.4^x$	■	■	■	■	■	■	■	■	■

20 ئەگەر $A=P(1.015)^n$ ڕیسایەك بێت بۆ بڕی ئەو قەرزەی كە خاوەن كارتێكی متمانەوە وەریبگرێت. كاتێك A بڕی ئەو پارەیەكە خاوەن كارتی متمانە پێی قەرزدارە پاش n مانگ. p هێمای بڕی پارەی دراو بێت؟

أ | وێنەی ڕوونكردنەوەیی نەخشەكە بكێشە كاتێك بڕی پارەی بنەڕەتی یەك ملیۆن دیناربێت.

ب | پاش ساڵێك بڕی پارەكە دەبێتە چەند؟

ج | كەی بڕە پارەكە دەگاتە 000 300 1 دینار؟

21 **فرۆشراوەكان** فرۆشراوەكانی مانگانەی یەكێك لە كێڵگە پەلەوەرییەكان لە مانگی كانوونی دووەمدا گەیشتە ئەو پەڕی 000 12 مریشك. بەڵام فرۆشراوەكانی لە مانگەكانی دواتردا مانگانە بە ڕێژەی 20% دابەزی.

أ | خاوەن كێڵگەكە دوای شەش مانگ لە دوای مانگی كانوونی دووەمەوە چەند مریشكی فرۆشتوە.

ب | پاش چەند مانگ فرۆشراوەكانی ئەم كێڵگەیە لە 1000 مریشك كەمتر بوو؟

22 **بانكەكان** بانكەكان یاسایەك بۆ هەژماركردنی نرخی گوژمەی سپێردراو بەكاردەهێنن یاساكە بریتییە لە $A=P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$ كاتێك A گوژمەی ئێستا و p گوژمەی بنەڕەتی سپێردراو و r هێمای تێكڕای سوودی ساڵانە و t هێمای ماوەیە بە ساڵ و n هێمای ژمارەی ماوەكانی ئەو ساڵەیە كە تێیدا پارەكەی پاشەكەوت كردووە. واتە هەژماری سوود و زیادكردنی بۆ گوژمەی سپێردراو بێت. خەسرەو 5 ملیۆن دیناری بە سوودی ساڵانەی 5%سپارد بۆ ئەوەی لە هەروەرزێكدا (4 جار لە ساڵێكدا) پاشەكەوتەكەی هەژماربكرێت.

أ | بڕە پارەكە پاش 5 ساڵ دەبێتە چەندە؟

ب | كەی گوژمەی سپێردراو لە 10 ملیۆن دینار تێپەڕ دەكات؟

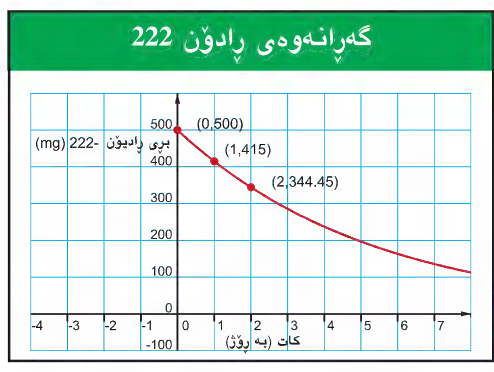
ج | **چی دەبێت ئەگەر ....؟** خەسرەو پاش 5 ساڵ چەند قازانج دەكات، ئەگەر پاشەكەوتەكە مانگانە بكرێت لە جیاتی ئەوەی وەرزی بكرێت.

23 **بیری ڕەخنەگر** پۆوتانی خاڵی هاوبەشی ڕوونكردنەوەیی ئەم دوونەخشەیە چییە $f(x)=\left(\frac{3}{2}\right)^x$ و $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ ؟

ئەو مەودایەی كە بەرامبەر بواری $[0, 10]$لە هەریەك لەم نەخشانەی دێن بدۆزەوە.

24 $f(x)=3^x-2^x$ **25** $f(x)=100(0.9)^x$ **26** $f(x)=\frac{3}{4}(2)^x$

27 **زەویناسی** ڕادون - 222 $(Radon-222)$ گازێكە لە خۆڵ و بەردەوە دەردەچێت. لە وانەیە ئەم گازە لە تەلارەكاندا كۆببێتەوە و مەترسی دروست بكات لەسەر ئەو كەسانەی هەڵیدەمژن. ڕادۆن - 222 دەگەڕێتەوە دەبێتە پۆلۆنیۆم $(Polonium)$ یان قورقوشم.



أ | ڕێژەی سەدی ڕۆژانەی گەڕانەوەی ڕادۆن -222 بدۆزەوە.

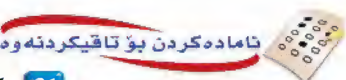
ب | نەخشەیەك بنووسە هێندی ڕادۆن - 222 ماوە بنوێنێت پاش t ڕۆژ لە هێندێكی بنەڕەتی بڕەكەی $500mg$ بێت.

ج | پاش 14 ڕۆژ هێندەكە چەندی لێدەمێنێتەوە ؟

28 **خەملاندنەکان** ژمارەی دانیشتوانی زەوی لە ساڵی 2000 دابە 6.1 ملیار کەس خەمڵێندرا. هەروەها ڕێژەی زیادبوونی ساڵانە بە%1.4خەمڵێندرا، نەخشەیەك بنووسە گەشەی ژمارەی دانیشتووانی زەوی بەپێی ساڵەکان پاش 2000 (2000 = ساڵی 0) بنوێنێت، وەبەکاربهێنە بۆ خەملاندنی ژمارەی دانیشتوانی زەوی ساڵی 2005 چەندبوو.

29 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** کام لەم دووبڕانە x^3 یان 3^x خێراتر زیاد دەکات بەزیادبوونی بەهای x ؟ ئەمە ڕوونبکەوە.

30 **بنووسە** باسی بارێك بکە کە دەتوانرێت بنوێنرێت بەبەکارهێنانی نەخشەیەکی توانی. نەخشەیەك بنووسە ئەوەی دەینوێنێت بۆ هەر بەهایەك تییدا ڕوونکرابێتەوە.

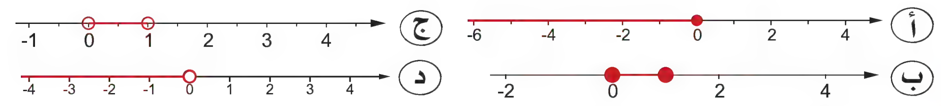


31 کام لەم نەخشانەی دێن نەخشەی پووکانەوە توانییە؟

(أ) $f(x)=0.9(1.001)^x$ (ج) $f(x)=0.5(2)^x$

(ب) $f(x)=1.5\left(\frac{10}{11}\right)^x$ (د) $f(x)=\left(\frac{1}{0.5}\right)^x$

32 کام لەمانەی خوارەوە بەهای b دەنوێنیت. کاتێك نەخشەی $f(x)=ab^x$ نەخشەیەکی پووکانەوەی توانی بێت؟

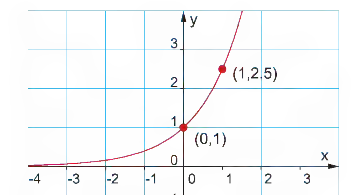


33 **کورتە وەڵام** بەهایەکانی a و b چەندن لە نەخشەی $f(x)=ab^x$ کە وێنەی ڕوونکردنەوەیی بەرامبەر نوێنراوە.



34

0.6%



(أ) $f(x)=89\ \ 443(1.6)^x$ (ج) $f(x)=89\ \ 443(1.06)^x$

(ب) $f(x)=89\ \ 443(1.006)^x$ (د) $f(x)=89\ \ 443(1.0006)^x$

بەرەنگاری و فراوانکردن

35 **بیری ڕەخنەگر** لە بیرت بێت کە نەخشە زۆر ڕادەدارەکانت بە پێی پلەکانییان پۆڵین کردووە بۆچی باس لە پلەی نەخشەی توانی ناکەیت؟

خشتەیەك بۆ شیکاری هەر لاسەنگەیەك بەکاربهێنە، وەڵامەکەت نزیکبکەوە:

36 $1.15^x \geq 3$ **37** $0.97^x < 0.5$ **38** $5 < 1.5^x < 6$

39 بەراورد لە نێوان ڕوونکردنەوەیی هەردوو نەخشەی $y=x^2$ و $y=2^x$ بکە. کاتێك $-10 < x < 10$ ژمارەی خاڵەکانی یەکتربرین چەندە؟ پۆوتانی ئەو خاڵانە بدۆزەوە.



40 **زیندەزانی** لێکۆڵەروان ژمارەیەك مێشوولەیان لە یەك ئەکردا، لە ناوچەیەکی سارد دۆزیەوە. دوای توانەوەی سەهۆڵەکە ژمارەیان $10^{\frac{1}{2}d+2}$ بوو. کاتێك d ژمارەی ڕۆژەکان بێت پاش تواندنەوەی سەهۆڵەکە. ژمارەی مێشوولەکان لە ئەکرێکدا دوای تواندنەوەی سەهۆڵەکە چەندە؟ کاتی خایەنراو چەندە پاش توانەوەی سەهۆڵەکە هەتا ژمارەی میشوولەکان لە هەر ئەکرێکدا دوو ئەوەندەی لێبێت؟ (ئەکریەکەیەکی ڕووبەرە و یەکسانەبە $4\ 047m^2$).

41 لەنەخشەی $f(x)=b^x$دا بۆچی بواری بەها گونجاوەکانی بنچینە تەنها ماوەی $\{b / b>0;\ b\neq 1\}$ دەبێت.

پێداچوونەوەی لولپێچی

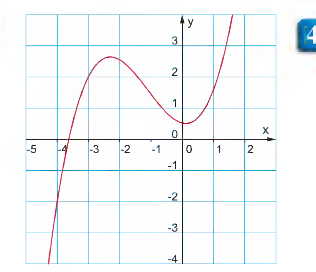
بەبەکارهێنانی بژمێریی ڕوونکردنەوەیی. وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە. بوار و مەودا و ئەو جیگۆڕکێیەی ڕێگە بە کێشانی وێنە ڕوونکردنەوەییەکە دەدات بەهۆی ڕوونکردنەوەیی نەخشە بنەڕەتییەکانەوە. *(پۆلەکانی پێشوو)*

42 $f(x)=\sqrt{x-3}$ **43** $f(x)=-x^2+1$ **44** $f(x)=2x^3$ **45** $f(x)=x-4$

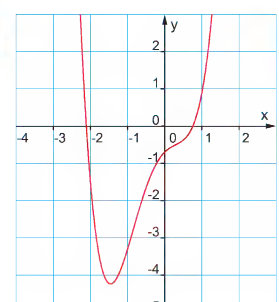
46 **بۆ خۆشی** هەڤاڵ و شیرینی خوشکی سیدی یارییان کڕی هەڤاڵ 3 یاری نوێ و دوو یاری کۆنی بە 000 235 دینار کڕی. بەڵام شیرین یارییەکی نوێ و 4 یاری کۆنی بە 000 195 دینار کڕی، نرخی هەریەکە لە یارییە نوێیەکان و یارییە کۆنەکان بدۆزەوە *(پۆلەکانی پێشوو)*.

لە پرسیارەکانی 47 – 49 هەریەك لە مانەی خوارەوە وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەیەکی ڕادەدارە، دیاریبکە ئایا پلەی ئەم نەخشانە تاکن یان جووتن. هاوکۆڵکەی سەرەکیان موجەبە یان سالب *(پۆلەکانی پێشوو)*.

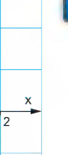
47



48



49







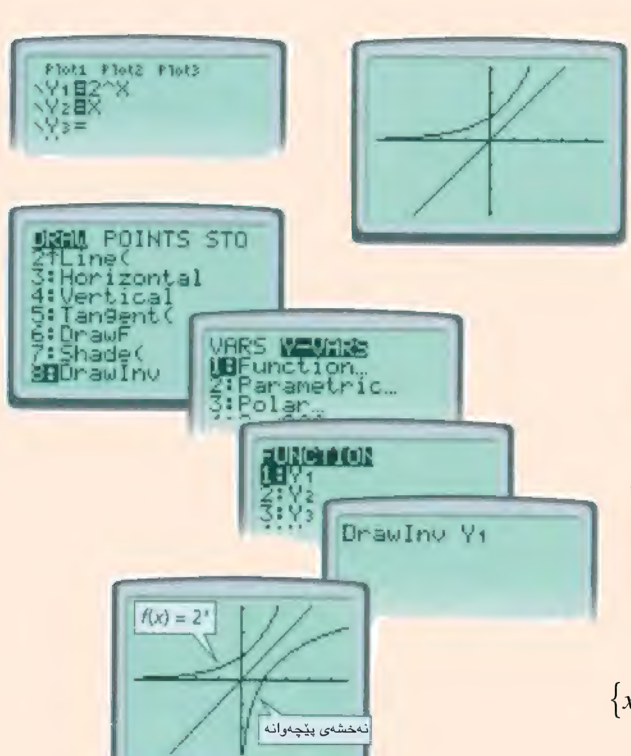
دۆزینەوەی پێچەوانەی نەخشەکان

Explore Inverses of Functions

دەتوانیت بژمێری ڕوونکردنەوەیی بۆ دۆزینەوە پێچەوانەی نەخشەکان و پەیوەندییەکەی بە نەخشەی هێڵی $f(x)=x$ بەکاربهێنێت.

چالاکی

لەمەودوا وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $f(x)=2^x$ و ڕوونکردنەوەی پێچەوانەی نەخشەکەی دەکێشین.



1. وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $f(x)=2^x$ و ڕاستەهێڵی $y=x$ بکێشە، بەبەکارهێنانی بژمێری ڕوونکردنەوەیی و دیاریکردنی پەنجەرەی دەیی بۆ بەجێهێنانی ئەم دوو نەخشە تۆماربکە و پاشان دوگمەی ZOOM دابگرە **4: ZDecimal** هەڵبژێرە.

2. فرمانی **DrawInv** بەکاربهێنە بۆ بەدەستهێنانی وێنەی ڕوونکردنەوەیی پێچەوانەی پەیوەندییەکە. ئەم کارە جێبەجێدەکرێت بە داگرتنی دوگمەی 2^{nd} و PRGM پاشان **8:DrawInv** هەڵبژێرە. بۆ هەڵبژاردنی **Y1** دوگمەی VARS دابگرە و بەشێوەی ئاسۆیی بیجوولێنە هەتا **Y-VARS** هەڵبژێرە پاشان **1: Function** **1:Y1** لە کۆتاییدا دوگمەی ENTER دابگرە.

لەشاشەکە وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە $f(x)=2^x$ و پێچەوانەکەی و ڕاستەهێڵی $y=x$ دەردەکەوێت. سەرنجبدە پێچەوانەی پەیوەندییەکە، نەخشەیە کە بوارەکەی $\{x/x>0\}$ و مەوداکەی R دەبێت.

هەوڵبدە

وێنەی ڕوونکردنەوەیی خشتەی $f(x)=x^2$ و ڕوونکردنەوەی $f(x)=x$ بکێشە.

1. بەراوردبکە لە نێوان بواری نەخشەی $f(x)=x^2$ و مەوداکەی لە لایەك، بواری پێچەوانەی پەیوەندییەکە و مەوداکەی لە لایەکی تر، ئایا پێچەوانەی پەیوەندی بۆ نەخشەی $f(x)=x^2$ نەخشەیە؟

وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=x^3$ و نەخشەی $f(x)=x$ بکێشە.

2. بەراورد بکە لەنێوان بواری نەخشەی $f(x)=x^3$ و مەوداکەی لە لایەك و بواری پێچەوانەی پەیوەندییەکەی و مەوداکەی لە لایەکی تر ئایا پێچەوانەی پەیوەندی بۆ نەخشەی $f(x)=x^3$ نەخشەیە؟ بەڵگە بۆ وەڵامەکەت بهێنەوە.

3. **دەستەواژەیەك بنووسە** دەستەواژەیەك دەربارەی پەیوەندی نێوان بواری نەخشەو مەوداکەی لە لایەك و بواری پێچەوانەی پەیوەندی و مەوداکەی لە لایەکی تر بنووسە.

4. **دەستەواژەیەك بنووسە** دەستەواژەیەك دەربارەی پەیوەندی نێوان ڕوونکردنەوەی نەخشە و ڕوونکردنەوەی پێچەوانەی نەخشەکە بنووسە.

2-4 پێچەوانەی نەخشە
Inverse function



ئامانجەکان

• پەیوەندییەکی پێچەوانەی پەیوەندییەك بە ڕوونکردنەوەیی دەنوێنێت و جیای دەکاتەوە.

• دۆزینەوەی نەخشەیەك بۆ پێچەوانەی نەخشە.

زاراوەکان
Vocabulary

پێچەوانەی پەیوەندی
Inverse relation

پێچەوانەی نەخشە
Inverse function

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

دەتوانرێت پێچەوانەی نەخشە بۆ دۆزینەوەی نرخی شتومەك پێش یەکلاکردنەوەی بەکاربهێنرێت (نموونەی 5)

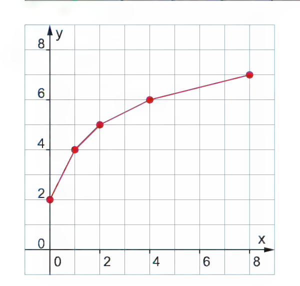
لە پۆلە بنەڕەتییەکان فێربویت، لێدەرکردن کردارێکی پێچەوانەی کۆکردنەوەیە واتە جێبەجێکردنی لێدەرکردن ئەنجامەکانی جێبەجێکردنی کۆکردنەوە لادەبات. بۆ نموونە: دژە کۆکردنەوەی ژمارە 3 بریتییە لە 3 − و دژە لێکدانی 5 بریتییە لە $\frac{1}{5}$.

دەتوانیت کرداری پێچەوانە لەسەر پەیوەندییەکان و نەخشەکان جێبەجێبکەیت. بۆ دەستکەوتنی وێنەی ڕوونکردنەوەیی بۆ **پێچەوانەی پەیوەندی Inverse relation** هەر پەیوەندییەك، وێنەی ڕوونکردنەوەیی پەیوەندییەکە بکێشە بە وێنەدانەوەی بەدەوری تەوەرەی $y = x$، ئەمەش هاوتای گۆڕینی شوێنەکان لە نێوان پۆتانی x ، y لە جووتە ڕێکخراوی هەر خاڵێك لە ڕوونکردنەوەی پەیوەندییەکەدا.

نموونــــە 1 وێنەی ڕوونکردنەوەیی پەیوەندییە پێچەوانەکە

پەیوەندیی ئەم نەخشەیە بنوێنە و خاڵەکانی بەیەکتر بگەیەنە. پاشان پێچەوانەی پەیوەندییەکەی بنوێنە و بوار و مەودای هەریەکە لە دوو پەیوەندییەکە دیاریبکە.

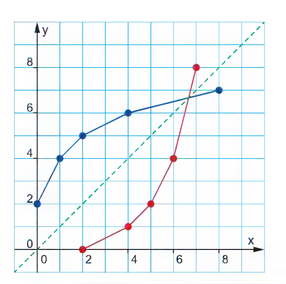
x	0	1	2	4	8
y	2	4	5	6	7



خشتەکە بەخاڵ بنوێنە، بەهێڵێکی گونجاو بەیەکیان بگەیەنە ئاڵوگۆڕ لە نێوان دوو تەوەرەی x و y لە جووتە ڕێکخراوی هەرخاڵێکدا، لە ڕوونکردنەوەی پەیوەندییەکە دابکە.

x	2	4	5	6	7
y	0	1	2	4	8

وێنەی هەر خاڵێك بکێشە بە وێنەدانەوەی بە دەوری ڕاستەهێڵی $y = x$ بە هێڵێکی گونجاو خاڵە دەستکەوتووەکان بەیەك بگەیەنە.



بواری نەخشەکە: $\{x/0 \le x \le 8\}$

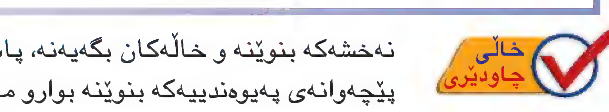
مەودای نەخشەکە: $\{y/2 \le y \le 7\}$

بواری پێچەوانەی نەخشەکە $\{x/2 \le x \le 7\}$

مەودای پێچەوانەی نەخشەکە $\{y/0 \le y \le 8\}$

لە بیرت بێت

پەیوەندی: بریتییە لەکۆمەڵە جووتە ڕێکخراوێك.
نەخشە: بریتییە لەو پەیوەندییەی کە هەر بەهایەکی x بەتەنها یەك بەهای y دەبەستێتەوە



خاڵی چاودێری نەخشەکە بنوێنە و خاڵەکان بگەیەنە، پاشان پێچەوانەی پەیوەندییەکە بنوێنە بوارو مەودای هەریەك لە دوو پەیوەندییەکە دیاریبکە.

x	1	3	4	5	6
y	0	1	2	3	5

کاتێك پەیوەندییەکە دەبێت بە نەخشە، پێچەوانەکەی پەیوەندییکە بە $f^{-1}(x)$ هێما دەکرێت ئەمەش ناکاتە هەڵگەڕاوەی $f(x)$. ئەو دوو نەخشەیەی یەکتری هەڵدەوەشێنن پێیان دەوترێت **پێچەوانەی نەخشە Inverse functions** و هەریەکەیان پێچەوانەی نەخشەکەی تریان دەبێت.

بۆ دەرەوە 9	←	نەخشەی $f(x)=x+6$	←	بۆ ناوەوە 3
بۆ دەرەوە 3	←	پێچەوانەی نەخشە $f^{-1}(x)=x-6$	←	بۆ ناوەوە 9

بۆ دۆزینەوەی پێچەوانەی نەخشەکە، کردارە پێچەوانەکان بەکاربهێنە. هەرچەندە نەخشەی $f(x)$ ژمارە 6 دەخاتە سەر x ئەوا پێچەوانەی نەخشەکە $f^{-1}(x)$ ، ژمارە 6 لە x دەردەکات

نموونە 2 نووسینەوەی پێچەوانەی نەخشە بەبەکارهێنانی کردارە پێچەوانەکان

کردارە پێچەوانەکان بۆ دۆزینەوەی پێچەوانەی نەخشەکان بەکاربهێنە بۆ نەخشەی $f(x)=2x$

$f(x)=2x$ *لە نەخشەی $f(x)$ ژمارەی x لێکدانی 2 دەکرێت.*

$f^{-1}(x)=\frac{x}{2}$ *لە پێچەوانەی نەخشەی $f^{-1}(x)$ ژمارە x دابەشی 2 دەکرێت*

پاسادانی بکە. ژمارە 7 وەك ژمارەی تێکردن بەکاربهێنە.

$f(x)=2x$

$f(7)=2(7)$ *7 لە جیاتی x لە پێچەوانەی نەخشەکەدا دابنێ.*

$=14$

ژمارەی دەرچوو لە جیاتی x لە پێچەوانەی نەخشەکەدا دابنێ.

$f^{-1}(x)=\frac{x}{2}$

$f^{-1}(14)=\frac{14}{2}$ *14 لە جیاتی x دابنێ*

$=7$

پێچەوانەی نەخشە $f^{-1}(x)$ کاریگەری نەخشەی $f(x)$ لادەبات.

خاڵی چاودێری

2. کردارە پێچەوانەکان بۆ دۆزینەوەی پێچەوانەی نەخشەی هەر نەخشەیەك بەکاربهێنە.

أ $f(x)=\frac{x}{3}$

ب $f(x)=x+\frac{2}{3}$

نموونە 3 نووسینەوەی پێچەوانەی نەخشە بۆ نەخشەیەکی فرە هەنگاو

کردارە پێچەوانەکان بۆ دۆزینەوەی پێچەوانەی نەخشەی $f(x)=\frac{x}{4}-5$ **بەکاربهێنە**

$f(x)=\frac{x}{4}-5$ *نەخشەی $f(x)$ ژمارەی x دابەشی 4 دەکات، لە پاشاندا 5 لە ئەنجامەکە دەردەکات.*

$f^{-1}(x)=4(x+5)$ *بۆ لابردنی 5 – پێویستە 5+ بخرێتە سەر x پاشاندا لە 4 ی بدە بۆ لابردنی کاریگەری دابەشی 4 .*

پاسادان بکە

$f(40)=\frac{40}{4}-5=10-5=5$? $f^{-1}(5)=4(5+5)=4(10)=40$ ✓



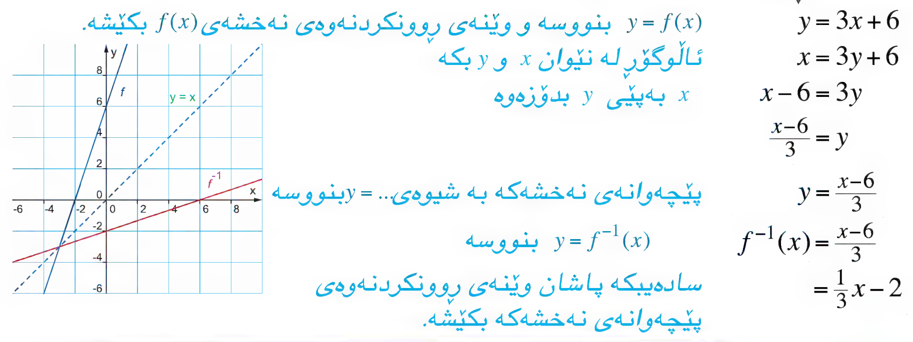
خاڵی چاودێری

3. بۆ دۆزینەوەی پێچەوانەی نەخشەی $f(x)=5x-7$ کردارە پێچەوانەکان بەکاربهێنە.

دەتوانیت پێچەوانەی نەخشە بە ڕێگای ئاڵوگۆرکردنی x و y لە ڕێسای نەخشەکەدا پاشان y بەپێی x هەژماربکە.

نموونە 4 نووسینەوەی پێچەوانەی نەخشە و کێشانی ڕوونکردنەوەییەکەی.

وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $f(x)=3x+6$ بکێشە، پاشان پێچەوانەی نەخشەکە بنووسە وێنە ڕوونکردنەوەییەکەی بکێشە.



$y=3x+6$ بنووسە و وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)$ بکێشە. $y=f(x)$

$x=3y+6$ ئاڵوگۆڕ لە نێوان x و y بکە

$x-6=3y$ x بەپێی y بدۆزەوە

$\frac{x-6}{3}=y$

$y=\frac{x-6}{3}$ پێچەوانەی نەخشەکە بە شیوەی... = yبنووسە

$f^{-1}(x)=\frac{x-6}{3}$ $y=f^{-1}(x)$ بنووسە

$=\frac{1}{3}x-2$ سادەیبکە پاشان وێنەی ڕوونکردنەوەی پێچەوانەی نەخشەکە بکێشە.



وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=\frac{2}{3}x+2$ بکێشە. پاشان پێچەوانەی نەخشەکە وێنە ڕوونکردنەوەییەکەی بکێشە.

هەر جارێك ویستت کردارێك لابەیت، بە هەنگاوەکانتا بگەڕێوە دواوە. بە دەستپێکردن لە ئەنجامەکەوە هەتا گەیشتن بەچوونەناوی سەرەکی. لەم بارەدا دەتوانیت پێچەوانەی نەخشە بەکاربهێنیت.

نموونە 5 جێبەجێکردن لە بازرگانیدا

بازرگانێك ئامێرێکی وێنەگرتنی بە 103 140 دینار فرۆشت. ئەم برە پارە نرخی ئامێرەکە و زیادکردنی 3000 دینار نرخی کاغەزی بەرگ تێگرتنەکەی کەبازرگانەکە دایناببوو 8% نرخی باجەکەی بوو. کڕیارەکە ئامێرەکەی بەدڵ نەبوو فرۆشیارەکە چۆن ئەو برە پارەیەی دەیگەڕێنێتەوە بۆ کڕیار هەژماردەکات.

هەنگاوی 1 نەخشەکە بنووسە کە بڕی تێچوونی بە پێی نرخی ئامێرەکە p دەنوێنێت.

$c(p)=1.08(p+3000)$ تێچوون وەك نەخشەیەك بە پێی نرخی ئامێرەکە

هەنگاوی 2 پێچەوانەی ئەو نەخشەیە بنووسە کە نرخی ئامێرەکە بە پێی تێچوونەکەی دەینوێنێت.

$c(p)=1.08(p+3000)$

$c(p)=1.08p+3240$ بەشینەوەی بکە

$c(p)-3240=1.08p$ 3240 لە هەردوو لا دەربکە

$\frac{c(p)-3240}{1.08}=p$ دابەشیکە بۆ جیاکردنەوەی p

هەنگاوی 3 بەهای پێچەوانەی نەخشەکە هەژماربکە کاتێك $c=103\,140$

$p=\frac{103\,140-3240}{1.08}=92\,500$

بازرگانەکە پێویستە 92 500 دینار بداتەوە بە کڕیار

پاسەدانبکە

$c(p)=1.08(925\,00+3000)$ بە لەجیاتی دانان

$=1.08(95\,500)$

$=103\,140$

بیرت بێت

لەکاتی شیکارکردنی پرسیارێکی ژیانی ڕۆژانەدا ئاڵوگۆڕ لەنێوان گۆڕاوی ئازاد و گۆڕاوی پەیوەست ناکرێت، چونکە هەریەکەیان تایبەتمەندی خۆی هەیە.



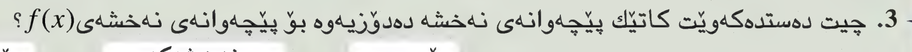
بۆ ئامادەکردنی چا $\frac{1}{6}$ کەوچکێك لە چا بۆ هەر کوپێك ئاو، و یەك کەوچك لە چا بۆ قۆرییەك ئاو بەکاربهێنە، پێچەوانەی نەخشە بۆ دیاریکردنی ژمارەی کوپەکان کاتێك 7 کەوچك چا بەکارهاتبێت.

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. ئەنجامی ئاڵوگۆڕکردنی نێوان x و y باسبکە، بۆ دۆزینەوەی پێچەوانەی نەخشەی $x = f(x)$ لە بەکارهێنانی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $f(x)$ دا، چۆن پێشبینی ئەو ئەنجامەت دەکرد؟

2. نموونەیەك بهێنەوە، بۆ نەخشەیەك پێچەوانەی پەیوەندییەکەی نەخشەبێت و نموونەیەکی تر پێچەوانەی پەیوەندییەکەی نەخشە نەبێت.

3. چیت دەستدەکەوێت کاتێك پێچەوانەی نەخشە دەدۆزیەوە بۆ پێچەوانەی نەخشەی $f(x)$؟



4. ئەم خشتەیەی بەرامبەر بکێشە و تەواوی بکە. نموونەیەك بێنەوە لەسەر نەخشەی $f(x)$ بۆناو و بۆ دەر و پێچەوانەی نەخشەکە بۆ $f(x)$

فێربە

2-4 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** لە کاتی ئاڵوگۆڕکردنی نێوان x و y هەردەم ئەنجامەکەی ___?___ پێچەوانەیە. (پەیوەندی یان نەخشەی)

بڕوانە نموونە 1

وێنەی ڕوونکردنەوەی ئەم نەخشانە بکێشە. کە بەم خشتانە نوێنراون. پاشان وێنەی ڕوونکردنەوەیی پێچەوانەی نەخشەکە بکێشە بوارو مەودای هەریەکە لە دوو پەیوەندییەکە دیاریبکە

2

x	1	2	3	4
y	1	2	4	8

3

x	3	4	1	−1
y	−1	−2	−4	−4

بڕوانە نموونە 2

کرداره پێچەوانەکان بۆ نووسینی پێچەوانەی نەخشە بەکاربهێنە.

4 $f(x) = x + 3$ **5** $f(x) = 4x$ **6** $f(x) = \frac{x}{2}$ **7** $f(x) = x - 2\frac{1}{2}$

بڕوانە نموونە 3

8 $f(x) = 5x - 1$ **9** $f(x) = \frac{x}{2} + 3$ **10** $f(x) = 3 - \frac{1}{2}x$

11 $f(x) = \frac{1}{2}(3 - 3x)$ **12** $f(x) = 4(x + 1)$ **13** $f(x) = \frac{3x - 5}{2}$

بڕوانە نموونە 4

وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە، پاشان پێچەوانەی نەخشەکە بدۆزەوە و وێنە ڕوونکردنەوەکەی بکێشە.

14 $f(x) = 5 - 2x$ **15** $f(x) = \frac{x}{4} + 2$ **16** $f(x) = 10 + 0.6x$

بڕوانە نموونە 5

17 **باری کەش وهەوا** نەخشەی $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ بەکاردێت بۆ گۆڕینی پلەکانی لە پێوەری فەهرەنهایت بۆ پێوەری سەدی بۆ پێچەوانەی نەخشەکە بدۆزەوە کە پلەکانی گەرما لە پێوەری سەدی بۆ پێوەری فەهرەنهایت دەگۆڕێت. $16°$ پلەی سەدی بۆ پلەکانی فەهرەنهایت بگۆڕە

ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

وێنەی ڕوونکردنەوەی ئەم نەخشە بکێشە کەبەم خشتانە نوێنراون پاشان وێنەی ڕوونکردنەوەیی پێچەوانەی پەیوەندییەکە بکێشە، بوار و مەودای هەریەکە لە دوو پەیوەندییەکە دیاریبکە.

18

x	−1	2	3	5
y	1	3	5	5

19

x	−4	−2	0	2	4
y	−2	−1	0	1	2

بۆ شیکاری ڕاهێنانەکان	سەیری نموونە بکە
19–18	1
22–20	2
25–23	3
28–26	4
29	5

ڕاهێنانی ئازاد

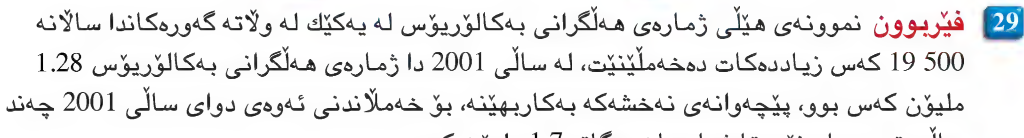
کرداره پێچەوانەکان بۆ نووسینی پێچەوانەی نەخشە بەکاربهێنە.

20 $f(x)=0.825x$ **21** $f(x)=x-1\frac{3}{4}$ **22** $f(x)=\frac{x}{0.25}$

23 $f(x)=21-32x$ **24** $f(x)=145+12.5x$ **25** $f(x)=\frac{1}{5}x+12$

وێنەی ڕوونکردنەوەیی هەر نەخشەیەك لەمانەی خوارەوە بکێشە و پاشان پێچەوانەی نەخشەکە بدۆزەوە و وێنەی ڕوونکردنەوەکە بکێشە.

26 $f(x)=\frac{4}{5}(x-15)$ **27** $f(x)=2-\frac{x}{3}$ **28** $f(x)=1.21x$



29 **فێربوون** نموونەی هێڵی ژمارەی هەڵگرانی بەکالۆریۆس لە یەکێك لە وڵاتە گەورەکاندا ساڵانە 19 500 کەس زیاددەکات دەخەملێنێت، لە ساڵی 2001 دا ژمارەی هەڵگرانی بەکالۆریۆس 1.28 ملیۆن کەس بوو، پێچەوانەی نەخشەکە بەکاربهێنە، بۆ خەملاندنی ئەوەی دوای ساڵی 2001 چەند ساڵی تر دەخایەنێت تا ژمارەیان دەگاتە 1.7 ملیۆن کەس.

30 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** وێنەی ئەو ڕاستەهێڵە بکێشە کە بە دوو خاڵی(2,9) (3,4) تێپەر دەبێت.

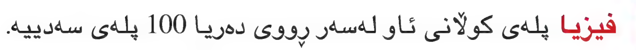
أ لاری ڕاستەهێڵەکە چەندە؟

ب لاری ڕاستەهێڵی ڕوونکردنەوەیی پێچەوانەی نەخشەکە چەندە؟

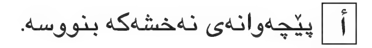


شاخەوانەکان لە بەرزایی سەرەکەش لە ڕووی دەریاوە دەتوانن چایی کوڵاو بخۆنەوە چونکە پلەی گەرمی نزمە.

31 **فیزیا** پلەی کوڵانی ئاو لەسەر ڕووی دەریا 100 پلەی سەدییە.



$f(x)=100-3.37x$ نەخشەی پلەی کوڵانی ئاوە لە بەرزی x km لە ئاستی ڕووی دەریاوە دەنوێنێت.



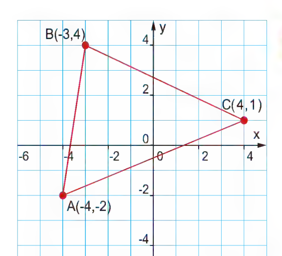
أ پێچەوانەی نەخشەکە بنووسە.

ب ئەو بەرزاییە چەندە کە پلەی کوڵانی ئاوتێیدا لە 90 پلەی سەدی کەمتر دەبێت وەڵامەکەت بۆ نزیکترین 10 m مەتر نزیکبکەوە.

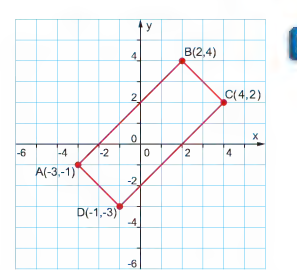
ج پلەی کوڵانی ئاو لە سەر لوتکەی شاخی لۆتس لە نیپاڵ 71.3 پلەی سەدییە، بەرزی ئەم لوتکە لە ئاستی ڕووی دەریا و بەمەتر بدۆزەوە؟

ئەندازە سەری ئەم شێوازە ئەندازەییانە بدۆزەوە کە پێچەوانەی پەیوەندییەکە دەنوێنێت.

32



33



34 **بیری ڕەخنەگر** پەیوەندی پێچەوانەی نەخشەی $f(x)=3$ چییە؟ ئایا ئەم پەیوەندییە پێچەوانەی نەخشەیە؟ ئەمە ڕوونبکەوە.

35 **بنووسە** لە پێشبڕکێی تێپەڕاندنی بۆرییەکان، هەڵۆ لە ماوەی 12.59 چرکە 10 m ی بڕی وا دابنێ هەڵۆ ماوەکەی بە خێراییەکی نەگۆڕ بڕیوە. ئەو نەخشە بنووسەکە کە ماوەی بڕاو بەپێی کات دەنوێنێت. پێچەوانەی نەخشەکە بنووسە و بۆ هەژمارکردنی کاتی خەیانراو لە بڕینی ماوەی 25 m بە خێرایی نەگۆڕ بەکاربهێنە.

36 نرخی بلیتی چوونە ژوورەوە بۆ سێرکی جیهانی 22 000 دینارە. ئەگەر بە هۆی کارتی متمانە پارەکە بدرێتە سێرکەکە گۆژمەکە بەبڕی 3 500 دینارە زیاد وەردەگرێت، ژمارەی پلیتە کڕاوکان هەر چەند بن.

أ نەخشەیەك بنووسە، ئەو بڕە پارەی بە هۆی کارتی متمانەوە دەدرێت بنوێنێت، بە پێی ژمارەی بلیتە کڕاوەکان n .

ب پێچەوانەی نەخشەکە بنووسە و بەکاریبهێنە بۆ دۆزینەوەی ژمارەی بلیتە کڕاوەکان بەهۆی کارتی متمانەوە، ئەگەر بزانیت بڕی تیچوونەکەی 157 500 دینار بووە.

ج ئایا لە توانادایە تێچوونی کڕینی چەند بلیتێك بە هۆی کارتی متمانەوە 332 500 دینار بێت؟

37 **هەڵە لە شیکردنەوە** دوو خوێندکار هەستان بەدۆزینەوەی پێچەوانەی نەخشە بۆ نەخشەی $f(x)=\frac{1}{2}x+1$ کامیان هەڵەیە؟ هەڵەکە دیاریبکە.

(أ)
$f(x)=\frac{1}{2}x+1$
$f^{-1}(x)=2(x-1)$

(ب)
$f(x)=\frac{1}{2}x+1$
$f(x)=2x-1$



38 **بنووسە** ئەوەی لە نەخشەکە و ڕوونکردنەوەکەیدا ڕوودەدات دەربخە. کاتێك ئاڵوگۆڕ لە نێوان پۆوتانی هەر خاڵێك دەکرێت.

39 **بیری ڕەخنەگر** ئایا دەگونجێت پێچەوانەی پەیوەندییەکە بۆ پەیوەندییەك نەخشە نەبێت و ببێت بە نەخشە؟ بە نموونە وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

40 **کڵاوەکان** پێوانەی کڵاو بە پێی چێوەی سەر نەخشەیەکی هێڵییە پێوانەی کڵاوی سەرێك چێوەکەی 55 cm بێت بریتییە لە 17.5 و پێوانەی کڵاوی سەرێك چێوەکەی 57 cm بریتییە لە 18 .

أ نەخشەیەکی هێڵی بۆ پێوانەی کڵاوێك s بە پێی چێوەی سەرێك c بنووسە؟

ب پێچەوانەی پەیوەندییەکەی بدۆزەوە. ئایا نەخشەیە؟ چی دەنوێنێت؟

ج کڵاوێکت دۆزییەوە پێوانەکەی 18.5 چێوەی سەری خاوەنەکەی چەندە؟

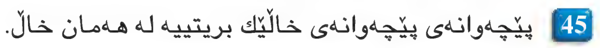
دیاریبکە، ئەگەر ئەم وتانە، هەمیشە ڕاستە، یان هەندێك جار ڕاستە یان هەمیشە هەڵەیە.

41 پێچەوانەی جووتە ڕێکخراوێك خاڵێك لە سەر وێنە ڕوونکردنەوەییەکە دەنوێنێت، کە بریتییە لەو جووتە ڕێکخراوەی وێنەکەی و وێنەدانەوەی خاڵەکەیە بەدەوری ڕاستەهێڵی $y=x$

42 پێچەوانەی نەخشە بۆ نەخشەیەکی هێڵی، نەخشەیەکی هێڵییە.

43 پێچەوانەی نەخشە بۆنەخشەیەکی هێڵی لارییەکەی موجەب بێت، دەکاتە نەخشەیەکی هێڵی لارییەکەی سالبە

44 پێچەوانەی نەخشە بۆ نەخشەیەکی هێڵی لارییەکەی گەورەتر بێت لە 1 ، بریتییە لە نەخشەیەکی هێڵی لارییەکەی بچوکترە لە 1



45 پێچەوانەی پێچەوانەی خاڵێك بریتییە لە هەمان خاڵ.

46 پێچەوانەی پەیوەندی بۆ نەخشەی $y=k$ کاتێك k ژمارەیەکی نەگۆڕبێت، نەخشە نییە.



47 **چوونە ژێر ئاو** (غوص) ئەو کەسەی ئەم یارییە ئەنجام دەدات، دەزانێت پەستانی ئاو (بەکیلۆ باسکاڵ kpa دەپێورێت)، بەزیادبوونی قووڵایی ئاو (بەمەتر دەپێورێت) زیاددەکات، کە ژێر دەریاوانەکە پێی دەگات وێنەی بەرامبەر تایبەتە بە ئاوی سازگار.

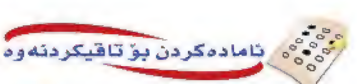


أ پەستان وەك نەخشەیەك بە پێی قووڵی بنووسە.

ب بە شێوەیەکی گونجاو بوار و مەودای ئەم نەخشەیە دیاریبکە.

ج پێچەوانەی نەخشە بۆ نەخشەی لقی أ بدۆزەوە.

د ئایا قووڵاییەك هەیە لە نەخشەکە، بە هەمان ژمارە بۆ قووڵی و پەستان دەردەبڕێت؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.



ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە

48 کام لەمانەی خوارەوە پێچەوانەی نەخشەیە بۆ نەخشەی $f(x)=4x-\frac{3}{4}$

أ $f^{-1}(x)=\frac{1}{4}x+\frac{3}{16}$

ب $f^{-1}(x)=-\frac{1}{4}x+3$

ج $f^{-1}(x)=\frac{1}{4}x+3$

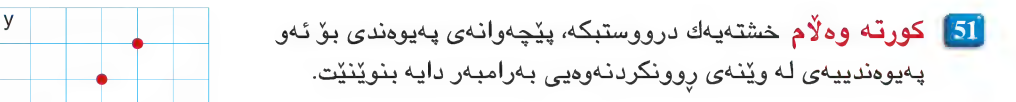
د $f^{-1}(x)=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{16}$

49 هێمن بۆ چاکردنی ئۆتۆمبێلەکەی 000 175 دینار بۆ نرخی پارچەی یەدەکی، 000 35 دینار بۆ هەر کاتژمێرێکی کە لە چاککردنەوەدا پیدەچێت، پارەدەدات. ئەم نەخشەیە $f(x)=175\,000+35\,000x$ ڕێسای هەژمارکردنی تێچوونی چاککردنەوەی ئۆتۆمبێلەکە بە پێی ژمارەی کاتژمێرەکان کە بۆ چاکردنەوەی دەیخایەنێت کام لەمانەی خوارەوە پێچەوانەی نەخشەکە دەنوێنێت؟

(أ) ژمارەی کاتژمێرەکان بە پێی تێچوون.
(ب) تێچوون بە پێی ژمارەی کاتژمێرەکان.
(ج) کرێی کاتژمێری چاککردنەوە بە پێی تێچوون
(د) تێچوون بە پێی کرێی کاتژمێری چاککردنەوە.

50 کام خاڵ پێچەوانەی خاڵی $(5,-2)$ دەبێت؟

(أ) $(-5,2)$ (ب) $(5,2)$ (ج) $(-2,5)$ (د) $(2,-5)$



51 **کورتە وەڵام** خشتەیەك دروستبکە، پێچەوانەی پەیوەندی بۆ ئەو پەیوەندییەی لە وێنەی ڕوونکردنەوەیی بەرامبەر دایە بنوێنێت.



بەرەنگاری و فراوانکردن

پێچەوانەی نەخشە بۆ هەر نەخشەیەك لەمانە بدۆزەوە کاتێك $y=f(x)$

52 $y=mx+b$ **53** $ax+by=c$ **54** $y-y_1=m(x-x_1)$

x	y
−3	9
−2	4
−1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

55 ئەو پەیوەندییەی لە خشتەی بەرامبەر پێناسەکراوە بەڕوونکردنەوەیی بنوێنە پاشان وێنەی هەر خاڵێك بە وێنەدانەوەی بەدەوری ڕاستەهێڵی $y=x$ بکێشە بۆ دەستکەوتنی وێنەی ڕوونکردنەوەیی پێچەوانەی پەیوەندییەکە. ئەگەر هاوکێشەی بنەڕەتی $y=x^2$ بێت.
بە شێوەی جەبری بسەلمێنە کە هاوکێشەی پێچەوانەی پەیوەندییەکە بریتییە لە $x=y^2$

56 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** چی دەڵێت دەربارەی نەخشەیەکی هێڵی لارییەکەی و لاری پێچەوانەی نەخشەکە یەکسانن.

وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە و پێچەوانەی نەخشەکە بکێشە.

57 $y=3$ **58** $y=x^3$ **59** $y=2^x$

پێداچوونەوەی لولپێچی



نرخی پشك	
ڕۆژ	گۆڕان لە نرخدا
1	−230
2	+2580
3	−640
4	+1270
5	−2120

60 **بازرگانی** چەند پشکێك، بە بڕی 180 45 دینار کڕا، بۆ هەر پشکێك ئەم خشتەی بەرامبەر گۆڕانی نرخی پشکەکە پاش کڕینی دەنوێنێت.
(پۆلەکانی پێشوو).

(أ) بەهای ئەم پشکانە لە کەمەوە بۆ زۆر ڕیز بکە، لەو نرخەوە کە لە ڕۆژی 0 ـە وەکە ڕۆژی کڕینە.

(ب) مەودای نرخەکان بە بەکارهێنانی زمانی کۆمەڵەکان بنووسە.

نەخشەیەکی ڕادەدار لە کەمترین پلەی لە توانادا بوو دا بنووسە، کە هاوکۆڵکەی سەرەکی 2 و سفرکانی ئەم ژمارە پێدراوانە بێت.

61 $1 ، 2 ، -3$ **62** $-\sqrt{5} ، \sqrt{5}$ **63** $2 ، 1 ، -1$ **64** $9 ، 8 ، -3$

دیاریبکە، نەخشەکە گەشەیە یان پووکانەوەیە، پاشان وێنەی ڕوونکردنەوەیی بکێشە *(وانەی 4-1)*

65 $f(x)=15\left(\frac{89}{100}\right)^x$ **66** $f(x)=\frac{1}{25}(0.5^x)$

67 $f(x)=2(1.1^x)$ **68** $f(x)=0.01(1.9^x)$

3-4 نەخشە لۆگاریتمییەکان

Logarithmic functions





ئامانجەکان

• شێوەی هاوتای نەخشەی توانی و نەخشەی لۆگاریتمی دەنووسێت و بەهایەکەی هەژمار دەکات.

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

لۆگاریتم بۆ پێوانی ترشی ئاو(PH) بەکاردێت

زاراوەکان Vocabulary

لۆگاریتم Logarithm

لۆگاریتمی ئاسایی Common Logarithm

نەخشەی لۆگاریتم Logarithmic Function

چەند جار دینارێك چەند جارە بکەیت دەبێتە 8 دینار؟ دەتوانیت ئەمە بە هاوکێشەیەك بنوێنیت $(2^x)=8$ لەوانەیە بتوانیت ئەم هاوکێشەیە بە هزری شیکار بکەیت، ئەگەر لە بیرت بێت کە $2^3=8$ کەواتە پێویستە یەك دینار 3 جار چەندجارە بکەیت بۆ ئەوەی 8 دینارت دەستکەوێت.

چەند جار دینارێك چەند جارە بکەیت بۆ ئەوەی ببێتە 512 دینار؟ دەتوانیت ئەم پرسیارە شیکاربکەیت، ئەگەر بتوانیت هاوکێشەی $2^x=512$ شیکار بکەیت، بەبەکارهێنانی کرداری پێچەوانەی کرداری بەرزکردنەوەی ژمارەیەکی دیاریکراو بۆ هێزێك (توانێکی) دیاریکراو. ئەو کردارە پێچەوانەیە بریتییە لە هەژمارکردنی لۆگاریتمی. **لۆگاریتم** بریتییە لە توانی ئەو هێزەی کە بەرز دەکرێتەوە بۆ ژمارەیەکی (بنچینەیەکی) دیاریکراو بۆ ئەوەی بەهای دیاریکراوت دەستکەوێت، دەتوانیت هاوکێشەی توانی بە شێوەی هاوکێشەی لۆگاریتمی بنووسیت و بە پێچەوانەوە.

خوێندنەوە

$\log_b a=x$ بەم شێوەیە بخوێنەوە: x یەکسانە بە لۆگاریتمی a بە بنچینە b

سەرەنجبدە لۆگاریتم بریتییە لە توان.

هاوکێشەی لۆگاریتمی   **هاوکێشەی توانی**

$$\log_b a = x \quad \longleftrightarrow \quad b^x = a$$

$$b>0,\ b\neq 1$$

نموونە 1 گۆڕین لە شێوەی توانی بۆ شێوەی لۆگاریتمی

هەر هاوکێشەیەکی توانی بەشێوەی لۆگاریتمی بنووسە.

	هاوکێشەی توانی	هاوکێشەی لۆگاریتمی
أ	$2^6=64$	$\log_2 64=6$
ب	$4^1=4$	$\log_4 4=1$
ج	$5^0=1$	$\log_5 1=0$
د	$5^{-2}=0.04$	$\log_5 0.04=-2$
هـ	$3^x=81$	$\log_3 81=x$

بنچینەی توان دەبێتە بنچینەی لۆگاریتم، توانی هێز بریتییە لە لۆگاریتم، هێزی هەر ژمارەیەك جگە لە سفر دەکاتە 1 لەوانەیە توان (یان لۆگاریتم) سالب بێت. لەوانەیە لۆگاریتم (یان توان) گۆڕاو بێت.



1. ئەم هاوکێشە توانییانە بە شێوەی لۆگاریتمی بنووسە.

أ $9^2=81$ ب $3^3=27$ ج $x^0=1(x\neq 0)$

نموونــــه 2 گۆڕین لە شێوەی لۆگاریتمی بۆ شێوەی توانی.

هاوکێشەی لۆگاریتمی بەشێوەی توانی بنووسە

	هاوکێشەی لۆگاریتمی	هاوکێشەی توانی
أ	$\log_{10} 100=2$	$10^2=100$
ب	$\log_7 49=2$	$7^2=49$
ج	$\log_8 0.125=-1$	$8^{-1}=0.125$
د	$\log_5 5=1$	$5^1=5$
هـ	$\log_{12} 1=0$	$12^0=1$

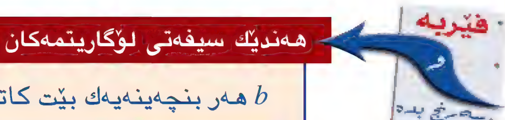
بنچینەی لۆگاریتم دەبێتە بنچینەی هێز

لۆگاریتم بریتییە لە توانی هێز، لەوانەیە لۆگاریتم سالب بێت

خاڵی چاودێری 2. هاوکێشەی لۆگاریتمی بە شێوەی توانی بنووسە.

أ $\log_{10} 10=1$ ب $\log_{12} 144=2$ ج $\log_{\frac{1}{2}} 8=-3$

لۆگاریتم توانە. ئەمەش ڕێگات پێدەدات، یاسایەکانی هێز لەسەر لۆگاریتمەکان جیبەجێبکەیت.
لەوانەیە ئەو سیفەتانەی خوارەوەت سەرەنجدابێت، لە دوا نموونەدا.



b هەر بنچەینەیەك بێت کاتێك $b>0$ و $b\neq 1$.

شێوەی لۆگاریتمی	شێوەی توانی	نموونە
لۆگاریتمی b بنچینەی b $\log_b b=1$	$b^1=b$	$\log_{10} 10=1$ $10^1=10$
لۆگاریتمی 1 $\log_b 1=0$	$b^0=1$	$\log_{10} 1=0$ $10^0=1$

تێبینی:
ئەگەر $1>b>0$
ئەوا $\log_n =$
ژمارەیەکی سالب
کاتێك $n>0$

لۆگاریتمی ئاسایی لۆگاریتمی بنچینە 10. ئەگەر بنچینەی لۆگاریتم دیاری نەکرابێت، ئەوا 10 یە
نموونە $\log 5=\log_{10} 5$

نموونــــه 3 هەژمارکردنی بەهای لۆگاریتم بە هزری.

بەهای ئەمانەی خوارەوە بە هزری هەژماربکە.

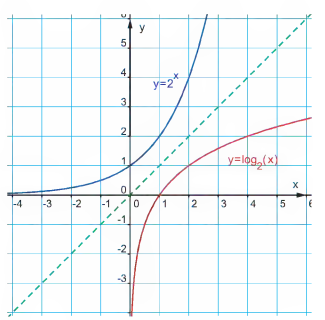
أ
$\log 1000$
$10^? = 1000$
$10^3 = 1000$
$\log 1000 = 3$

ب
$\log_4 \frac{1}{4}$
$4^? = \frac{1}{4}$
$4^{-1} = \frac{1}{4}$
$\log_4 \frac{1}{4} = -1$



3. بەهزری بەهای ئەم بڕانە بدۆزەوە.

أ $\log 0.00001$ ب $\log_{25} 0.04$

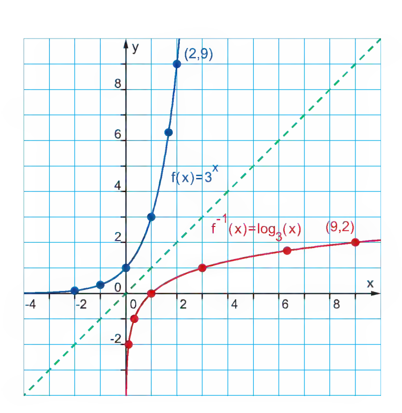


لەبەر ئەوەی لۆگاریتم پێچەوانەی توانە، ئەوا پێچەوانەی نەخشەیەکی توانی وەك $y = 2^x$ بریتییە لە نەخشەی لۆگاریتمی $y = \log_2 x$، پێویستە لە بیرتبێت کە بواری هەریەك لە دوو نەخشەکە بریتییە لە مەودای نەخشەکەی تر، مەودای هەریەکیان بریتییە لە بواری ئەویتریان.
بواری نەخشەی $y = 2^x$ بریتییە لە کۆمەڵەی هەموو ژمارە ڕاستییەکان R و مەوداکەی بریتییە لە کۆمەڵەی ژمارەی ڕاستییە موجەبەکان $\{y|y>0\}$
لەوەوە دەردەچێت کە بواری نەخشەی لۆگاریتمی $y = \log_2 x$. بریتییە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییە موجەبەکان $\{x|x>0\}$ و مەوداکەی کۆمەڵەی هەموو ژمارە ڕاستییەکانە R .

نموونـــــە 4 وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشە لۆگاریتمییەکان

بەها دراوەکانی گۆڕاوی x بۆ کێشانی وێنەی ڕوونکردنەوەیی پێچەوانەی نەخشەکە بکێشە، بوار و مەودای پێچەوانەی نەخشەکە دیاریبکە.

أ $f(x) = 3^x$ ؛ $x = -2, -1, 0, 1, 2$



وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $f(x) = 3^x$ بەبەکارهێنانی خشتەی بەهایەکان بکێشە.

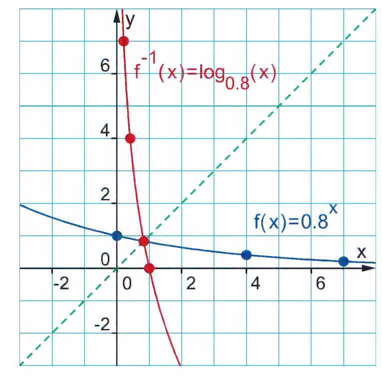
x	-2	-1	0	1	2
$f(x)=3^x$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

بۆ ئەوەی وێنەی ڕوونکردنەوەیی پێچەوانەی نەخشەکە $f^{-1}(x) = \log_3 x$ بکێشێت x ، $f(x)$ لە خشتەی سەرەوەدا ئاڵوگۆڕ بکە

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$f^{-1}(x)=\log_3(x)$	-2	-1	0	1	2

بواری پێچەوانەی $f^{-1}(x)$ بریتییە لە $\{x|x>0\}$ و مەوداکەی R.

ب $f(x) = 0.8^x$ ؛ $x = -3, 0, 1, 4, 7$



وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x) = 0.8^x$ بەبەکارهێنانی خشتەی بەهایەکان بکێشە.

x	-3	0	1	4	7
$f(x)=0.8^x$	2	1	0.8	0.4	0.2

بۆ ئەوەی وێنەی ڕوونکردنەوەیی پێچەوانەی نەخشەی $f(x)^{-1} = \log_{0.8} x$ بکێشیت x و $f(x)$ ئاڵوگۆڕ بکە لە خشتەی سەرەوە.

x	2	1	0.8	0.4	0.2
$f^{-1}(x)=\log_{0.8} x$	-3	0	1	4	7

بواری پێچەوانەی نەخشەی $f^{-1}(x)$ بریتییە لە $\{x|x>0\}$ و مەوداکەی R ـە



4. بەهایەکانی $x = -2, -1, 1, 2, 3$ بۆ کێشانی وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ بەکاربهێنە پاشان وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی پێچەوانەی نەخشەکە، و بوار و مەودای پێچەوانەی نەخشەکە دیاریبکە.





کیمیازانان بە شێوەی دووبارە بوونەوە سامپلەکانی باران بۆ دیاریکردنی ترشییەکەی تاقیدەکەنەوە، واتا دیاریکردنی خەستی ئایۆنەکانی هایدرۆجین(H^+)تێیدا. ترشی ئاوی باران بەبەکارهێنانی **pH** بە پێی ئەم نەخشە دەپێورێت:
$pH = -\log\left[H^+\right]$ کاتێك $\left[H^+\right]$ خەستی ئایۆنەکانی هایدرۆجینە کە بە مۆڵ لەیەك لیتر لە ئاوی باران دەپێورێت. **pH** ی ئاوی باران لە هەر شوێنێك بدۆزەوە.

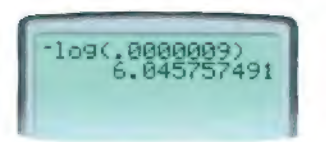
أ شوێنی A کاتێك خەستی ئایۆنەکانی هایدرۆجین 0.0000316 مۆڵ لە لیتر بێت.

$$pH = -\log\left[H^+\right]$$

$$pH = -\log(0.0000316)$$ لە جیاتیدابنێ

بژمێر بەکاربهێنە، بۆ دۆزینەوەی بەهای لۆگاریتمی بەبنچینە 10 دوگمەی log دابگرە. pH ی ئاوی باران لە شوێنی A بە نزیکەیی بریتییە 4.5

ب شوێنی B کاتێك خەستی ئایۆنەکانی هایدرۆجین دەگاتە 0.0000009 مۆڵ لە لیتر.



$$pH = -\log\left[H^+\right]$$

$$pH = -\log(0.0000009)$$

بژمێر بە کاربهێنە بۆ دۆزینەوەی لۆگاریتمی بنچینە 10 دوگمەی log دابگرە. pH ئاوی باران لە شوێنی B بریتییە لە 6 بەنزیکەیی.



.5 pH چای سارد دەگاتە چەند، خەستی ئایۆنەکانی هایدرۆجین تێیدا 0.000158 مۆڵ لە لیترێك بێت.

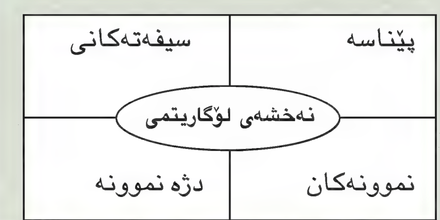
بیربکەوە و تاوتوێبکە

.1 ئەو هۆیە چییە کەوا دەکات $\log_b b$ بکاتە 1 ژمارەی موجەبی b هەر چەندێك بێت جگە لە 1 .

.2 روونبیکەوە ئایا $\log_a b$ و $\log_b a$ یەکسانن. پاڵپشتی وەڵامەکەت بکە

.3 ڕێکخەربە هێڵکاری بەرامبەر دروستبکەو تەواوی بکە.





3–4 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاراستەکراو

1 **زاراوەکان** لۆگاریتم لە هاوکێشەی توانی $a^x = b$ بریتییە لە ____؟

پروانە نموونە 1 هاوکێشەی توانی بە شێوەی لۆگاریتم بنووسە.

2 $2.4^0 = 1$ 3 $4^{1.5} = 8$ 4 $10^{-2} = 0.01$ 5 $3^x = 243$

پروانە نموونە 2 هاوکێشەی لۆگاریتمی بە شێوەی توانی بنووسە.

6 $\log_4 0.0625 = -2$ 7 $\log_x(-16) = 3$ 8 $\log_{0.9} 0.81 = 2$ 9 $\log_6 x = 3$

پروانە نموونە 3 بە هزری ئەمانەی خوارەوە هەژماربکە

10 $\log_7 343$ 11 $\log_3 \frac{1}{9}$ 12 $\log_{0.5} 0.25$ 13 $\log_{1.2} 1.44$

پروانە نموونە 4 وێنەی ڕوونکردنەوەیی ئەم نەخشانە بکێشە، بەبەکارهێنانی بەها پێدراوەکان. پاشان وێنەی ڕوونکردنەوەیی پێچەوانەی نەخشەکە بکێشە، بوار و مەودای پێچەوانەی نەخشەکە بدۆزەوە.

14 $x = -2, -1, 0, 1, 1.5 \,؛\, f(x) = 5^x$ 15 $x = -2, -1, 0, 1, 2 \,؛\, f(x) = 0.5^x$

پروانە نموونە 5 16 **کیمیا** بۆ لێکۆڵینەوەی هێزی ترشی گیراوەیەك، کیمیازانان نەخشەی $pOH = -\log[OH^-]$ بەکاردێنن کاتێك $[OH^-]$ هێما دەکرێت بۆ خەستی ئایۆنەکانی هایدرۆکسید کە بە مۆڵ لە لیترێك دەپێورێت. بەهای pOH ی ئاوێك چەندە خەستی ئایۆنەکانی هایدرۆکسید تێیدا 0.000000004 بێت؟

ڕاهێنان وشیکارکردنی پرسیارەکان

ئەم هاوکێشە توانییانە بە شێوەی لۆگاریتمی بنووسە.

17 $x^{2.5} = 32$ 18 $6^x = 216$ 19 $1.2^0 = 1$ 20 $4^{-1} = 0.25$

ئەم هاوکێشە لۆگاریتمییانە بە شێوەی توانی بنوسە.

21 $\log_5 625 = 4$ 22 $\log_2 x = 6$ 23 $\log_{4.5} 1 = 0$ 24 $\log_\pi \pi = 1$

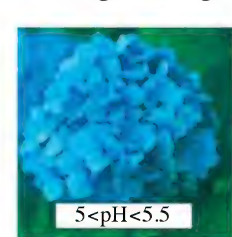
بەهزری بەهای ئەمانە هەژماربکە.

25 $\log_2 1$ 26 $\log 0.001$ 27 $\log_4 64$ 28 $\log_{0.1} 100$

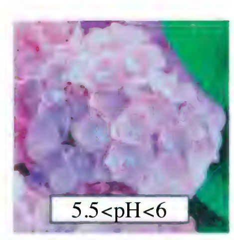
ئەم بەها پێدراوانە بۆ گۆڕاوی x بەکاربهێنە، بۆ کێشانی وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە، پاشان وێنەی ڕوونکردنەوەی پێچەوانەی نەخشەکە بکێشە، بوار و مەودای پێچەوانەی نەخشەکە دیاربیکە.

29 $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3 \,؛\, f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^x$ 30 $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3 \,؛\, f(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x$

31 **باخچەکان** ڕەنگی گوڵەکانی ئورتانسیا دیاریدەکرێت بە پێی بەهای pH ی خاکەکەی.



5<pH<5.5


5.5<pH<6


6<pH<6.5

ڕاهێنانی ئازاد

بۆشیکارکردنی ڕاهێنانەکان	سەیری نموونە بکە
20–17	1
24–21	2
28–25	3
30–29	4
31	5

تێبینی

ئەگەر بژمێرت نەبێ
log (0.000000004)
≈ -8.4

ڕێکخەری باخچەیەك خەستی ئایۆنەکانی هایدرۆجینی لە خاکی باخچەکە پێوا، و بینی دەکاتە 0.0000006 مۆڵ لە لیترێك. ئایا ئەو خاکە گوڵی ئورتانسیای شینی لێ دەڕوێت؟

32 **کارتی متمانە** لە هەندێك کارتەکانی متمانەدا، نەخشەی $n=\dfrac{\log A-\log P}{\log(1.0175)}$ هەژمارکردنی ژمارەی n لەو مانگانەی کە بەسەر سپاردنی گوژمەی بنەڕەتی p تێپەڕیوە، تا پارەکەی دەگاتە ئەو بڕەی ئێستای A و وا دابنێ ئەو پارەکەی لەو کاتەوە هیچ بڕێکی نەچۆتەسەر و لەم ماوەیەدا کارتەکە بەکارنەهاتووە.

أ ئاوات گوژمەی 1 000 000 دیناری دانا و حسابی ئێستای کارتەکەی 1 210 260 دینارە. چەند مانگ بەسەر سپاردنی گوژمەی بنەڕەتی تێپەڕیوە؟

ب ئەو پارە چەند مانگی تری پێویستە بۆ ئەوەی لە 1 420 000 دینار تێپەڕێت.

ج تێبینی چی لە وەڵامەکانی دوو پرسیاری پێشوو دەکەیت؟

33 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** بەهای b چەندە، ئەگەر زانیت $\log_a b=0$ ؟ ئەمە ڕوونبکەوە

34 **دەنگەکان** ئاستی توندی دەنگ L بە پێوەری لۆگاریتمی دەپێورێت، بەبەکارهێنانی نەخشەی $L=10\log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$، کاتێك L هێمای ئاستی توندی دەنگ بێت کە بەدیسیبل Decibel پێوراوە، و هێمای I توندی دەنگەکە بێت، هەروەها I_0 هێما بێت بۆ توندی دەنگی گوێچکەی خۆی

دەنگ	توندی
هەڵفرینی فڕۆکە	$10^{15}\,I_0$
دریل	$10^{12}\,I_0$
وشککەرەوەی قژ	$10^{7}\,I_0$
چرپە (دەنگیکی نزم)	$10^{3}\,I_0$
دەنگی جوولەی پەلکەدار	$10^{2}\,I_0$
دەنگی گویچکە خۆی	I_0

أ ئاستی توندی هەر دەنگێك لە خشتەی بەرامبەر دیاریبکە.

ب ئاستی توندی دەنگ لە یەکێك لە جۆرەکانی مۆسیقای توند 110 دیسیبلە ئەو دەنگە لە کوێ دادەنێیت بۆ ئەوەی خشتەکە بەرێکی بمینێتەوە.

ج **چی دەبێت ئەگەر ...؟** دیسبل دەیەکی یەکە پێوانەییەکی ترە، کە بریتییە لە بل Bel

35 **بیری ڕەخنەگر** ئەگەر n ژمارەیەکی ڕاستی بێت و 10^n بە شێوەی ڕەنووس نووسرا بێت ئایا $\log 10^n$ یەکسانە بە ژمارەی سفرەکان لە 10^nدا، پاڵپشتی وەڵامەکەت بەنموونەیەك بکە.

36 **خەمڵاندن** بە سوود وەرگرتن لە $\log 100=2$ و $\log 1000=3$ هەریەك لە $\log 200$ و $\log 500$ بخەڵێنە.

37 **خواردن** خشتەی بەرامبەر بەکاربهێنە بۆ دیاریکردنی جۆری هەر شەربەتێك بەزانینی خەستی ئایۆنەکانی هایدرۆجین لە لیترێکی ئەو شەربەتە.

شەربەت	مۆڵ pH
لیمۆ	$2.0-2.6$
مێووژ	$2.9-3.2$
پرتەقاڵ	$3.3-4.1$
تەماتە	$4.1-4.6$

أ 0.00014 مۆڵ لە لتر

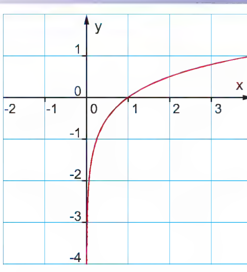
ب 0.0081 مۆڵ لە لتر

ج 0.00074 مۆڵ لە لتر

38 **بنووسە** هۆی چییە کە $\log_0 3$ و $\log_1 3$ پێناسە نەکراون



39 ئەم ڕوونکردنەوەی بەرامبەر هی کام لەم نەخشانەیە.



أ $f(x)=\log x$ ج $f(x)=\log_2 x$

ب $f(x)=\log_4 x$ د $f(x)=2^x$

40 کام لەم هاوکێشە لۆگاریتمییانە هاوتای $2^7 = 128$ دەبێت؟

ⓐ $\log_7 2 = 128$ ⓒ $\log_2 7 = 128$

ⓑ $\log_2 128 = 7$ ⓓ $\log_7 128 = 2$

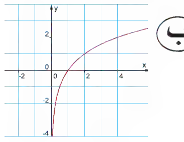
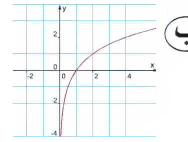
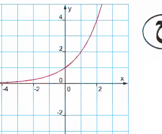
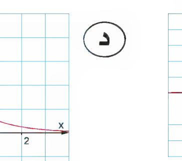
(أ) $\log_7 2 = 128$ (ج) $\log_2 7 = 128$

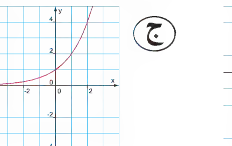
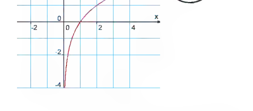
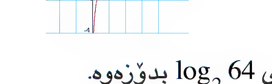
(ب) $\log_2 128 = 7$ (د) $\log_7 128 = 2$

41 کام لەمانەی خوارەوە باشترین خەملێندراوی بەهای $\log 50$ دەبێت؟

(أ) 1.7 (ب) 2.5 (ج) 5 (د) 10

42 کام لەم ڕوونکردنەوانە باشترین نواندە بۆ نەخشەی $f(x) = \log_{0.5} x$ ؟

(أ)  (ب)  (ج)  (د) 

43 **کورتە وەڵام** بەهای $\log_2 64$ بدۆزەوە.



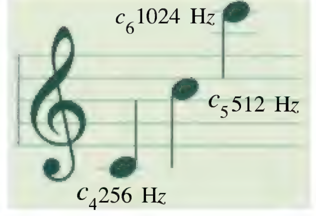
بەرەنگاری و فراوانکردن

44 وێنەی ڕوونکردنەوەیی دوو نەخشەی $\log_7 x$ و $\log_{0.7} x$ بکێشە باسی جیاوازی نێوان دوو نەخشەکە بکە، بە پشتبەستن بە ڕوونکردنەوەکانیان.

45 بەهای $\log_3 9$ و $\log_3 27$ و $\log_3 243$ هەژماربکە دەستەواژەیەك لە بارەی پەیوەندی نێوان ئەم سێ برە لۆگاریتمییانە بنووسە، بەبەکارهێنانی گۆڕاوەکان گشتاندن بکە.

46 بسەلمێنە $\log_7 7^{2x+1} = 2x+1$ لەگەڵ نووسینی هەر هەنگاوێك

47 **مۆزیك** پێوەری مۆسیقا پێوەری لۆگاریتمییە. لەو پێوەرەدا دەتوانین لەرەلەرەی هەر نۆتەیەك بە ژمارەی لەرەلەرەکان لەهەر چرکەیەکدا دەرببڕین، یان ژمارەی هێرتزەکان بە هێزێك لە هێزەکانی ژمارە 2 دەرببڕین.



(أ) لەرەلەرەی نۆتەی C_7 بە شێوەی توانی و بە شێوەی لۆگاریتمی هەژماربکە.

(ب) ئەو نۆتەیە چییە کە لەرەلەرەکەی دەگاتە 32 هێرتز؟

پێداچوونەوەی لولپێچی

ئەم برانە بە سادەترین شێوە بنووسە، وا دابنێ بەهای هەموو گۆڕاوەکان سفر نین (پۆلەکانی پێشوو)

48 $\left[\left(2a^4\right)\left(5b^2\right)\right]^2$

49 $\dfrac{8s^2t^6}{4st^8}$

50 $-2t^2\left(5st^{-1}\right)$

51 $7a^{-2}b^3\left(3ab+4a^{-1}b^2\right)$

52 **بیناکاری** کاتی دروستکردنی بینایەك، بەردێك لەبەرزی $7\ m$ کەوتە خوارەوە، نەخشەی $h(t) = h_0 - 4.9t^2$ بەکاربهێنە بۆ هەژمارکردنی ئەو کاتەی دەیخایەنێت تاوەکو بەردەکە دەگاتە زەوی، بـا h هێمایی بەرزی بەردەکە بێت بەمەتر پاش t چرکە لە کەوتنی و h_0 هێمای بەرزی بنەڕەتی بێت بە مەتر پێش کەوتنی (قۆناغەکانی پێشوو).

خشتەی بەهایەکانی هەر نەخشەیەك تەواوبکە. بەهایەکان بۆ نزیکترین بەش لەسەد نزیکبکەوە.

	x	-2	-1	0	1	2
53	$f(x) = 1.7^x$					
54	$f(x) = 0.6^x$					
55	$f(x) = 0.3^x$					

بەشی 4

تاقیکردنەوەی نیوەی بەش

1-4 نەخشەکانی توانی و گەشەو پووکانەوە

دیارییکە، ئایا هەریەك لەم نەخشانە نەخشەی گەشەکردن یان نەخشەی پووکانەوەیە.

1 $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ 2 $f(x)=\frac{1}{5}(0.2)^x$ 3 $f(x)=14(1.4)^x$ 4 $f(x)=6.4\left(1\frac{3}{8}\right)^x$

5 وا دابنێ ژمارەی بەکتریاکانی چاندنێکی بایەلۆجی لە ڕۆژی دوو شەممە دەگاتە 1000 و ژمارەکەی بە ڕێژەی 50% ڕۆژانە لە و کاتەوە زۆر دەبێت

أ نەخشەیەك بنووسە ژمارەی گەشەکردنی بەکتریاکان بە پێی کات بنوێنێت (هەژمارکردن بەپێ ڕۆژ بێت)

ب وێنەی ڕوونکردنەوەی ئەو نەخشەی نووسیوتە بکێشە، بۆ خەملاندنی ژمارەی بەکتریاکان لە دووشەممەی داهاتوودا بەکاربهێنە.

2-4 پێچەوانەی پەیوەندی و پێچەوانەی نەخشە

بەڕوونکردنەوەیی ئەو پەیوەندییە بنوێنە کە بەهایەکانی لە خشتەکەدا هاتووە، پاشان پێچەوانەی پەیوەندییەکان بە ڕوونکردنەوەیی بنوێنە

6

x	-1	0	1	2	3
y	0	4	8	12	16

7

x	0	1	2	3	4
y	-1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$1\frac{2}{3}$

ڕوونکردنەوەی هەر نەخشەیەك بکێشە. پێچەوانەی نەخشەکە بنووسە و ڕوونکردنەوەکەی بکێشە.

8 $f(x)=x+2.1$ 9 $f(x)=\frac{3}{4}-x$ 10 $f(x)=5x+4$ 11 $f(x)=0.4\left(\frac{x}{2}+1.5\right)$

12 تێچوونی چاککردنەوەی بزمێری میران 210 000 دینارە، نرخی پارچەی یەدەگ و 55 000 دینار بۆ کرێی هەر کاتژمێرێکی کار. نەخشەی $f(x)=55\,000x+21\,0000$ تێچوونی چاککردنەوەی بزمێر بەپێی ژمارەی کاتژمێری خایەنراو بۆ چاککردنەوە دەنوێنێت. پێچەوانەی نەخشەکە بدۆزەوە، و بۆ دۆزینەوەی ژمارە کاتژمێرە خایەنراوەکانی چاککردنەوەی بزمێرەکەی میران بەکاربهێنە، ئەگەر زانیت تێچوونەکە گەیشتە 402 500 دینار.

3-4 نەخشە لۆگاریتمییەکان

هەریەك لەم هاوکێشە توانییانە بە شێوەی لۆگاریتمی بنووسە.

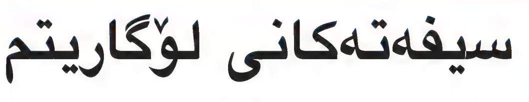
13 $3^2=9$ 14 $17.6^0=1$ 15 $2^{-2}=0.25$ 16 $0.5^x=0.0625$

هەریەك لەم هاوکێشە لۆگاریتمیانە بە شێوەی توانی بنووسە

17 $\log_4 64=3$ 18 $\log_{\frac{1}{5}} 25=-2$ 19 $\log_{0.99} 1=0$ 20 $\log_a x=5$

21 وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=\left(\frac{5}{6}\right)^x$ بکێشە، بەبەکارهێنانی بەهایەکانی $x=-1,0,2,3$ وێنەی ڕوونکردنەوەی پێچەوانەی نەخشەکە بکێشە.

4-4



Properties of Logarithm



ئامانجەکان

- سیفەتەکانی لۆگاریتم بۆ نووسینی بڕە لوگاریتمییەکان بە سادەترین شێوە بەکاردێنێت.
- لۆگاریتم بە بنچینەیەکی دیاریکراو دەگۆڕێت بۆ لۆگاریتم بە بنچینەییەکی تر.

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

زانایانی بوومەلەرزە لۆگاریتم بەکار دەهێنن بۆ هەژماری ئەو ووزەیەی لە بوومەلەرزەکان دەردەچێت (نموونەی 6).

دەتوانرێت نەخشەی لۆگاریتمی $pH=-\log\left[H^{+}\right]$ دەربېرین بۆ هەژماری ئەو pHـەی لەوانەی پیشوو ناسیت بە شێوەی توانی $10^{-pH}=\left[H^{+}\right]$. لەبەر ئەوەی لۆگاریتم بریتییە لە توان، ئەوا سیفەتەکانی هێز سیفەتەکانی لۆگاریتم دروستدەکات.
بیرتبێت، بۆ ئەوەی دوو هێز لە یەکتر بدەیت هەمان بنچینەیان هەبێت دوو توانەکە کۆبکەوە $b^{m}b^{n}=b^{m+n}$



سیفەتەکانی ئەنجامدانی لێکدان لە لۆگاریتم

m و n دوو ژمارەی موجەب بن، و b هەر ژمارەیەکی ڕاستی بێت ($b>0$ و $b\neq 1$)

بەنووسین	ژمارە	لە جەبر
لۆگاریتمی ئەنجامی لێکدان دەکاتە سەرجەمی لۆگاریتمەکانی هاوکۆلکەکان.	$\log_3 1000=\log_3(10\times 100)$ $=\log_3 10+\log_3 100$	$\log_b(mn)=\log_b(m)+\log_b(n)$

دەتوانرێت ئەو سیفەتەی سەرەوە بە ئاڕاستەی پێچەوانە بەکاربهێنرێت، بۆ نووسینی سەرجەمی لۆگاریتم کە هەمان بنچینەیان هەیە. وەك یەك لۆگاریتم، دەتوانرێت بە سادەترین شێوە بینووسین.

نموونـــە 1 کۆکردنەوەی لۆگاریتمەکان

ئەم بڕە وەك یەك لۆگاریتم بنووسە.

$$\log_4 2+\log_4 32$$

$\log_4(2\times 32)$ بۆ کۆکردنەوەی دوو لۆگاریتم دوو

$\log_4 64$ سادەبکە.

3 بیر بکەوە $4^{?}=64$



1. ئەم بڕە وەك یەك لۆگاریتم بنووسە، ئەگەر توانرا سادەی بکە.

أ $\log_5 625+\log_5 25$ ب $\log_{\frac{1}{3}} 27+\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{9}$

بیرت بێت بۆ ئەوەی دو هێز دابەشبکەیت، هەمان بنچینەیان هەبێت توانەکان لەیەکتر دەربکە. $\frac{b^{m}}{b^{n}}=b^{m-n}$ لەبەر ئەوەی لۆگاریتم توانە، ئەوا لێدەرکردنی لۆگاریتمییەکان لەیەکتر کە هەمان بنچینەیان هەیە بریتییە لە دۆزینەوەی لۆگاریتمی ئەنجامی دابەشکردنی دوو هێز هەمان بنچینەیان هەبێت.

فێربە

سیفەتی ئەنجامی دابەشکردنی لۆگاریتم

m و n دوو ژمارەی هەرچۆنێکی موجەب بن، و b هەر ژمارەیەکی راست بێت b ($b>0$ و $b\neq 1$)

بەنووسین	ژمارە	لە جەبر
لۆگاریتمی ئەنجامی دابەشکردن بریتییە لە ئەنجامی لێدەرکردنی لۆگاریتمی بەشدراو لە لۆگاریتمی بەشکراو	$\log_5\left(\frac{16}{2}\right)=\log_5(16)-\log_5(2)$	$\log_b\left(\frac{m}{n}\right)=\log_b(m)-\log_b(n)$

ئاگاداربە!

هەروەك چۆن ناتوانرێت a^5b^3 سادە بکەیتەوە هەروەها ناتوانیت برێکی لۆگاریتمی سادە بکەیتەوە ئەگەر بنچینەکانیان جیاوازبێت.

نموونە 2 لێدەرکردنی لۆگاریتمەکان

$\log_2 32-\log_2 4$ وەك یەك لۆگاریتم بنووسە، و ئەگەر کرا سادەیبکە.

$\log_2 32-\log_2 4$

$\log_2\left(\frac{32}{4}\right)$ بۆ لیدەرکردنی دوو لۆگاریتمەکە، دوو ژمارەکە دابەشبکە سادە بکە.

$\log_2(8)$ لە بیرتبێت $2^?=8$

3



2. بنووسە $\log_7 49-\log_7 7$ وەك یەك لۆکاریتم بنووسە (ئەگەر کرا)

لەبەر ئەوەی دەکرێت ئەنجامی لێکدانی لۆگاریتم هەژمار بکرێت، دەتوانرێت لۆگاریتمی هێزەکان هەژماربکرێت.

فێربە

سیفەتی لۆگاریتمی هێز

a و b دوو ژمارەی موجەب بن، کاتێك $b\neq 1$ و p ژمارەیەکی ڕاستی بێت.

بەنووسین	بەژمارە	لە جەبر
لۆگاریتمی هێز بریتییە لە ئەنجامی لێکدانی توانی هێز لە لۆگاریتم بەهەمان بنچینە	$\log 10^3$ $\log(10\times10\times10)$ $\log 10+\log 10+\log 10$ $3\log 10$	$\log_b a^p = p\log_b a$



لەبیرت بێت $logj + loga$ $+ logm = logjam$

نموونە 3 سادەکردنی لۆگاریتمی هێزەکان

ئەم برانە بە شێوەی ئەنجامی لێکدان بنووسە، ئەگەر کرا سادەی بکە.

أ $\log_3 81^2$

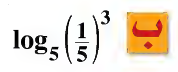
$2\log_3 81$

$2(4)$ لەبەر ئەوەی $\log_3 81=4$

8 $\quad 3^4=81$

ب $\log_5\left(\frac{1}{5}\right)^3$

$3\log_5\frac{1}{5}$



$3(-1)$ لەبەر ئەوەی $5^{-1}=\frac{1}{5}$

-3



3. هەر برێك بە شێوەی ئەنجامی لێکدانی بنووسە. ئەگەر کرا سادەیبکە

أ $\log 10^4$ ب $\log_5 25^2$ ج $\log_2\left(\frac{1}{2}\right)^5$

لەبەرئەوەی کردارەکانی هێز و لۆگاریتم دووکرداری پێچەوانەن، کەواتە هەریەکیان ئەنجامی ئەوی تریان لا دەبات.

فێربە و سەرنج بدە

سیفەتە پێچەوانەکانی هێز و لۆگاریتم

ئەگەر b هەر بنچینەیەك بێت و $b>0$ و $b \neq 1$

نموونە	لەجەبر
$\log_{10} 10^7 = 7$	$\log_b b^x = x$
$10^{\log_{10} 2} = 2$	$b^{\log_b x} = x$

نموونە 4 ناسینەوەی پێچەوانەکان

بڕەکە بە سادەترین شێوە بنووسە

أ $\log_8 8^{3x+1}$

$\log_8 8^{3x+1}$

$3x+1$

ب $\log_5 125$

$\log_5 5^3$

3

ج $2^{\log_2 27}$

$2^{\log_2 27}$

27

خاڵی چاودێری

4. أ $\log 10^{0.9}$ بە سادەترین شێوە بنووسە

ب $2^{\log_2(8x)}$ بە سادەترین شێوە بنووسە

زۆربەی بژمێرەکان لۆگاریتمی ئاسایی (بنچینە 10) یان لۆگاریتمی سروشتی بنچینە e هەژماردەکەن سەیری وانەی 4 – 5 بکە، دەتوانیت لۆگاریتم لە بنچینەیەکەوە بۆ لۆگاریتم بە بنچینەیەکی تر بە پێی ئەم یاسایەی خوارەوە بگۆڕیت.

فێربە و سەرنج بدە

یاسای گۆڕینی بنچینەی لۆگاریتم

ئەگەر a هەر بنچینەیەکی موجەب بێت کاتێك $a \neq 1$ و b هەر بنچینەیەکی موجەب بێت کاتێك $b \neq 1$

نموونە	لەجەبر
$\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4}$	$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$

نموونە 5 گۆڕینی بنچینەی لۆگاریتم

بەهای $\log_4 8$ هەژماربکە

ڕیگای یەکەم گۆڕینی بنچینە بۆ 10

$\log_4 8 = \frac{\log 8}{\log 4}$

$\approx \frac{0.0903}{0.602}$ بژمێر بەکاربێنە

$= 1.5$



ڕیگای دووەم گۆڕینی بنچینە بۆ 2 چونکە دوو هێزی ژمارە 2 ـە.

$\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{3}{2}$

$= 1.5$

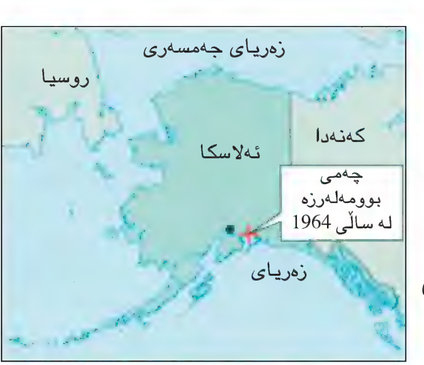
خاڵی چاودێری

5. أ بەهای $\log_9 27$ هەژماربکە.

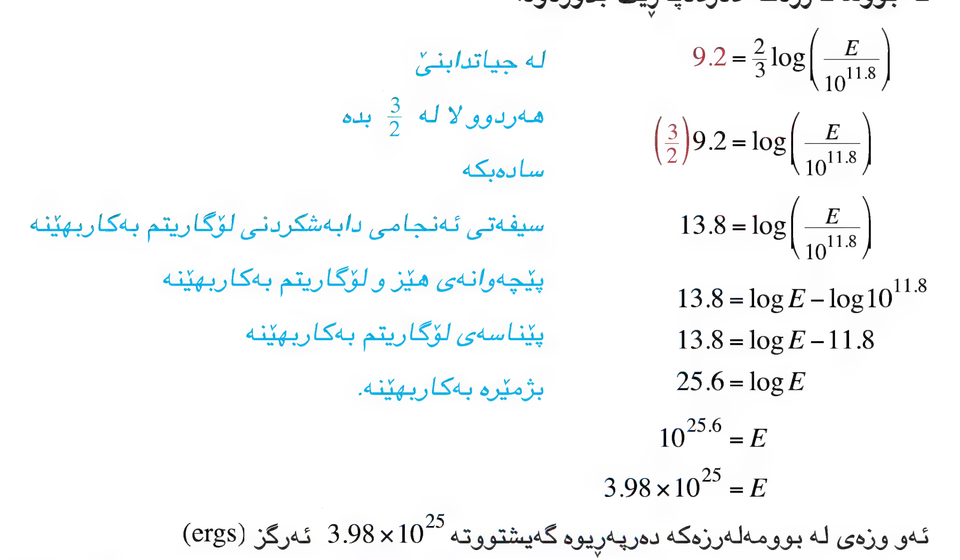
ب بەهای $\log_8 16$ هەژماربکە.

پەیژەی لۆگاریتمی بۆ پێوانی ئەو هێندانەی کە بەهایەکەی دەکەوێتە بوارێکی زۆر فراوانەوە بەکاردێت، وەك توندی دەنگ و ئاستی توندییەکەی یان ئەو ووزەی لە بومەلەرزەیەك دەردەچێت.

نموونـــــه 6 جێبەجێکردن لە زەویناسیدا



پسپۆرانی زەویناسی پێوەری ڕێختەر بەکاردەهێنن، بۆ دەربڕینی ئەو ووزەی کە لە بوومەلەرزەکان دەردەپەڕێت. ئەو پەیوەندییەی هێزی بومەلەرزەیەك M و ئەو وزەی لێی دەردەپەڕێت E بەیەکەوە دەبەستێتەوە بریتییە لە $M=\frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{10^{11.8}}\right)$ لە ساڵی 1964 دا بوومەلەرزەیەك بە هێزی 9.2 پلەی ڕەختەر لە ئالاسکای ئەمریکای باکوری دا هیندی ئەو وزەی لە بوومەلەرزەکە دەردەپەڕێت بدۆزەوە.



$9.2=\frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{10^{11.8}}\right)$ لە جیاتدابنێ

$\left(\frac{3}{2}\right)9.2=\log\left(\frac{E}{10^{11.8}}\right)$ هەردوو لا لە $\frac{3}{2}$ بدە

$13.8=\log\left(\frac{E}{10^{11.8}}\right)$ سادەبکە

$13.8=\log E-\log 10^{11.8}$ سیفەتی ئەنجامی دابەشکردنی لۆگاریتم بەکاربهێنە

$13.8=\log E-11.8$ پێچەوانەی هێز و لۆگاریتم بەکاربهێنە

$25.6=\log E$ پێناسەی لۆگاریتم بەکاربهێنە

$10^{25.6}=E$ بژمێرە بەکاربهێنە.

$3.98\times 10^{25}=E$

ئەو وزەی لە بوومەلەرزەکە دەرپەڕیوە گەیشتووتە 3.98×10^{25} ئەرگز (ergs)

ڕۆشنایەکی بەسوود

پێوەری ڕێختەر پێوەرێکی لۆگاریتمییە بۆ هەر زیاد بوونێکی 1 لە و پێوەرە بەرامبەر دەرچوونی وزەی چەند جارەی 10 یە.



دوو بوومەلەرزە هێزەکانیان گەیشتە 9.2 پلە و 8 پلە بە پێوەری ڕێختەر، ئەو وزەی بوومەلەرزەی یەکەم دەریدەپەڕێنێت چەند ئەوەندەی وزەی بوومەلەرزەی دووەمە؟

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. چۆن بەبەکارهێنانی بژمێر وێنەی ڕوونکردنەوەیی $y=\log_5 x$ دەکێشیت؟
2. چۆن $10^{25.6}$ ت دۆزینەوە لە نموونە 6 بە بەکارهێنانی سیفەتەکانی هێز؟
3. چی ڕوودەدات، کاتێك یاسای گۆڕینی بنچینە جێبەجێ دەکەیت لە $\log_b x=\frac{\log_a x}{\log_a b}$ کاتێك $x=a$؟
4. ڕێکخەر بە خشتەی بەرامبەر دروستبکە و تەواویبکە. بەشێوازی خۆت سیفەتە بەیەك بەستراوەکانی هێز و لۆگاریتم ڕوونبکەوە.



سیفەتەکانی هێزەکان	سیفەتەکانی لۆگاریتم

4-4 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

پڕوانە نموونە 1 بڕەکە وەک یەک لۆگاریتم بنووسە. ئەگەر کرا سادەیبکە.

1 $\log_5 50 + \log_5 62.5$ **2** $\log 100 + \log 1000$ **3** $\log_3 3 + \log_3 27$

پڕوانە نموونە 2 بڕەکە وەک یەک لۆگاریتم بنووسە. ئەگەر کرا سادیبکە.

4 $\log_4 320 - \log_4 5$ **5** $\log 5.4 - \log 0.054$ **6** $\log_6 496.8 - \log_6 2.3$

پڕوانە نموونە 3 ئەگەر کرا سادەیبکە

7 $\log_8 8^2$ **8** $\log_3 3^5$ **9** $\log_7 49^3$ **10** $\log_{\frac{1}{2}} (0.25)^4$

پڕوانە نموونە 4

11 $\log_2 2^{2^x+5}$ **12** $2.5^{\log_{2.5} 19}$ **13** $\log_4 1024$ **14** $\log_2 (0.5)^4$

پڕوانە نموونە 5 بەهای بڕەکە هەژماربکە.

15 $\log_9 \left(\frac{1}{27}\right)$ **16** $\log_8 32$ **17** $\log_5 10$ **18** $\log_2 27$

پڕوانە نموونە 6

19 **زەویناسی** پەیوەندییەک هێزی بومەلەرزەیەک M بەوزەی E کەلێوەی دەردەپەڕێت بەیەکەوە دەبەستێتەوە، کە بریتییە لە $M = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{10^{11.8}}\right)$ ئەو وزەی بومەلەرزەی تایگون دەریدەپەڕێنێن چەند ئەوەندەی وزەی بومەلەرزەی نیو مەدریدە لە 1881 .

بەناوبانگترین بومەلەرزەکانی ئەمریکای باشوور

شوێن	ساڵ	M
نیومەدرید	1881	8.1
نیومەدرید	1812	8.0
فورت تایگون	1957	7.9
سان فرانسیسکۆ	1906	7.8
دۆڵی ئەباترە	1892	7.8

ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

ڕاهێنانی ئازاد

بۆشیکارکردنی ڕاهێنانەکان	سەیری نموونە بکە
22–20	1
25–23	2
28–26	3
31–29	4
34–32	5
35	6

بڕەکە وەک لۆگاریتمی تاقانە بنووسە. ئەگەر کرا سادەیبکە.

20 $\log_8 4 + \log_8 16$ **21** $\log 2 + \log 5$ **22** $\log_{2.5} 3.125 + \log_{2.5} 5$

23 $\log 1000 - \log 100$ **24** $\log_2 16 - \log_2 2$ **25** $\log_{1.5} 6.75 - \log_{1.5} 2$

ئەگەر کرا سادەبکە.

26 $\log_2 16^3$ **27** $\log(100)^{0.1}$ **28** $\log_5 125^{\frac{1}{3}}$

29 $\log_3 3^{7+x}$ **30** $3^{\log_3 4.52}$ **31** $\log_9 6561$

بەهای بڕەکە هەژماربکە

32 $\log_{\frac{1}{2}} 16$ **33** $\log_{25} 125$ **34** $\log_4 9$

35 **دەنگ** پاش چەند سکاڵایەک دەرکەوت کە دەنگی مۆسیقای ئەو ئاهەنگەی لە دەرەوە دەکرێت، ئاستی توندییەکەی 5 دیسیبل بەرزترە لە ماوەی ڕێپێدراو کە 100 دیسیبلە. ئاستی توندی دەنگ بە پەیوەندی $L = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ هەژماردەکرێت، کاتێک I هێمای توندی دەنگەکە و I_0 هێمای توندی بەرگوێکەوتن بێت. توندی دەنگی ماوەپێدراو دەکاتە چەند ئەوەندەی توندی دەنگی مۆسیقای ئاهەنگەکان کە لە دەرەوە دەکرێت؟

36 **گەردوون** جیاوازی نێوان ڕووی دیاری ئەستێرەیەك m و ڕووە ڕاستەقینەکەی M بە بەکارهێنانی پەیوەندی $m - M = 5\log\frac{d}{10}$ دەپێورێت، کاتێك d هێمای دووری نێوان ئەستێرەکە و زەوی بێت کە بە (فەرسەخی ئەستێرەیی) Parsec دەپێورێت.

أ دووری ئەستێرەی ئەنتاریس Antares لەزەوی بدۆزەوە.

ب ئەستێرەی سیگاسکۆ 225 Sigma Sco فەرسەخی ئەستێرەیی لە زەوییەوە دوورە. دووری ڕاستەقینەی ئەم ئەستێرەیە بدۆزەوە؟

ج دووری ئەستێرەی ئەنتاریس لە زەوی چەند ئەوەی دووری ئەستێرەی ڕوئوف Rho Oph دەبێت ؟

ڕۆشنایی

فەرسەخی ئەستێرەیی بریتییە لە یەکەی پێوانەییەك کە دەکاتە 3.3 ساڵی ڕووناکی.

هاوکێشە توانییەکە بە شێوەی لۆگاریتمی بنووسە.

37 $b^{m+n} = b^m b^n$ **38** $b^{m-n} = \frac{b^m}{b^n}$ **39** $(b^m)^n = b^{mn}$

سادەبکە ئەگەر کرا.

40 $\log_2 32 - \log_2 128$ **41** $\log 0.1 + \log 1 + \log 10$ **42** $2 - \log_{11} 121$

43 $\log_{\frac{1}{2}} 2 + \log_{\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{2}}$ **44** $7^{\log_7 7} - \log_7 7^7$ **45** $\frac{10^{\log 10}}{\log 10^{10}}$

46 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** سیفەتەکانی لۆگاریتم، و بەهای $\log 2 \approx 0.301$ بەکاربهێنە، بۆ هەژماری.

أ $\log 20$ ب $\log 200$ ج $\log 2000$

47 **کیمیا** پسپۆرانی کیمیا ئامۆژگاریمان دەکەن، کە pH ی ئاوی مەلەوانی پێویستە لە نێوان 7.0 و 7.6 بێت. پەیوەندی $pH = -\log\left[H^+\right]$ بۆ نووسینی بڕێك جیاوازی لە خەستی ئایۆنەکانی هایدرۆجین بۆ دوو بەهای pH ی دیاریکراو بەکاربهێنە.

48 **فرەهەنگاوەکان** لە شوێنێکی دیاریکراو، 143 جۆرە ئاژەڵ دەژین کە لەوانەیە لەناوبچن، و ژمارەکەی ساڵانە 4% کەمدەکات.

أ نەخشەیەکی توانی بنووسە، ژمارەی ئاژەڵەکان لەو شوێنەدا بە پێی ژمارەی ساڵەکان بنوێنێت.

ب نەخشەیەکی لۆگاریتمی بنووسە، ژمارەی ساڵەکان بە پێی ژمارەی ئاژەڵەکان بنوێنێت.

ج زنجیرەی ئەو دوگمانە بنووسە، کە بۆ تێکردنی نەخشە لۆگاریتمییەکە لە بژمێری ڕوونکردنەوەیی بەکاریدەهێنێت.

د پاش چەند ساڵ ژمارەی ئاژەڵەکان لەو شوێنەدا لە 30 کەمتر دەبێت؟ بۆ نزیکترین ساڵ نزیکبکەوە.

49 **پارەدان** کاڵایەك نرخەکەی 000 40 دینارە، ساڵانە نرخەکەی بەڕێژەی 8% زیاددەکات. بڕێکی لوگاریتمی بنووسە، و بەکاربهێنە بۆ دیاریکردنی ژمارەی ساڵە پێویستەکان بۆ ئەوەی نرخی کاڵایەکە بگاتە 000 50 دینار، (یارمەتی: بڕەکە بە شێوەی توانی بنووسە).

50 یەکێك لە بانکەکان بە ڕێژەی 19.2% سوودی ساڵانە دەدات بەوکەسانەی پارە لەو بانکە دادەنێن. نەخشەی $A = P(1.016)^n$ بۆ هەر ژمارکردنی بەهای ئێستا A بۆ گوژمەی بنەڕەتی دەنوێنرێت پاش n مانگ لە دانانی پارەکە.

أ 000 500 دینار لەو بانکە دانرا. بڕێکی لۆگاریتمی بنووسە، و بەکاریبهێنە بۆ دۆزینەوەی ژمارەی مانگەکان بۆ ئەوەی پارەکە بکاتە دوو ئەوەندەی خۆی .

ب دوای چەند مانگ ئەو گوژمەیە دوو ئەوەندەی خۆی دەبێت؟

ج ئایا کاریگەری کاتەکە لە سەر گوژمەیە دەبێت، تا بەهاکانی دوو ئەوەندە بێت.

بژمێری ڕوونکردنەوەیی یاسای گۆڕینی بنچینەکان و بژمێری ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنە بۆ کێشانی وێنەی ڕوونکردنەوەیی ئەم نەخشانە.

51 $y = \log_3 x$ **52** $y = 2\log_5 x$ **53** $y = \frac{\log_{12} x}{3}$

54 **بنووسە** چۆن ڕوونکردنەوەی نەخشەی $y = \log_{16} x$ دەکێشێت بەبەکارهێنانی بژمێری ڕوونکردنەوەیی؟

55 **بیری ڕەخنەگر** بەهای نزیکەیی هەر برێك بدۆزەوە، ئەگەر زانیت $\log_{12} 20 \approx 1.2$ $\log_{12} 33 \approx 1.4$

أ $\log_{12} 1.65$ ب $\log_{12} 660$ ج $\log_{12} 400$

56 **بیری ڕەخنەگر** پەیوەندییەکی گرنگ هەیە، لە نێوان لۆگاریتم و شێوەی زانستی بۆ نووسینی ژمارەکان.

أ لۆگاریتمی 2.5 بدۆزەوە

ب لۆگاریتمی بارستایی کەشتی تایتانیك بدۆزەوە، وەڵامەکە لەگەڵ وەڵامی لقی أ بەراورد بکە.



ج **دەستەواژەیەك بنووسە** بارستایی شێرێك $2.5 \times 10^2\ \text{kg}$ لۆگاریتمی ئەو ژمارەیە بدۆزەوە. وەڵامەکەت لەگەڵ وەڵامەکانی دوو لقی أ و ب بەکاربهێنە، بۆ ئەوەی ڕوونیبکەیتەوە، چۆن لۆگاریتمی ژمارەیەکی نووسراو بە شێوەی زانستی دەدۆزییەوە.

د دەستەواژەیەك بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی لۆگاریتمی بارستایی پارچە پارەیەك کە دەگاتە $2.5 \times 10^{-3}\ \text{kg}$ ئایا دەستەواژەکە بۆ ئەو ژمارانەی بە شێوەی زانستی توان سالب نووسراون ڕاستە؟

وایدابنێ $b > 0$ و $b \neq 1$. دیاریبکە، ئایا دەستەواژانە هەردەم ڕاستە، هەندێك جار ڕاستە، هەردەم هەڵەیە.

57 دەتوانین لۆگاریتم بنچینە b بگۆڕین بۆ لۆگاریتمێك بنچینەکەی ژمارەیەکی ڕێژەیی تر بێت.

58 لۆگاریتمی بنچینە، 6 بۆ هێزێك لە هێزەکانی ژمارە 6 دەکاتە توانی ئەو هێزە.

59 ئەگەر لۆگاریتمی ژمارەی 1 بۆ بنچینە b لە ژمارەیەك دەربکرێت، ژمارەکە هەر خۆی دەمێنێتەوە.

60 دەشێت بنچینەی لۆگاریتم ژمارەیەکی سالب بێت.

61 لۆگاریتمی دووجای ژمارەیەك دەکاتە دوو ئەوەندەی لۆگاریتمی ئەو ژمارەیە.

62 دەتوانین لۆگاریتمی بنچینە جیاواز کۆبکەینەوە، بێ ئەوەی پێویستمان بە گۆڕانی بنچینەکانیان هەبێت.

63 دەتوانین $\frac{\log_b 16}{\log_b 8}$ سادەبکەین.

64 لۆگاریتمی لۆگاریتمی ژمارەیەك دەکاتە ژمارەکە خۆی.

65 **هەڵە لە شیکردنەوە** لە خوارەوە دوو ڕێگای سادەکردنی $\log 80 + \log 20$ هاتووە. کامیان هەڵەیە؟

أ
$$\begin{aligned} \log 80 + \log 20 &= \log(80 \times 20) \\ &= \log 1600 \\ &= \log(16 \times 10^2) \\ &= \log 16 + \log 10^2 \\ &= \log 16 + 2 \end{aligned}$$

ب
$$\begin{aligned} \log 80 + \log 20 &= \log(80 + 20) \\ &= \log 100 \\ &= \log(10^2) \\ &= 2\log 10 \\ &= 2 \end{aligned}$$



66 کام لەم دوو یەکسانبوونانە هەڵەیە؟

أ $\log 140 - \log 35 = \log 4$ ب $\frac{\log 140}{\log 35} = \log 4$

ج $\log 35 + \log 4 = \log 140$ د $\log \frac{140}{35} = \log 4$

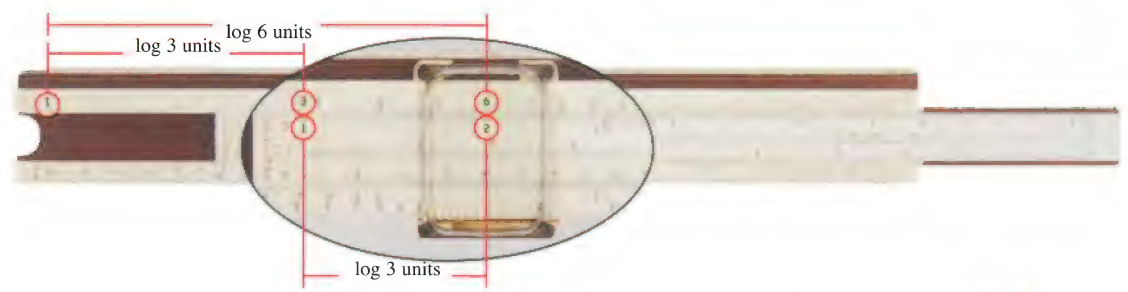
67 $\log_9 x^2 + \log_9 x$ بە سادەترین شێوە بنووسە.

(أ) $\log_9(x^2+x)$ (ب) $\log_9(3x)$ (ج) $3\log_9 x$ (د) $3(x^2+x)$

68 کام بڕی لۆگاریتمی دەکاتە $\log 6$ ؟

(أ) $\log 3 + \log 2$ (ب) $\log 3 + \log 3$ (ج) $\log 3 \times \log 2$ (د) $\log 3 \times \log 3$

بەرەنگاری و فراوانکردن



69 **مێژوی بیرکاری** پێش دەرکەوتنی بژمێرەکان، ئەندازیارەکان و خوێندکارانی زانستی بۆ ماوەیەکی زۆر جۆرە ڕاستەیەکیان بۆ جێبەجێکردنی هەژمارکردنە ئالۆزەکان بەکارهێنا. ئەو ڕاستەیە دوو هێڵی ژمارەیی بەکاردەهێنێت، هەریەکەیان لەسەر ئەوەی تریان دەخلسکێت، و پێوەری هەریەکێکیان لۆگاریتمە کە ڕێگا بەبەکارهێنانی سیفەتەکانی لۆگاریتم دەدات، بۆ لێکدان و دابەشکردنی ژمارەکان.

أ لە وێنەکە چۆن ئەنجامی لێکدانی 2 لە 3 ڕووندەکاتەوە؟

ب چۆن ئەو سیفەتە لۆگاریتمی ئەنجامی لیکدان دەنوێنێت؟

بواری نەخشەکە بدۆزەوە

70 $f(x) = \log(x^2 - 4)$ **71** $f(x) = \log x - \log(x-1)$ **72** $f(x) = \log\left(\frac{x}{x^2-1}\right)$

73 $f(x) = \log\left(\frac{1}{x}\right)^2$ **74** $f(x) = -\sqrt{\log(x+1)}$ **75** $f(x) = \sqrt{-2\log(-x)}$

76 بیسەلمێنە $\log_b a^p = p\log_b a$ **77** $\log_9 3^{2x}$ سادەبکە

شیکاربکە

78 $\log_x 25 = 2$ **79** $\log_x(-8) = 3$ **80** $0 = \log_x 1$

پێداچوونەوەی لولپێچی

شیکاربکە *(قۆناغەکانی پیشوو)*

81 $4(x+1) = 3(2x-6)$ **82** $-20 + 8n = n + 29$ **83** $8\left(n+\frac{3}{4}\right) = 10n - 4$

ژمارەکە بە پێی i بنووسە (وانەی)

84 $3\sqrt{-16}$ **85** $-\frac{1}{2}\sqrt{-40}$ **86** $4\sqrt{-8}$ **87** $\sqrt{-125}$

هاوکێشە توانییەکە بەشێوەی لۆگاریتمی بنووسە *(وانەی 4 – 3)*

88 $5^3 = 125$ **89** $10^{-1} = 1$ **90** $36^{0.5} = 6$ **91** $4^x = 256$

بەهای بڕەکە هەژماربکە *(وانەی 4 – 3)*

92 $\log_{12} 1$ **93** $\log_5 25$ **94** $\log_{16} 4$ **95** $\log_{625} 0.04$

5-4 لۆگاریتمی سروشتی

Natural Logarithm

ئامانجەکان

- ژمارەی e بەکاردێت بۆ نووسینی نەخشەی توانی کە چەند بارێکی ژیانی ڕۆژانە دەنوێنێت
- وێنەی ڕوونکردنەوەیی ئەم نەخشانە دەکێشێت.
- ئەو هاوکێشە و پرسیارانە شیکار دەکات کە ژمارەی e و لۆگاریتمی سروشتی لەخۆدەگرن.

زاراوەکان Vocabulary

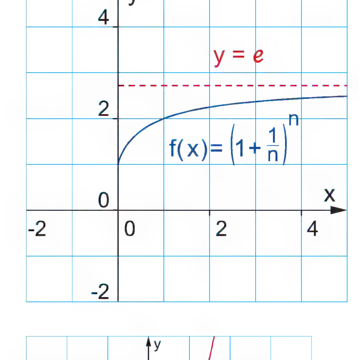
لۆگاریتمی سروشتی
Natural logarithm

نەخشەی لۆگاریتمی سروشتی
Natural logarithm function

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

زانایان لۆگاریتمی سروشتی و مێژوو بەکاربۆن بۆ دیاریکردنی تەمەنی پاشماوەی ئاژەڵە کۆنەکان بەکاردێنن (نموونەی 4).

لە بیرت بێت یاسای سوودی ڕێژەیی بریتییە لە $A=P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$ کاتێك p هێمای گوژمەی بنەڕەتی و A هێمای برە پارەی ئێستایە و r هێمای تێکرای سوودی ساڵانەیە، و t هێمای ژمارەی ساڵەکانەوە بێت و n هێمایە بۆ ژمارەی ئەو جارانەی کە ئەو حسابەی تێدا لە ساڵێکدا پاشکەوت دەکرێت. وا دابنێ تۆ یەك دینارت لە حسابەکەت داناوە، سوودێك بە تێکرای ساڵانەی 100% دەدرێت $(r=1)$، و حسابەکە n جار لە ساڵێك پاشکەوت دەکرێت. گوژمەکە پاش ساڵێك دەبێتە $f(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ ، وادابنێ ژمارەی جارەکان n زیاد دەکات، تاوەکو زۆر گەورە دەبێت لەوکاتەدا دەتوانیت باسی پاشکەوتی بەردەوام بۆ حسابەکەت بکەیت، ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $f(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ تاقیبکەوە، ئەو نەخشەیە دەرکەناری ئاسۆیی هەیە، کاتێك بەهای نەخشەکە لە...2.7182818 نزیکدەبێتەوە لەو کاتەی n لە $+\infty$. نزیکدەبێتەوە. بیرکاری زانان بە پیتی e هێمای دەکەن، کە ژمارەیەکی ناڕێژەییە وەك ژمارە π .



ئەو نەخشە توانییانەی کە بنچینەکانیان e یە هەمان ئەو سیفەتانەی نەخشەیەکی توانی هەیە. و ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=e^{x}$ بە ڕوونکردنەوەی نەخشەی توانی تر دەچێت، وەك $f(x)=3^{x}$.

بواری نەخشەی $f(x)=e^{x}$ بریتییە لە R و مەوداکەی بریتییە لە $\{y/y>0\}$

نەخشەی $f(x)=e^{x}$ پێیدەگوترێت: نەخشەی توانی سروشتی کە ڕۆڵێکی گرنگ لە مێژووی بیرکاری دەنوێنێت.

Natural exponential funcio

پارمەتی

ڕوونکردنەوەی نەخشە $f(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ یارمەتیت دەدات بۆ ئەوەی ببینیت بەهایەکانی $N_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ بەرەبەرە زیاتر لە ژمارەی e نزیك دەبێتەوە.

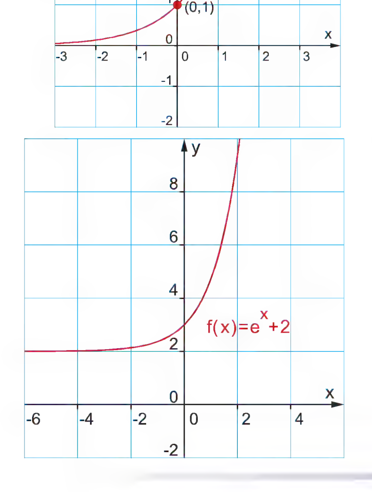
نموونـــــه 1

کێشانی وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشە توانییە سروشتییەکان.

وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $f(x)=e^{x}+2$ بکێشە.

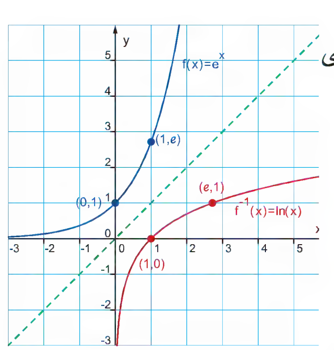
خشتەی بەهایەکانی ئەو نەخشەیە دروستبکە، لەبەرئەوەی ژمارەی e ژمارەیەکی ڕێژەیی نییە، پێویستە بەهایەکانی نەخشەکە نزیك بکەیتەوە بۆ دەیەك بۆ نموونە.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)=e^{x}+2$	2.0	2.1	2.4	3	4.7	9.4	22.1



خاڵی چاودێری

1. وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $f(x)=e^{x}-3$ بکێشە.



لۆگاریتمی سروشتی Natural logarithm بریتییە لە و لۆگاریتمەی بنچینەکەی e بێت. هێمای $\ln$ بۆ لۆگاریتمی سروشتی بەکاردێت ئەو لوگاریتمە هەمان سیفەتەکانی لۆگاریتمی ئاسایی (دەیی) و لۆگاریتمەکانی تری هەیە.

نەخشەی لۆگاریتمی سروشتی Natural logarithm function بریتییە لە پێچەوانەی نەخشە بۆ نەخشەی توانی $f(x)=\ln x$ سروشتی کە نەخشەیەکی لۆگاریتمییە بە بنچینەی e بوارەکەی کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییە موجەبەکانە و مەوداکەی بریتییە لە کۆمەڵەی هەموو ژمارە ڕاستییەکان، ڕوونکردنەوەکەشی بریتییە لە ڕوونکردنەوەی بەرامبەر.

نموونـــــە 2 سادەکردنی برە توانییەکان و لۆگاریتمیە سروشتییەکان

برەکە بە سادەترین شێوە بنووسە.

أ $\ln e^{-2t}$

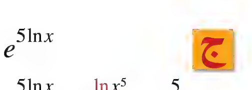
$\ln e^{-2t}=-2t$

ب $e^{\ln(x-1)}$



$e^{\ln(x-1)}=x-1$

ج $e^{5\ln x}$



$e^{5\ln x}=e^{\ln x^5}=x^5$





2. برەکە بە سادەترین شێوە بنووسە

أ $\ln e^{3.2}$ ب $e^{2\ln x}$ ج $\ln e^{x+4y}$

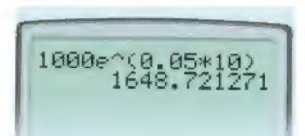
بەگەڕانەوە بۆ یاسای سوودی ئاوێتە، یاسایەکە دەبێتە $A=pe^{rt}$ کاتێك پاشەکەوتکردنەکە بەردەوام دەبێت.

نموونـــــە 3 جێبەجێکردن لە ئابووریدا

یەك ملیۆن دینار بۆ ماوەی 10 ساڵ بە تێکرایی سوودی ساڵانەی 5% دانرا بۆ ئەوەی پاشەکەوتکردنی حسابەکە بە شێوەیەکی بەردەوام بێت حسابەکە پاش ئەو 10 ساڵە دەبێتە چەند؟



ئەگەر بژمێرت نەبێ:
$e^{0.5}\approx 1.648720$



$A=pe^{rt}$ یاسا

$A=1000\,000\ e^{0.05\times 10}$ لە جیاتیدانێ

$A\approx 1\,648\,720$ بژمێربەکاربهێنە

پاش 10 ساڵ حسابەکە دەبێتە 720 648 1 دینار بە نزیکەیی.



3. 000 100 دینار دەبێتە چەند پاش 8 ساڵ، ئەگەر زانیت ئەو گوژمەیە لە حسابی پاشەکەوتی بەردەوامدا، بە سوودی تێکڕای ساڵانەی3.5% دانرا؟

زانایان چەمکی نیوتەمەن بەکاردەهێنن بۆ لێکۆڵینەوەی هەندێك مادده و بە تایبەتی تیشکدارەکان. نیوتەمەنی ماددەی **half - life** بریتییە لە و ماوەی ماددەکە پێویستیەتی بۆ شیبوونەوەی نیوەی ئەو ماددەیە یان گۆڕانی بۆ شتێکی تر. نەخشەی خوارەوە بۆ کرداری گەڕانەوەی سروشتی بەکاردێت.

$$N(t)=N_0e^{-kt}$$

- هێندەکە لە سەرەتای ماوەکەدا کاتێك $t=0$
- نەگۆڕی گەڕانەوە
- هێندەکە لە کۆتایی ماوەی t دا
- ماوەی گەڕانەوە t

نموونـــــه 4 جێبەجێکردن لە سەر ئاژەڵە لە ناوچووەکان

زانایەکی بەردینی، لە کالیفۆرنیا گیانلەبەرێکی بەبەردبووی دۆزییەوە بە ناوی (دووکەڵبەشمشێری) ، کە ئاژەڵێکی لە ناوچووە لە پۆلی پشیلەکان بوو، دوای ئەنجامدانی شیکردنەوە لە سەربەبەرد بووەکە، دەرکەوت کە **15%** ی کاربۆن 14 لاشەکەی پیکهێناوە. تەمەنی ئەو پاشماوەیە بدۆزەوە، ئەگەر زانیت نیوەتەمەنی کاربۆن **14** بریتییە 5730 ساڵ.

هەنگاوی 1 نەگۆڕی گەڕانەوە بۆ کاربۆن 14 بدۆزەوە.

$N(t)=N_0e^{-kt}$	نەخشەیەکی پووکانەوە سروشتییە
$\frac{1}{2}=1\times e^{-k\times 5730}$	لەجیاتی دابنێ
$\ln 2^{-1}=-5730k$	سادەبکە و لۆگاریتمی سروشتی هەردوو لا وەربگرە $\ln 2^{-1}=(-1)\ln 2=-\ln 2$
$-\ln 2=-5730k$	
$k=\frac{\ln 2}{5730}\approx 0.00012$	

هەنگاوی 2 یاسای گەڕانەوە بەکاربهێنە و هاوکێشە پەیدابووەکە شیکاربکە.

$N(t)=N_0e^{-0.00012t}$	نەخشەی پووکانەوە لەجیاتی دابنێ
$15=100\times e^{-0.00012t}$	هەردوو لا دابەشی 100 بکە
$0.15=e^{-0.00012t}$	سادەبکە و لۆگاریتمی سروشتی هەردوو لا وەربگرە
$\ln 0.15=\ln e^{-0.00012t}$	سادەبکە
$\ln 0.15=-0.00012t$	شیکاربکە
$t=-\frac{\ln 0.15}{0.00012}\approx 15809.3$	

650 mg

ئەو پاشماوەیە دەگەڕێتەوە بۆ 800 15 ساڵ بەنزیکەیی

ئاگاداربە!

ln هێمای لۆگاریتمی سروشتییە بەڵام log هێمای لۆگاریتمی ئاساییە (واتە بنچینە 10)



4. شیبوونەوەی $650\,mg$ لە کرۆمیۆم51 بۆ ئەوەی ببێتە 200 mg چەند ساڵ دەخایێنێت، ئەگەر بزانیت نیوە تەمەنی کرۆمیۆم51 نزیکەی 28 ڕۆژە.

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. دوو ژمارەی e و π لە چی لە یەکتر دەچن و لە چیدا جیاوازن.

2. ئەوەی e و ln بەیەکتر دەبەستیتەوە ڕوونبکەوە.



3. ڕێکخەربە ئەم خشتەیەی خوارەوە دروستبکە، پاشان تەواوی بکە. خانەکانی خشتەکە پڕبکەوە بۆ ئەوەی خاڵە لەیەکچوون و خاڵە جیاوازەکانی هەردوو لۆگاریتمەکە ڕوونبیتەوە، شێوەی گشتی بنووسە بە نموونە پاڵپشتی بکە ئەگەر پیویست بوو سادەی بکە.

	لۆگاریتمی ئاسایی	لۆگاریتمی سروشتی
بنچینە		
شێوەی لۆگاریتمی		
شێوەی توانی		
$\log_b 1$		
$\log_b b$		
$\log_b b^x$		
$b^{\log_b x}$		

5-4 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاراستەکراو

1 **زاراوەکان** لۆگاریتمی سروشتی ژمارەی x بە شێوەی نەخشەیەك بە پیتی x بنووسە ئەو نەخشەیە پێ دەوترێت ـــــ؟ـــــ (لۆگاریتمی سروشتی، لۆگاریتمی دەیی).

بڕوانە نموونە 1

وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بکێشە.

2 $f(x)=e^{x}-4$ **3** $f(x)=-e^{x}$ **4** $f(x)=4-e^{x}$ **5** $f(x)=e^{1-x}$

بڕوانە نموونە 2

بڕەکە بە سادەترین شێوە بنووسە.

6 $\ln e^{1}$ **7** $\ln e^{x-y}$ **8** $\ln e^{\left(-\frac{x}{3}\right)}$ **9** $e^{ln 2x}$ **10** $e^{3\ln x}$

بڕوانە نموونە 3

11 **ئابووری** قیان 000 750 7 دیناری لە حسابی پاشەکەوتی بەردەوام دانا، بەسوودی تێکرای ساڵانەی 4% بەهای حسابەکە پاش 5 ساڵ دەبێتە چەند؟

بڕوانە نموونە 4

12 **فیزیا** تەکنتیوم Technetuim - 99m ماددەیەکی تیشکدەرە بۆ وێنە کێشانی ماسولکەکانی دڵ و پەیکەری ئێسك بەکاردێت. نیوەتەمەنی ئەو ماددەیە نزیکەی 6 کاتژمێرە نەگۆڕی پووکانەوەکە ئەو ماددە بدۆزەوە نەخشەی پووکانەوەی $N(t)=N_0e^{-kt}$ بەکاربهێنە بۆ هەژمارکردنی ئەوەی دەمێنێتەوە لە 250 mg لەو ماددەیە پاش 24 کاتژمێر.

ڕاهێنان و شیکاری پرسیارەکان

ڕاهێنانی ئازاد	
بۆشیکارکردنی ڕاهێنانەکان	سەیری نموونە بکە
16–13	1
20–17	2
21	3
22	4

وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بکێشە.

13 $f(x)=e^{x}+1$ **14** $f(x)=e^{x}-1$ **15** $f(x)=1-e^{x}$ **16** $f(x)=10-e^{x}$

بڕەکە بە سادەترین شێوە بنووسە.

17 $\ln e^{0}$ **18** $\ln e^{2x}$ **19** $e^{\ln(x+2)}$ **20** $e^{4\ln x}$

21 **ئابووری** حسابی دڵشاد لە بانکێك 000 565 7 دیناری تێدایە دڵشاد لەو حسابە 000 000 5 دیناری بەکارهێنا بۆ حسابی تێکڕای سوودی ساڵانەی3.5% کە پاشەکەوتی دەکات، بە شێوەی بەردەوام کۆی گشتی حسابی دڵشاد دوای سێ ساڵ دەبێتە چەند؟

22 **ژینگە** ساڵی 1986، کورەی ئەتۆمی چەرنۆبیل لە ئۆکرانیا تووشی ڕوداوێك هات، بووە هۆی پەرتبوونی هێندێکی زۆر لە پلۆتۆنیۆم. نیوە تەمەنی ئەو ماددەیە دەگاتە 110 24 ساڵ. نەگۆڕی گەڕانەوەی ئەو ماددەیە بدۆزەوە، نەخشەی پووکانەوەی $N(t)=N_0e^{-kt}$ بەکاربهێنە بۆ هەژماری ئەوەی دەمینێتەوە لە 20g لەو ماددەیە دوای 000 5 ساڵ.

پاش چەند ساڵ هێندە پاشماوەکە لە و بیست گرامە دەبێتە یەك گرام؟

23 **بژمێر** بەهای نزیکراوەیی هەریەك لە $\ln 10$ و $\log e$ بدۆزەوە.

أ چۆن ئەو دوو ژمارەی دەستتکەوتوە بەیەکتر دەبەسترێن؟

ب ڕێسای گۆڕینی بنچینە بۆ پاڵپشتی وەڵامەکەت بەکاربهێنە.

24 ڕوونیبکەوە $\ln x=\ln 10\times\log x$.

25 **فرەهەنگاو** لە یاسای تیوتن بۆ ساردکردنەوە داهاتووە: پلەی گەرمی شلەیەك کەمدەکات بە پێی نەخشەی توانی $T = T_s + (T_0 - T_s)e^{-kt}$، کاتێك T_0 هێمای پلەی گەرمی بنەڕەتی بێت، و T_s هێمای پلەی گەرمی دەوروبەری شتەکەیە و k هێمای ژمارەیەکی نەگۆڕە و t هێمای کاتە. کاتێك کات بە خولەك دەپێوڕێت $k = 0.283$، قاوەخانەیەك پلەی گەرمی تێیدا 21 پلەی سەدی بێت، قاوەیەك پێشکەش میوانانی دەکات پلەی گەرمییەکەی 96 پلەی سەدی بێت. ئارەزوو مەندانی قاوە ئامۆژگاریمان دەکات کە قاوە لە 60 پلەی سەدی بەنزیکەیی بخورێتەوە.

أ میوانەکە پێویستە چەند خولەك چاوەڕێ بکات پێش خواردنەوەی قاوەکەی؟

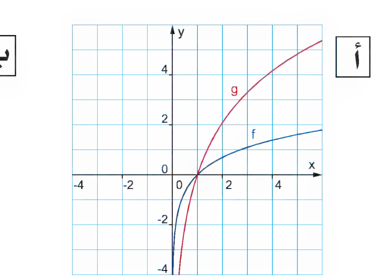
ب وەڵامەکەی پێشوو دەبێتە چەند؟ ئەگەر پلەی گەرمی قاوەخانەکە ببێتە 30 پلەی سەدی؟

ج ڕوونکردنەوەی نەخشەی ساردکردنەوە بکێشە، لە دوو باری پێشوودا، بەڕوونکردنەوەیی ژمارەی خولەکەکان بدۆزەوە بۆ ئەوەی پلەی گەرمی قاوەکە یەکسان بێت بە پلەی گرمی قاوەخانەکە.

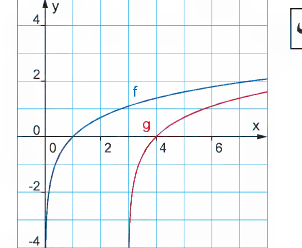
26 وێنەی ڕوونکردنەوەی ئەم دوو نەخشە $y = \frac{\ln x}{\ln 6}$ و $y = \frac{\log x}{\log 6}$ بکێشە بەراوردی نێوان دوو ڕوونکردنەوەکە بکە وبەراوردی نێوان هەریەکیان لەگەڵ ڕوونکردنەوەی نەخشەی $y = \log_6 x$ بکە .

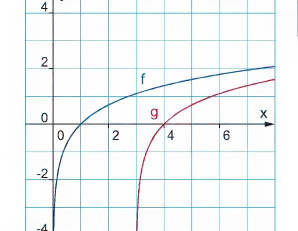
نەخشە پەیدا بووەکان لە گۆڕینی نەخشەی $f(x) = \ln x$ بەیەکێك لەم ڕوونکردنەوەی دێت ببەستەوە.

أ

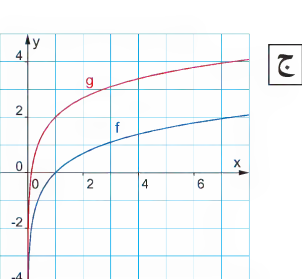


ب





ج



27 $g(x) = \ln(x-3)$

28 $g(x) = 3\ln x$

29 $g(x) = \ln x + 2$

30 **ژینگە** یەکێك لەو ڕێکخراوانەی گرنگی بە ژینگە دەدات لە کەنەدا، ژمارەی ئاژەڵەکانی (ڕنە) کە لە دۆڵی ڕووباری جۆرج دەژین خەملاندنی، کە گەیشتە 4 700 سەر لە ساڵی 1954 دا. ئەو ژمارەیە بە توان زیادکرا تا گەیشتە 472 000 سەر لە ساڵی 1984 .

أ نەخشەی توانی $N(t) = N_0 e^{kt}$ بەکاربهێنە. کاتێك N_0 هێمای ژمارەی بنەڕەتی ئاژەڵەکانە و t هێمای کاتە و $N(t)$ هێمای ژمارەی ئاژەڵەکانە دوای t ساڵ و k ڕێژەی زیادبوونی ساڵانە بێت، بەهای k بدۆزەوە

ب چی دەبێت ئەگەر...؟ ئاژەڵەکان زیادیان کرد بەهەمان شێوە، لە ساڵی 2012 ژمارەکەی دەگاتە چەند؟



ئاژەڵی ڕەنە ئاژەڵێکی کێوییە لە دۆڵی ڕووباری جۆرج، یەکێکە لە گەورەترین ڕەوەی لەم جۆرە لە جیهاندا ژمارەیان لەساڵی 1993 نزیکەی 776 000 سەربوو.

31 **تەنینەوە** کارمەندانی تەندروستی گشتی نەخشەی $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ بەکاردەهێنین بۆ پێوانی مەودای بڵاوبوونەوەی پەتایەك لە کۆمەڵگا.

أ ڕوونکردنەوەی ئەم نەخشە بکێشە.

ب ئەو نەخشە چەند دەرکەناری هەیە.

ج لە ژیانی ڕۆژانە دا ئەونەخشەچی دەگەیەنێت لە بارەکانی بلاو بوونەوەی پەتا.

32 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** لە شێوەی بەرامبەر ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=2^x$ و $g(x)=10^x$ و $h(x)=e^x$ دەردەکەوێت.

أ ڕوونکردنەوەی هەریەك لەم نەخشانە جیابکەوە.

ب پۆتانی خاڵی هاوبەشی لە نێوان سێ ڕوونکردنەوەدا دیاربکە.

ج چی وا لەو خاڵە دەکات لە نێوان ئەو سێ ڕوونکردنەوەییەدا هاوبەش بێت؟

33 **بنووسە** بەراوردی نێوان پاشەکەوتی حسابی بانکێك بە شێوەی بەردەوام و پاشەکەوتی ڕۆژانە بکە. حسابەکە چەند قازانج دەکات ئەگەر پاشەکەوتەکە بەردەوام بێت، لە جیاتی ئەوەی ڕۆژانە بێت. لەگەڵ وەڵامەکەت نموونەیەك بهێنەوە.

34 ژمارەی کێڵگەکانی وڵاتێك گەیشتە 500 33 کێڵگە لە ساڵی 1990 ولەساڵی 2000 گەیشتە 800 30 کێڵگە.

أ بەهای k لە نەخشەی $N(t)=N_0e^{kt}$ بدۆزەرەوە، بۆ ئەوەی سامپڵێکت (نموونەیەك) بۆکەمبوونەوەی ژمارەی کێڵگەکان دەستکەوێت.

ب سامپڵەکە بەکاربهێنە بۆ خەمڵاندنی ژمارەی کێڵگەکان لەساڵی 2010 .

ج تێکرای ڕووبەری کێڵگەکان لەماوەی 1990 - 2000 لە 1209بۆ 1279 دۆنم زیادی کرد نەخشە-یەکی توانی بدۆزەوە کە ڕێگا دەدات بە خەملاندنی تێکرای ڕووبەری کیڵگەکان لە ساڵی 2010 .



35 کام کۆمەڵە بڕ ڕێکخراوان لە بچووکەوە بۆ گەورە؟

أ $\log e$ ،$\ln 10$ ،$\log 10$ ،$\ln 1$

ب $\ln 1$ ،$\log e$ ،$\log 10$ ،$\ln 10$

ج $\ln 1$ ،$\log e$ ،$\ln 10$ ،$\ln 10$

د $\ln 1$ ،$\log 10$ ،$\ln 10$ ،$\log e$

36 کام بڕ یەکسان نییە بە x کاتێك $x \neq 0$ ؟

أ $e^{\ln x}$ ب $\ln e^x$ ج $x\ln e$ د $x+\ln e$

37 کام بڕ یەکسانە بە $\log 50$ ؟

أ $\ln 50 \div \ln 10$ ب $\ln(50 \div 10)$ ج $\ln 50 + \ln 10$ د $(\ln 50)\times(\ln 10)$

38 **کورتە وەڵام** بڕێك بنووسە یەکسان بێت بە $-\ln x$ بە بێ بەکارهێنانی نیشانەی سالب.

بەرەنگاری و فراوانکردن

39 چەندجار لە ساڵێکدا پێویستە بۆ دانانی حسابی بانکێك بە تێکڕایی سوودی ساڵانە 8% بۆئەوەی نرخەکەی 99.9% ی نرخەکەی بێت ئەگەر دانانەکە بەردەوام بێت؟ ئایا گۆڕان لە تێکڕای سوودەکە وەڵامەکە دەگۆڕێت؟ ئەمە ڕوونبکەوە.

40 وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\left(\frac{x^2}{2}\right)}$ باسی ئەو ڕوونکردنەوەیە بکە بوار و مەودای نەخشەکە دیارییکە.

41 وەڵامی ئەم پرسارانەی دێت بدەوە کە پەیوەندی بە ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=\ln x$ هەیە:

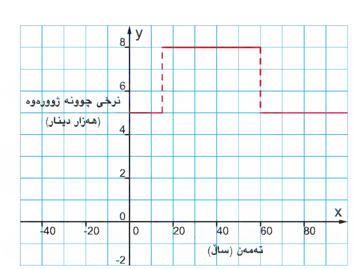
أ کام نەخشە ڕوونکردنەوەییانە دەنوێنرێت، بە وێنەدانەوەی نەخشەی $f(x)$ بەدەوری تەوەرەی دووەم.

ب کام نەخشە ڕوونکردنەوەییانە دەنوێنرێت، بە وێنەدانەوەی نەخشەی $f(x)$ بەدەوری تەوەرەی یەکەم.

ج کام نەخشە ڕوونکردنەوەییانە دەنوێنرێت، بە وێنەدانەوەی نەخشەی $f(x)$ بەدەوری هەردوو تەوەرەکە بەدوای یەك.

د ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)$ و هەرسێ وێنەدانەوەکەی لەهەمان ڕووتەختی پۆوتانەکان بکێشە. ئەو دەرکەنارانە دیاریبکە لە هەر چوار ڕوونکردنەوەکە هاوبەشن.

پێداچوونەوەی لولپێچی



42 **بۆ خۆشی** لەم ڕوونکردنەوەی بەرامبەردا نرخی چوونە ژوورەوەی باخچەی ئاژەڵان بە پێی تەمەنی سەردانکەر دەنوێنێت. وێنەیەکی ڕوونکردنەوەیی بکێشە بۆ نواندنی هەر بارێك لەمانەی خوارەوە. ئەو جێگۆڕکێیە دیاریبکە، کە ڕێگە بە دەستکەوتنی بە پێی ڕوونکردنەوەی بەرامبەر دەدات (پۆڵەکانی پێشوو).

أ پێش کاتژمێر 5:00 ی پاش نیوەڕۆ نرخەکان بۆ نیوە کەم دەکرێنەوە.

ب بۆ هەر چەشنە تەمەنێك بەرزترین ڕادە بۆ 3 ساڵ کەمکرایەوە.

ج هەموو نرخەکان دوو ئەوەندەکران.

نەخشەی پەیدابوو لە جێگۆڕکێی نەخشەی $f(x)=-2x^2+3x-4$ بنووسە بۆ هەر یەکە لەم جێگۆڕکێیانەی خوارەوە. (پۆڵەکانی پێشوو).

43 ڕاکێشانی 5 یەکە بۆ سەرەوە.

44 ڕاکێشانی دوو یەکە بۆ لای چەپ.

45 وینەدانەوە بەدەوری تەوەری یەکەم.

46 کشانی ئاسۆیی هاوکۆڵکەی 2 بێت.

ئەم بڕانە بەبەکارهێنانی یەك لۆگاریتم بنووسە وەڵامەکەت بە سادەترین شێوە دەربڕە.

47 $\log_2 8+\log_2 \frac{1}{2}$

48 $\log_4 64-\log_4 1$

49 $\log_3 243-\log_3 2187$

50 $\log_5 25+\log_5 125$

51 $\log_8 8+\log_8 \frac{1}{8}$

52 $\log x^2+\log x$



6-4 هاوکێشە و لاسەنگە توانییەکان و لۆگاریتمییەکان

Exponential and Logarithmic Equations and Inequalities

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

پێوەرە توانییەکان بەکاردێت، بۆ پێوانی ڕووناکی لە کردارەکانی وێنەگرتن (ڕاهێنانی 40).

ئامانجەکان

- هاوکێشە و لاسەنگە توانییەکان و لۆگاریتمیەکان شیکار دەکات.
- ئەو پرسیارانە شیکار دەکات کە هاوکێشە و لاسنگە توانییەکان و لۆگاریتمییەکان لە خۆدەگرێت .

زاراوەکان Vocabulary

هاوکێشەی توانییەکان Exponential Equation

هاوکێشەی لۆگاریتمی Logarithmic Equation

هاوکێشەی توانی Exponential Equation هاوکێشەیەکە بڕێك یان زیاتری تێدایە و نەزانراوێکی توانی تێدایە. بۆ ئەوەی هاوکێشەیەکی توانی شیکار بکەیت:

- هەوڵبدە بە شێوەیەك بینووسیتەوەکە هەموو هێزەکان هەمان بنچینەیان هەبێت.
  ئەگەر $b^x = b^y$ ئەوا $x = y$ $(b \neq 1 ، b \neq 0)$
- لۆگاریتمی هەردوو لای هاوکێشەکە بەکاربهێنە.
  ئەگەر $a = b$ ئەوا $\log a = \log b$ ، $(a > 0 \quad b > 0)$

نموونە 1 شیکارکردنی هاوکێشە توانییەکان

شیکار بکە و پاسادانبکە

أ $8^x = 2^{x+6}$

$(2^3)^x = 2^{x+6}$ بنووسە وەك هێزی بۆ ئەوەی هەمان بنچینەت

$2^{3x} = 2^{x+6}$ دەستکەوێت بۆ ژمارکردنی هێزی هێز، دوو توانەکە لە

$3x = x + 6$ یەکتر بدە لە بەر ئەوەی بنچینەکان وەك یەکن، دوو

$x = 3$ توانەکە یەکسانن.

پاسادانبکە

2^{x+6}	8^x
2^{3+6}	8^3
2^9	8^3
512	512 ✓

شیکارەکە $x = 3$

ب $5^{x-2} = 200$

$\log 5^{x-2} = \log 200$ لەبەر ئەوەی 200 هێز نیە لە هێزەکانی 5 ، لۆگاریتمی هەردوو لا وەربگرە.

$(x-2)\log 5 = \log 200$ سیفەتی لۆگاریتمی هێز بەکاربهێنە هەردوو لا بەسەر

$x - 2 = \dfrac{\log 200}{\log 5}$ log5 دابەشبکە

$x = 2 + \dfrac{\log 200}{\log 5} \approx 5.292$



پاسەدانبکە بژمێر بەکاربهێنە.

شیکار بریتییە لە $x \approx 5.292$

ڕۆشنایی

کاتێك وەڵامێکی نزیکراوە لە کرداری پاسادانکردن بەکاردەهێنیت، وەڵامی تەواوت بۆ دەرناچێت بەڵکو ئەنجامێکی گونجاوت بۆ دەردەچێت.

خاڵی چاودێری

1. شیکاربکە و پاسەدانبکە

أ $3^{2x} = 27$ **ب** $7^{-x} = 21$ **ج** $2^{3x} = 15$



نموونــــــه 2 جێبەجێکردن لەسەر دراو (پارە)

دەتوانیت لە نێوان دەستکەوتنی ئۆتۆمبیلێك نرخەکەی 20 ملیۆن دینار یان دەستکەوتنی یەك دینار لە ڕۆژی یەکەم و دوو ئەوەندەی دەستتکەوتووە لە ڕۆژی دواتر و هەروەها * یەکێکیان هەڵبژێریت، ئەگەر دووەمت هەڵبژارد، لە چ ڕۆژێك گوژمەیەکی زیاترت لە نرخی ئۆتۆمبێلەکە دەستدەکەوێت؟

لە ڕۆژی یەکەم یەك دینار2^0ت دەستدەکەوێت و لە ڕۆژی دووەم 2^1 دینار و هەروەها ئەوا 2^{n-1} دینارت لە ڕۆژی n دەستدەکەوێت. بۆ دەستکەوتنی وەڵام لاسەنگەکە شیکار بکە.

$$2^{n-1} > 20\,000\,000$$

$2^{n-1} > 2 \times 10^7$ — 20 ملیۆن بە شێوەی زانستی بنووسە

$\log(2^{n-1}) > \log(2 \times 10^7)$ — لۆگاریتمی هەردوو لا وەربگرە

$(n-1)\log 2 > \log 2 + \log 10^7$ — سیفەتی هێز و سیفەتی ئەنجامی لێکدان بە کاربهێنە. .

$(n-1)\log 2 > \log 2 + 7$ — $\log 10^7 = 7$

$n-1 > \dfrac{\log 2 + 7}{\log 2}$ — هەردوو لا دابەشی $\log 2$ بکە

$n > \dfrac{\log 2 + 7}{\log 2} + 1$ — بژمێر بەکاربهێنە

$n > 25.26$ — وەڵامەکەت نزیکبکەوە و بۆ نزیکترین ژمارەی تەواوی لە لای سەرەوە

لە ڕۆژی بیست و شەشەمەوە، ئەوەی دەستت دەکەوێت زیاترە لە نرخی ئۆتۆمبیلەکە. ساغبکەوە. لەبەر ئەوەی$2^{26-1} = 2^{25} = 33\ 554\ 432$ لە ڕۆژی بیست و شەشەمەوە 32 44 55 33 دینارت دەستدەکەوێت، ئەوەش زیاترە لە نرخی ئۆتۆمبیلەکە.

تێبینی

ئاساییە خوێندکار بەراوردی نێوان کۆی ئەوەی دەستدەکەوێت لەگەڵ نرخی ئۆتۆمبیلەکە بکات واتە ئەمە شیکار بکات.

$2^0+2^1+2^2\ldots+$

$2^{n+1} > 20 \times 10^6$

$\Longrightarrow n=24$

تێبینی

ئەگەر بژمێرت پێ نەبێ:

$\log 2 \approx 0.30$

$\log 3 \approx 0.47$

$\log 5 \approx 0.69$



2. لە نموونەی 2 وا دابنێ ئەو گوژمەی هەر ڕۆژێك وەریدەگریت 3 ئەوەندەی ئەو گوژمەیە لە ڕۆژی پێشتر وەریدەگریت لە جیاتی دوو ئەوەندە. لە کام ڕۆژ ئەوەی وەریدەگریت لە ملیار دینار زیاترە؟

هاوکێشەی لۆگاریتمی Logarithmic Equation هاوکێشەیەکە بڕێکی لۆگاریتمی یان زیاتری تێدایە و نەزانراوێك لەخۆ دەگرێت، دەتوانیت هاوکێشە لۆ گاریتمیەکان بەبەکارهێنانی سیفەتی لۆگاریتمی شیکار بکەیت.

نموونــــــه 3 شیکارکردنی هاوکێشەی لۆگاریتمی

شیکاربکە

أ $\log_3(x-5) = 2$

$3^{\log_3(x-5)} = 3^2$ — 3 بەکاربهێنە وەك بنچینەیەکی هاوبەش بۆ هەردوو لا.

$x - 5 = 9$ — پێچەوانەبوونەوە لە نێوان هێز و لۆگاریتم بەکاربهێنە سادەبکە.

$x = 14$

ب $\log 45x - \log 3 = 1$

$\log\left(\dfrac{45x}{3}\right) = 1$ — سیفەتی لۆگاریتمی ئەنجامی دابەشکردن بەکاربهێنە دابەشبکە.

$\log(15x) = 1$

$10^{\log(15x)} = 10^1$ — 10 وەك بنچینەیەکی هاوبەشی هەردوولا بەکاربهێنە

$15x = 10$ — پێچەوانەبوونەوە لە نێوان هێز و لۆگاریتم بەکاربهێنە سادەبکە.

$x = \dfrac{2}{3}$

لە بیرت بێت

پێداچوونەوەی سیفەتەکانی لۆگاریتم بکە لەوانەی 4-4 دا

ج

$\log_4 x^2 = 7$

$2\log_4 x = 7$ — سیفەتی لۆگاریتمی هێزی

$\log_4 x = \frac{7}{2}$ — هەردوولا دابەشی 2 بکە.

$x = 4^{\frac{7}{2}}$ — پێناسەی لۆگاریتم

$x = (2^2)^{\frac{7}{2}}$ — $4 = 2^2$

$x = 2^7 = 128$ — سادەیبکە .

د

$\log x + \log(x+9) = 1$

$\log x(x+9) = 1$ — سیفەتی ئەنجامی لێکدانی لۆگاریتم بەکاربهێنە

$10^{\log x(x+9)} = 10^1$ — 10 وەك بنچینەی هاوبەش بۆ هەردوو لا بەکاربهێنە

$x(x+9) = 10$ — پێچەوانەبوونەوە لە نێوان هێز و لۆگاریتم بەکاربهێنە .

$x^2 + 9x - 10 = 0$ — ڕادەکان لە یەکتربدە و کۆیانبکەوە.

$(x-1)(x+10) = 0$ — شیتەڵبکە

$x + 10 = 0$ یان $x - 1 = 0$ — سیفەتی لێکدانی سفری بەکاربهێنە

$x = -10$ یان $x = 1$ — شیکار

ساغبکەوە

$\log x + \log(x+9)$	1
$\log 1 + \log(1+9)$	1
$\log 1 + \log 10$	1
$0 + 1$	1
$0 + 1$	1 ✓

$\log x + \log(x+9)$	1
$\log(-10) + \log(-10+9)$	1 ✗

$\log(-10)$ پێناسە نەکراوە

کەواتە شیکارەکە بریتییە لە $x = 1$

ئاگاداربە!

هەمووکات شیکارەکان ساغبکەوە چونکە لەوانەیە شیکاری نامۆ بێتە ناو شیکارەکان.

خاڵی چاودێری

3. شیکاربکە

أ $3 = \log 8 + 3\log x$

ب $2\log x - \log 4 = 0$

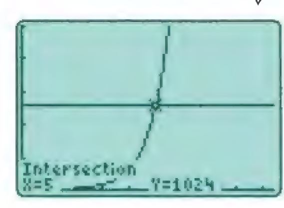
نموونە 4

بەکارهێنانی خشتەکان و جەبر بۆ شیکارکردنی هاوکێشە و لاسەنگە توانییەکان و لۆگاریتمییەکان.

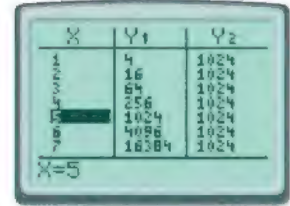
بۆ شیکارکردن خشتەیەك یان جەبر بەکاربهێنە.

أ $2^{2x} = 1024$

بژمێری ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنە $2^\wedge(2X)$ لە پێش Y1 و 1024 پێش Y2 بنووسە.



لە وێنە ڕوونکردنەوەییەکە بۆ پۆوتانی یەکەمی خاڵی یەکتربڕینی دوو ڕوونکردنەوەیەکە بگەڕێ.



X	Y1	Y2
1	4	1024
2	16	1024
3	64	1024
4	256	1024
5	1024	1024
6	4096	1024
7	16384	1024

X=5

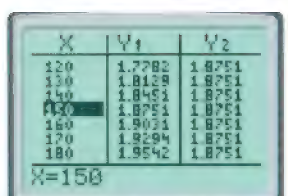
لەخشتەکەدا لە بەهای x بگەڕێ کە Y1 = Y2 وادەکات

شیکار بریتییە $x = 5$



ب $\log x - \log 2 \le \log 75$

بژمێره بەکاربهێنە $\log x - \log 2$ لە پێش Y1 و log75 لە پێش Y2 بنووسە.



لە وێنەی ڕوونکردنەوەیی بەدوای پۆوتانی یەکەمی خاڵی یەکتربڕینی دوو ڕوونکردنەوەییەکە بگەڕێ.

لەخشتەکەدا بۆ بەهایەکانی x بگەڕێ کەوادەکەن $Y1 \le Y2$.

کۆمەڵەی شیکار بریتییە لە $\{x/x \le 150\}$

ساغبکەوە: جەبر بەکاربهێنە.

$\log x - \log 2 \le \log 75$

$\log \frac{x}{2} \le \log 75$ — *سیفەتی ئەنجامی دابەشکردنی لۆگاریتم بەکاربهێنە*

$10^{\log \frac{x}{2}} \le 10^{\log 75}$ — *10 وەك بنچینەیەکی هاوبەشی بۆ هەردوو لا بەکاربهێنە.*

$\frac{x}{2} \le 75$ — *پێچەوانەبوونەوە لە نێوان هێز و لۆگاریتم بەکاربهێنە، سادەبکە.*

$x \le 150$ ✓



4. خشتەیەك یان جەبر بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی:

أ $2^x = 4^{x-1}$ **ب** $2^x > 4^{x-1}$ **ج** $\log x^2 = 6$

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. بۆچی دەرئەنجامی ئەوە دەکەیت، ئەگەر $\log a = \log b$ ئەوا $a = b$ کاتێك $a > 0$ وَ $b > 0$؟

2. تەنها هەنگاوی یەکەم بۆ شیکارکردنی ئەمانەی دێن دیاریبکە.

أ $\log x^5 = 10$ **ب** $\log 2x + \log 2 = 1$

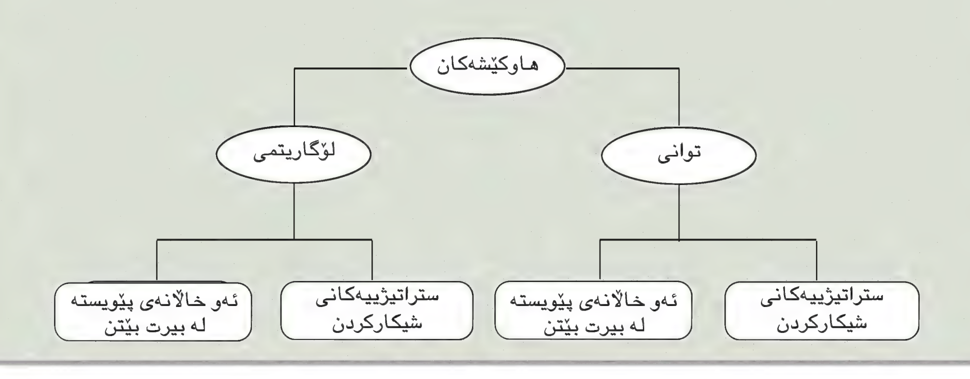
ج $x^4 = 100$ **د** $\log(x + 1000) = 2$

هـ $\log(x + 4) + \log x = 2$ **و** $\log_6(x + 6) = 3$

3. ڕوونیبکەوە چۆن دەتوانرێت هاوکێشەیەکی لۆگاریتمی شیکارێکی سالبی هەبێت. بەڵگە بۆ وەڵامەکەت بهێنەوە و ئەگەر دەکرێت نموونەیەك بهێنەوە.

4. ڕێکخەربە ئەم هێڵکارییەی خوارەوە دروستبکە و تەواویبکە. بەشێوازی خۆت ئەو ستراتیژانە و خاڵانە بنووسەکە پێویستە لە بیرت بێت کە تایبەتن بە هاوکێشەی توانی و لۆگاریتمی.





6-4 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاراستەکراو

1 **زاراوەکان** دەتوانیت شیکاری هاوکێشەی ______ بکەیت، بەوەرگرتنی لۆگاریتم بۆ هەردوولا (توانی یان لۆگاریتمی)

بڕوانە نموونە 1

شیکاریکە و پاسادانبکە.

2 $4^{2x} = 32^{\frac{1}{2}}$ **3** $9^x = 3^{x-2}$ **4** $2^x = 4^{x+1}$

5 $4^x = 10$ **6** $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ **7** $2.4^{3x+1} = 9$

بڕوانە نموونە 2

8 **دانیشتوان** ژمارەی دانیشتوانی لادێیەك 3400 کەسە، و بەڕێژەی 3%ساڵانە زیاددەکات. دەتوانیت پشت بەنەخشەی $P = 3400(1+0.03)^t$ ببەستێت بۆ نواندنی ژمارەی دانیشتوان بە پێی کات t کاتێك p هێمای ژمارەی دانیشتوان پاش t ساڵ بێت دوای چەند ساڵ ژمارەی دانیشتوان لە 100 000 کەس تێدەپەڕێت.

بڕوانە نموونە 3

شیکاریکە و پاسادانبکە

9 $\log_2(7x+1) = \log_2(2-x)$ **10** $\log_6(2x+3) = 3$

11 $\log 72 - \log\left(\frac{2x}{3}\right) = 0$ **12** $\log_3 x^9 = 12$

13 $\log_7(3-4x) = \log_7\left(\frac{x}{3}\right)$ **14** $\log 50 + \log\left(\frac{x}{2}\right) = 2$

15 $\log x + \log(x+48) = 2$ **16** $\log\left(x + \frac{3}{10}\right) + \log x + 1 = 0$

بڕوانە نموونە 4

خشتەیەك و وێنەیەکی ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنە بۆ شیکاری:-

17 $2^{2x+1} = 256$ **18** $2^x 3^x \le 7776$ **19** $2\log x^4 = 16$ **20** $x > 10\log x$

ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

ڕاهێنانی ئازاد	
بۆشیکارکردنی ڕاهێنانەکان	سەیری نموونە بکە
26–21	1
27	2
33–28	3
36–34	4

شیکاریکە و پاسادانبکە

21 $2^{x-1} = \frac{1}{64}$ **22** $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 8^{x-1}$ **23** $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-2} = 125^{\frac{x}{2}}$

24 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = 1.6$ **25** $(1.5)^{x-1} = 14.5$ **26** $3^{\frac{x}{2}+1} = 12.2$

27 **دەرمان** پەرستارێك حەبێکی ئارامکەرەوەی دابە نەخۆشێك،325mg ئەسپرینی تێدایە. نەخشەی $A = 325\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{15}}$ بۆ دیاریکردنی هێندی ئەسپرینی A ماوە لە خوێنی نەخۆشەکە دوای t خولەك لە وەرگرتنی حەبەکە. لاسەنگەیەکی لۆگاریتمی بنووسە و شیکارییکە، بۆ دیاریکردنی ژمارەی خولەکە پێویستەکان بۆ ئەوەی هێندی ئەسپرینەکە لە 50mg کەمتربێت.

شیکاریکە

28 $\log_3(7x) = \log_3(2x+0.5)$ **29** $\log_2\left(1+\frac{x}{2}\right) = 4$

30 $\log 5x - \log(15.5) = 2$ **31** $\log_5 x^4 = 2.5$

32 $\log x - \log\left(\frac{x}{100}\right) = x$ **33** $2 - \log 3x = \log\left(\frac{x}{12}\right)$

خشتەیەك یان جەبر بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی

34 $2 \times 3^{x-1} = 162$ **35** $4x \le 2^{x+1}$ **36** $\log(2x-17) + \log x \ge 2$

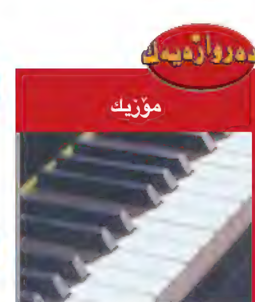
37 $\log x = \log(x^2 - 12)$ شیکاربکە وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

38 $5^{2x} = 100$ شیکاربکە وەڵامەکەت نزیکبکەوە بۆ نزیترین بەشی سەدی.

39 $5^{x+2} = 64$ بە زیاتر لە ڕێگایەك شیکاری بکە.

40 **مۆزیك** لەرەلەری هەر ئاوازێك (بە هێرتز) لە ئاوازەکانی پیانۆ بە پەیوەندییەك لەگەڵ شوێنی دووگمەکەی (کلیلەکەی) لە سەر تەختەی کلیلەکان بە پێی نەخشەی $f(n) = 440 \times 2^{\frac{n}{12}}$ دەنوێنرێت، کاتێك n ژمارەی ئەو کلیلانەیە کە ئەو کلیلە لە کلیلی مەرکەزی جیادەکاتەوە (n سالب دەبێت ئەگەر کلیلەکە لە لای چەپی کلیلە مەرکەزیکەوە بێت، و موجەب دەبێت ئەگەر لە لای ڕاستی بێت) شوێنی کلیلەکە بدۆزەوە بۆ ئاوازێك لەرەلەرەکەی 110 هێرتزە.

41 **پارەدان** وا دابنێ 250 000 دینار بە بانکێك سپێردرا بە سوودێکی ئاویتە تێکڕاکەی4.5% بێت لە وەرزێکدا پاشەکەوتی حسابی وەرزی (4 جار لە ساڵێکدا) دەکرێت یاسای $A = P(1+r)^n$ بەکارێت بۆ هەژماری ئەوەی گوژمە بنەڕەتییەکە p دەیگاتێ، کە سپێردرابوو لە حسابی سوودی ئاوێتەیەك تێکڕاکەی r بێت لەوەرزێکدا، دوای تێپەڕبوونی n وەرز لە سپاردنی ئەو یاسایە بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی ژمارەی وەرزە پێویستەکان، بۆ ئەوەی گوژمەکە بەلای کەمی ببێتە 500 000 دینار (یارمەتی: یەکەمجار هەردوو لای هاوکێشەکە بەسەر p دابەشبکە).



پیانۆ دادەنرێت بە ئامێرێکی مۆزیکی ژێدار و دەهۆڵی لە یەك کاتدا چەکوشی بچووك بۆ دانراوە لە ژێیەکان دەدات.

42 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** چەند ژمارەی ڕاستی دەبنە شیکاری $\log x^2 < 2\log x$ ؟ بژمێری ڕوونکردنەوەیی بۆ وێنەی هەردوو ڕوونکردنەوەییەکە بەکاربهێنە، پاسەدانی وەڵامەکەت بکە. دوو ڕوونکردنەوەکە چی نیشاندەدات بۆ وەڵامەکە.

43 **هەڵە لە شیکاردا** لە کاتی شیکارکردنی هاوکێشەی $\log x + 4 = 8$ ، دانا وەڵامی ، 999999 دەستکەوت. هەڵەی دانا لە کوێیە؟

44 **بنووسە** باسی دوو ڕێگا بکە، دەتوانیت بەکاریان بهێنێت بۆ شیکارکردنی هاوکێشەیەکی توانی. نموونەیەك بهێنەوە، ڕوونیبکاتەوە کە هەر ڕێگایەکییان کەی بەکاردەهێنرێت.

45 دەتوانیت نەخشە $N(t) = 119(0.987)^t$ بۆ دیاریکردنی ژمارەی کێڵگەکانی پەلەوەر بەهەزاران لە یەکێك لە وڵاتەکان بە پێی ژمارەی ساڵەکانی t دوای ساڵی 1980

أ ئایا ژمارەی کێڵگەکان زیادیکردووە لە ساڵی 1980 یان کەمیکردووە، چۆن ئەوەت زانی؟

ب ژمارەی کێڵگەکان ساڵی 1980 و ساڵی 2000 لە و وڵاتەدا چەند بوو؟

ج بە پێی نەخشەکە کەی ژمارەی کێڵگەکان بەنزیکەیی دەبێتە 80 000 کێڵگە؟

تاری
(Km)

600 Exosplere
Thermorfee
85 Mesosphere
50 Startosphere
14 Troposphere
0

46 **کەشناسی** لە چینێکی بەرگەی هەوادا، پلەی گەرمی نەگۆڕەو دەکاتە $-57°$ ، دەتوانرێت پشت بە نەخشەی $P(h) = 128(10)^{-0.0682h}$ ببەستین وەك هاوکێشەیەك بۆ پێوانی پەستانی هەوای p (بە کیلۆ باسکاڵ kpa پێورابێت). بە پێی بەرزی h (بەکیلۆ مەتر پێورابێت) لە ڕووی زەوییەوە پەستانی هەوا لەو چینە لە نێوان $2.55\ kpa$ و $22.9\ kpa$ دەبێت.

أ کەمترین بەرزی و زۆرترین بەرزی لەو چینەدا چەندە بۆ ئەوەی هاوکێشەکە ڕاستبێت؟

ب چی دەبێت ئەگەر....؟ پەستانی کەش لە ڕووی دەریا $101\ kpa$ بەنزیکەیی بێت، ئەگەر ئەو هاوکێشەی سەرەوەت بەکارهێنا بۆ دیاریکردنی پەستانی کەش لە ڕووی دەریا، ئایا بەهایەکی گەورەتر یان بچووکترت لە بەها ڕاستەقینەکەی دەستدەکەوێت. ئەمە ڕوونبکەوە.



47 شیکاری هاوکێشەی $b^x = c$ دەکاتە چی؟

أ $x = \frac{\log b}{\log c}$ ب $x = \frac{\log c}{\log b}$ ج $x = \frac{\log b}{c}$ د $x = \frac{\log c}{b}$

48 شیکاری هاوکێشە $\log(x-21) = 2 - \log x$ بکە.

أ $x = 4$ ب $x = \frac{25}{4}$ ج $x = \frac{21}{2}$ د $x = 25$

49 کام بڕە گەورەترین بەها وەردەگرێت کاتێك $p = 5$ و $q = 2$ ؟

أ $\log 2p - \log 3q$ ب $2\log q - 3\log p$ ج $\log p^2 - \log q^3$ د $\log p - \log q$

بەرەنگاری و فراوانکردن

50 ئایا دەتوانرێت هاوکێشەی $\log_x x = x$ شیکار بکرێت؟ ئەمە ڕوونبکەوە.

51 هاوکێشەی $x = 0.125^{\log_2 5}$ بەجەبری شیکار بکە.

52 کۆمەڵە شیکاری لاسەنگەی $\log_3 36 - \log_3 x > 1$ بدۆزەوە؟ بژمێری زانستی بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی لاسەنگەکە بە ڕوونکردنەوەیی.

پێداچوونەوەی لولپێچی

53 **وێنەگرتن** نرخی شووشتنەوەی وێنەیەکی پێوانە $24cm \times 20cm$ 750 دینارە، نرخی شوشتنەوەی وێنەیەکی پێوانە $15cm \times 10cm$ 350 دینارە، سێوی 5250 دیناری لایە. هێمای x بەکاربهێنە بۆ ژمارەی وێنەکانی پێوانەی یەکەم، و y بۆ ژمارەی وێنەکانی پێوانەی دووەم *(وانەی 2 – 1)*.

أ لاسەنگەیەك بنووسە بۆ ژمارەی ئەو وێنانەی کە سێوی دەتوانیت لە هەرجۆرێك بیشواتەوە.

ب لاسەنگەکە بەڕوونکردنەوەیی شیکاربکە. سێوێ دەتوانێت چەند جۆری دووەم بشواتەوە، ئەگەر زانیت 4 وێنە دەرکەوت لە جۆری یەکەم؟

سنووردەری ڕیزکراوەکە بدۆزەرەوە *(وانەی 3 – 4)*

54 $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ **55** $\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$ **56** $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ **57** $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

دژە کردارەکان بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی پێچەوانەی نەخشکە *(وانەی 4 – 2)*

58 $f(x) = 4x + 3$ **59** $f(x) = 6(x-2)$ **60** $f(x) = \frac{x}{3} + 9$ **61** $f(x) = \frac{7x-1}{5}$



7-4



نموونە توانییەکان و لۆگاریتمییەکان
Exponential and Logarithmic Models



ئامانجەکان

- بەکارهێنانی نەخشەی توانی و لۆگاریتمی بۆ دۆزینەوەی نموونەکان بۆ پێدراوەکان.
- نموونە توانییەکان ولۆگاریتمییەکان بەکاردێت بۆ شیکردنەوە و دارشتنی پێشبینییەکان



زاراوەکان
Vocabulary

لێژ بوونەوەی توانی
(الانحدار الاسی)
Exponential Regression

لێژبوونەوەی لۆگاریتمی
(الانحدار اللوغاریتمی)
Logarithm Regression

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

ئەو کەسانەی بەردە بەنرخەکان مشتومالْ دەکەن دەزانن کە بەهای خشڵە هاوشێوەکان بە پێی پەیوەندییەکی توانی بەبارستاییەکەیەوە دەبەسترێتەوە (نموونە 2)

دەتوانرێت بۆ شیکردنەوەی پێدراوەکان شێوازێك یان پەیوەندییەك دەربکەوێت کە لە نێوان دوو هێنددا دووبارە دەبێتەوە. سەیری خشتەی خوارەوە بکە بۆ بەهایەکانی نەخشەی $f(x) = 2(3^x)$.

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{2}{3}$	2	6	18	54

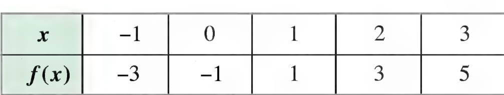
× 3   × 3   × 3   × 3

سەرەنجبدەکە ڕێژەی هەر بەهایەك لە بەهایەکانی y بۆ بەهای پێش خۆی نەگۆڕە. هەر بەهایەك لەو بەهایانە، جگە لە بەهای یەکەم، دەکاتە سێ ئەوەندەی بەهایەکەی پێش خۆی، و هەروەها، ئەوا ڕێژەی بەهای نەخشەی بەرامبەر بەهای x ـە کە هەمان ماوە لە یەکێکیان جیادەکاتەوە، ڕێژەیەکی نەگۆڕە دەتوانرێت ئەم جۆرە پێدراوانە بە نەخشەیەکی توانی $f(x) = ab^x$ بنوێنرێت.

نموونـــــە 1 جیاکردنەوەی پێدراوە توانییەکان

دیاریکە نەخشەی f نەخشەیەکی توانییە یان نا. ئەگەر توانییە، ڕێژەی نەگۆڕەکەی بدۆزەرەوە کاتێك $f(x) = ab^x$

أ

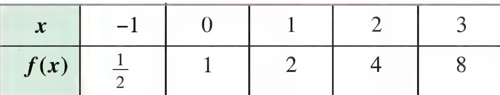


x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	−3	−1	1	3	5

جیاوازی یەکەم   +2   +2   +2   +2

نەخشەکە نەخشەیەکی هێڵییە.

ب



x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

جیاوازی یەکەم $+\frac{1}{2}$ +1   +2   +4

ڕێژەکان $2 = \frac{8}{4} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1} = \frac{1}{\frac{1}{2}}$

نەخشەکە نەخشەیەکی توانییە و ڕێژە نەگۆڕەکەی بریتیە لە 2

> **لەبیرت بێت**
>
> نەخشەی هێڵی وەك نموونەیەك بەکاردێت بۆ پێدراوەکان جیاوازییە یەکەمەکانی نەگۆڕ بێت. هەروەها نەخشەی دووجا وەك نموونەیەك بەکاردێت بۆ پێدراوەکان جیاوازیە دووەمەکانی نەگۆڕبێت.

خاڵی چاودێری

1. نەخشەی f نەخشەیەکی توانییە یان نا. ئەگەر توانییە ڕێژە نەگۆڕەکەی بدۆزەرەوە کاتێك $f(x) = ab^x$

أ

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	$2.\overline{6}$	4	6	9	13.5

ب

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	−3	2	7	12	17

پێشتر بژمێری ڕوونکردنەوەیت بەکاردەهێنا بۆ دۆزینەوەی نموونەیەکی هێڵی کە پێدراوە هێڵییەکان دەنوێنێت. واتە کرداری **لێژبوونەوەی هێڵیت** ئەنجامدا، بژمێری ڕوونکردنەوەیی بەکاردێت بۆ دۆزینەوەی **نموونەی توانی** کە پێدراوەتوانییەکان دەنوێنێت. کاتێك دڵنیا دەبێت پێدراوەکان توانین. **ExpReg** (Exponential Regression) لە بژمێری ڕوونکردنەوەیدا بەکاربهێنە، بۆ دۆزینەوەی نموونەیەکی نوێ بۆ ئەوپێدراوانە، کرداری دۆزینەوەی نموونەی توانی بۆ نواندنی کۆمەڵێك پێدراو پێیدەوترێت کرداری **لێژبوونەوەی توانی Exponential Regression** نموونە توانییەکان کە بژمێری ڕوونکردنەوەیی درووستی دەکات ، تەنها نەخشەی جۆری $f(x) = ab^x$ دەگرێتەوە وە هەروەها کشانەوەی ئەم نەخشانە لە بژمێرەکە ناکرێت

نموونـــــە 2 جێبەجێکردن لە مشتوماڵکردنی خشڵەکان

خشتەی بەرامبەر بارستایی ژمارەیەك پارچە ئەڵماس و نرخەکەی بەنزیکەیی دەردەخات. نموونەیەکی توانی بۆ ئەو پێداروانە بدۆزەوە. ئەو نموونەی دۆزیتەوە بەکاربهێنە بۆ خەملاندنی بارستایی ئەڵماسێك نرخەکەی 2325 هەزار دیناربێت.

بارستەیی (قیراط)	نرخ دینار
0.5	920 000
1.0	1 160 000
2.0	1 500 000
3.0	2 150 000
4.0	2 900 000

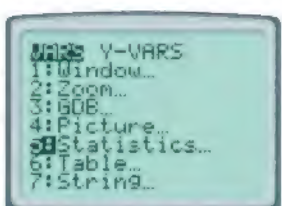
نرخی ئەڵماس

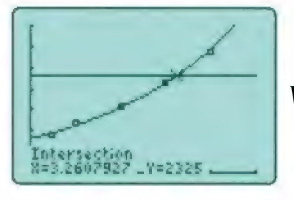
هەنگاوی 1 پێدراوەکان لە دوو لیست لە ناوبژمێرەکە تۆماربکە.

فرمانی لێژبوونەوەی توانیExpReg بەکاربهێنە بژمێرەکە نموونەیەکی توانی ئەو پێدراوانەت دەداتی، بریتییە لە نەخشەی توانی $V(w) = 805462.6\ (1.38)^{w}$ کاتێك V هێمای نرخی ئەڵماسەکەیە، W هێمایە بۆ بارستەییەکەی کە بەقیرات پێوراوە.

هەنگاوی 2 بەڕوونکردنەوەیی پێدراوەکانی خشتەکە بنوێنیە، و وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە. بۆ دڵنیابوون لەوەی نموونەیەکی توانی بۆ ئەو پێدراوانە دروستکردووە ڕێسای نەخشەکە بەرامبەرY1 لە شاشە Y = بنووسە، دووگمەیVARS دابگرە و**Statistics : 5** هەڵبژێرە پاشان ENTER دابگرە. بجوڵێ بۆ 1:Reg EQ EQ هەڵبژێرە.







2 325 000 2تۆماربکە بەرامبەرY2 لەوێنەی نەخشەی $V = 2\ 325\ 000$ فەرمانی یەکتربڕین لە بژمێر بەکاربهێنە. لەوانەیە پێویستت بە ڕێکخستنی دوورییەکانی شاشەکە هەبێت بۆ ئەوەی خاڵی یەکتربڕین دەربکەوێت.

لەبیرت بێت

ئەگەر لەسەر شاشەی بژمێرr^2 وr ت نەبینی کاتێك لێژبوونەوە هەژمار دەکەیت. دووگمەی CATALOG دابگرە 2nd پاشان 0 دابگرە و Diagnosticon هەڵبژێرە.



2. دابەزینی توانی بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی نموونە بۆ پێدراوەکانی خشتەی خوارەوە، کەی ژمارەی بەکتریاکان دەبێتە 2000 بەکتریا.

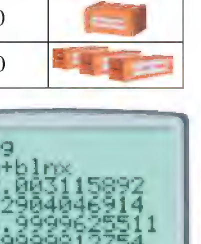
کات (خولەك)	0	1	2	3	4	5
ژمارەی بەکتریا	200	248	312	390	489	610

دەتوانرێت زۆر لە پێدراوەکانی ژیانی ڕۆژانە بە نەخشەی لۆگاریتمی بنوێنرێت. دەتوانیت **لێژبوونەوەی لۆگاریتمی Logarithmic Regression** بۆ دۆزینەوەی نەخشە بەکاربهێنرێت.

نموونـــــه 3 جێبەجێکردن لە فیزیادا

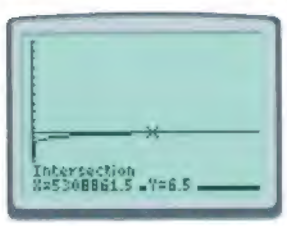
هێزی تەقینەوە

TNT تەن	هێز
	2.0
	3.0
	4.0
	5.0



لە خشتەی بەرامبەر هێزی تەقینەوە، بە پێوەری ڕێختەر دەردەکەوێت، بۆ هێندێکی دیاریکراو لە ماددەی TNT ، نەخشەی لۆگاریتمی سروشتی بدۆزەوە، کە دەبێتە نموونەیەك بۆ ئەو پیدراوانە. ئەو نموونەی دۆزیتەوە بەکاربهێنە، بۆ خەمڵاندنی هێندە تەقێنراوەکان لە ماددەی TNT تەقینەوەکەی بکاتە بومەلەرزەیەك بەهێزی 6.5 بە پێوەری ڕێختەر. پێدراوەکان لە دوو لیستدا تۆماربکە،

لە بژمێری ڕوونکردنەوەیی پاشان فەرمانی لێژبوونەوەی لۆگاریتمی بەکاربهێنە، دوگمەی STAT دابگرە CALC پاشان **9 : LnReg** هەڵبژێرە.نەخشەی $R(x) = 2 + 0.29\ln x$ نموونەیەکی لۆگاریتمییە پێدراوەکانی نەخشەکە پێکدەهێنێت. کاتێك R هێزی بومەلەرزەکان بێت بە پێوەری ڕێختەر و t هێندی تەقێنداوەکانی ماددەی TNT بە چەندها تەن بێت. بەهای r^2 دەریدەخات نموونەکە گونجاوە بۆ نواندنی پێدراوەکانی خشتەکە. فرمانی یەکتربرین لە بژمێری ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی x کاتێك $y = 6.5$ هێزی تەقاندنەوەکانی ماددەی TNT بەبارستایی 5.3 ملیۆن تەن بەنزیکەیی دەکاتە هێزی تەقینەوەی بومەلەرزەیەك بەهێزی 6.5 بە پێوەری ڕێختەر.





3. لێژبوونەوەی لۆگاریتمی بەکاربهێنە، بۆ دۆزینەوەی نەخشەیەك کە نموونەیەك لە پێدراوەکانی خشتەکە دروست بکات. کەی خێراییەکە دەگاتە 8 m/s مەتر لە چرکەیەکدا؟

خولەك	1	2	3	4	5	6	7
خولەك (m / s)	0.5	2.5	3.5	4.3	4.9	5.3	5.6

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. چۆن دەزانیت کە ئایا دەکرێت پێدراوەکان بە نموونەیەکی توانی بنوێنێت، کاتێك بە شێوەی $f(x) = ab^x$ بنووسرێت.

2. ڕوونبکەوە بۆچی پێدراوەکان لە باری دوو خاڵەکە بەس نییە بۆ ئەوەی پێت بڵێت پێدراوەکان لۆگاریتمین یان توانین.

3 ڕێکخەر بە ئەم هێڵکارییەی خوارەوە دروستبکە و تەواوبکە. ئەو هەنگاوانە دیاریبکە بۆ دۆزینەوەی نموونەیەکی توانی یان نموونەیەکی لۆگاریتمی.

لێژبوونەوە
- توانی
- لۆگاریتمی



7-4 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** ________ بەکەڵکە کاتێك دەتوانرێت پێدراوەکان بەنەخشەی $f(x)=ab^x$ بنوێنرێت (لێژبوونەوەی توانی یان لێژبوونەوەی لۆگاریتمی).

بڕوانە نموونە 1

ئایا نەخشەی f نەخشەیەکە لە جۆری $f(x) = ab^x$ ئەگەر وایە، ڕیژە نەگۆڕەکە دیاریبکە

2

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	$-2\frac{5}{7}$	−1	11	95	683

3

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	27	18	12	8	$5\frac{2}{3}$

4

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	5	1	−3	−7	−11

5

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	$2\frac{1}{4}$	3	4	$5\frac{2}{3}$	$2\frac{1}{9}$

بڕوانە نموونە 2

6 **فیزیا** لەو خشتەیەی خوارەوە دەردەکەوێت، پلەی گەرمی کوپە چایەکە چەند لە پلەی گەرمی ژوورەکە زیاترە، کاتێك سارد دەبێتەوە. نموونەیەکی توانی بدۆزەوە، ئەو پێدراوانە بنوێنێت. نموونەکە بەکاربهێنە بۆ خەملاندنی ژمارەی خولەکی خایەندراو پێش ئەوەی جیاوازی نێوان پلەی گەرمی کوپەکەو ژوورەکە بۆ کەمتر لە 4 پلە.

چۆن چایەکە سارد دەبێتەوە					
کات بە خولەك	0	1	2	3	4
پلەکانی گەرمای زیاتر لەپلەی گەرمی ژوورەکە	55	48	43	38	33

بڕوانە نموونە 3

7 **ئەندامبوون** لەم خشتەیەی خوارەوە زیادبوونی ژمارەی ئەندامانی یانەیەکی کۆمەڵایەتی مانگانە دەردەکەوێت. نموونەیەکی لۆگاریتمی بدۆزەوە پێدراوەکانی خشتەکە بنوێنێت، نموونەکە بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی ژمارەی مانگە پێویستەکان بۆ ئەو یانەیە بۆ ئەوەی ژمارەی ئەندامەکانی بگاتە 8000

بوون بە ئەندام لەیانەکە					
کات بەمانگ	6	18	42	90	150
ژمارەی ئەندامەکان	3000	4000	5000	6000	7000

ڕاهێنان وشیكاركردنی پرسیارەكان

ڕاهێنانی ئازاد	
بۆ شیكاری ڕاهێنانەكان	سەیری نموونە بكە
11–8	1
12	2
13	4

دیاریبکە ئایا f نەخشەیەکی توانییە لە جۆری $f(x) = ab^x$ ، ئەگەر وایە، ڕێژە نەگۆڕەکەی دیاریبکە.

8

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	1.25	1	0.75	0.5	0.25

9

x	−5	−3	1	3	5
$f(x)$	20	6	2	12	30

10

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	0.667	1	1.5	2.25	3.375

11

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	−16	−8	−4	−2	−1

12 **زانستە کۆمەڵایەتییەکان** خشتەی بەرامبەرت زیادبوونی ژمارەی شۆفێرەکان لە یەکێك لە وڵاتەکان لە ساڵی 1980 تا ساڵی 2000 دەردەخات، نموونەیەکی توانی بۆ نواندنی پێدراوەکانی خشتەکە بدۆزەوە. نموونەکە بەکاربهێنە بۆ دیاریکردنی ئەو کاتەی ژمارەی بەشداربووان لەو ووڵاتە لە 120 ملیۆن تێدەپەڕێت.

زیادبوونی ژمارەی شوفێرەکان			
ساڵەکانی دوای 1970	10	20	30
ژمارە (بەملیۆن)	14.6	22.5	35.3

13 **گەیاندن** خشتەکەی خوارەوە زیادبوونی ژمارەی بەشداربوون لە ئینتەرنێت لە یەکێك لە ووڵاتەکان لە ساڵی 1990 تا ساڵی 2000 دەردەخات، نموونەیەکی توانی بۆ نواندنی پێدراوەکانی خشتەکە بدۆزەوە. نموونەکە بەکاربهێنە بۆ دیارکردنی ئەو کاتەی ژمارەی شوفێرەکان لە 100 ملیۆن تێدەپەڕێت.

ژمارەی بەشداربووانی ئینتەرنێت											
ساڵەکانی دوای 1990	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ژمارە بە (ملیۆن):	4.4	5.5	6.6	7.3	9.1	8.5	8.7	11.1	15.7	19.6	23.6

14 **ژینگە** زانیاریەکان لە بارەی باڵندەی (غەرنوق) کە هەڕەشەی لە ناو چونیان لێ دەکرێت ژمارەکەی دەستی بەزیادبوون کرد. خشتەکەی خوارەوە زیادبوونی ئەو ژمارەیەمان لە ماوەی 55 ساڵ دەردەخات نموونەیەکی لۆگاریتمی بدۆزەوە، زیادبوونی ژمارەی ئەو باڵندانە بنوێنێت. کەی ژمارەیان دەگاتە 500 باڵندە؟

ژمارەی باڵندەکانی غەرنوق					
ژمارە	18	40	85	120	185
ساڵەکان دوای 1940	5	22	40	47	57

دیاریبکە ئایا پێدراوەکانی خشتەکە توانین. ئەگەر وایە لێژبوونەوەی توانی بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی نموونەیەك ئەمە بنوێنێت

15

x	1	2	3	4
$f(x)$	11	95	683	4799

16

x	−1	0	2	3
$f(x)$	4	2	0.5	0.25

17 **بیری ڕەخنەگر** پێدراوکان لە بارەی جۆرە باڵندەیەك لە ئەفریقیا ئەوە دەگەیەنێت کە ژمارەیان کەمدەکات لە ساڵی 1930 یەوە بەلایەنی زۆرەوە زیاتر نیو ملیۆن کەمدەکات، بەڵام ئەمڕۆ ئەو کەمبوونە لە 15 000 کەمترە، پێدراوی تری پێویست چییە، بۆ ئەوەی بڕیاربدەیت، کە ئەم لێژبوونەوەیە توانییە؟

18 **ژینگە** لێکۆڵینەوەیەك وا دەگەیەنێت کە ئەستووری بەفر لە بەهاردا لە یەکێك لە ناوچە ساردەکان کاردەکاتە سەر تێکڕایی مانەوەی گۆلك لە ژیاندا، ئەگەر ئەستووری بەفرەکە 5000 mm بێت تێکڕاکە دەبێتە نزیکەی 0.9%، و ئەگەر ئەستووری بەفرەکە 6700 mm بێت تێکڕاکەی دەبێتە 0.3% کەچی ئەستووری بەفرەکە 8250 mm دەبێتە 0.17% بێت تێکڕاکە ، نەخشەیەکی توانی بدۆزەوە بۆ نواندنی ئەو پێدراوانە. نموونەکە بەکاربهێنە بۆ خەملاندنی ڕێژەی مانەوەی گۆلك لە ژیاندا کاتێك ئەستووری بەفرەکە 4000 mm بێت.

19 **تەکنەلۆژیا** خشتەی بەرامبەر، زیادبوونی فرۆشتنی ئامێرەکانی هێدفۆن لە پشووی هاویندا دەردەخات. وایدابنێ فرۆشتنی ئەو ئامێرانە بە ڕێکی زیاددەکات. نەخشەیەکی توانی بۆ نواندنی پێدراوەکانی خشتەکە بنووسە، نەخشەکە بۆ خەملاندنی فرۆشتنەکان بەکاربهێنە، بۆ سێ ساڵی داهاتوو.

20 **دەستەواژەیەك بنووسە** خشتەی بەهای نەخشەیەکی بەهایەکانی 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8 بۆ گۆڕاوی سەربەخۆی جیاوازییە یەکەمەکان و دووەمەکان و سێیەمەکان بدۆزەوە. دەستەواژەیەك بنووسە لە بارەی جیاوازییەکان لە n ڕادەدا وایدابنێ کە بواری نەخشەکە بریتییە لە ژمارە سروشتییەکان.

21 **بنووسە** چۆن دەزانیت کە کۆمەڵەی پێدراوەکان توانییە و هێڵی یان دووجایی یان سێجای نییە.

22 پێدراوەکانی ئەم خشتەی خوارەوە بەکاربهێنە.

x	0	2	3	4	5	6
y	18	32	43	57	76	101

أ کامیان پێدراوەکانی خشتەکە بە شێوەیەکی باشتر دەنوێنێت نەخشەیەکی توانی یان نەخشەیەکی لۆگاریتمی؟ ئەمە ڕوونبکەوە

ب ئەگەر ڕیزی دووەم لە خشتەی پێشوو $\log y$ لە خۆبگرێت لە جیاتی y، کام نەخشە لە پێدراوەکانی خشتەی نوێ بە شێوەیەکی باشتر دەنوێنێت. نەخشەی توانی یان نەخشەی هێڵی؟ ئەمە ڕوونبکەوە



23 کام لەم بارانەی خوارەوە دەتوانرێت بە نەخشەیەکی توانی بنوێنرێت؟

أ تێچوونێك بەهایەکەی 100 000 دینار مانگانە بەرز دەبێتەوە.

ب ڕووبەری چوار گۆشەیەك درێژی لایەکی دە ، دە ، زیاد دەکات.

ج دوای هەر خولێك نیوەتیرەی برغویەك بە زیاد بوونی پانییەکەی بە ڕێژەی 10% زیاددەکات.

د ژمارەی دانیشتوان بە چەند جارەبوونەوەی کات، چەند جار دەبێتەوە.

24 کام لەم کۆمەڵە ژمارانەی خوارەوە توانین؟

أ $(0,0.1)$، $(1,0.5)$، $(2,2.5)$، $(3,12.5)$

ب $(0,-1)$، $(1,0)$، $(2,7)$، $(3,20)$

ج $(0,-1)$، $(1,0.5)$، $(2,2)$، $(3,3.5)$

د $(0,-1)$، $(1,2)$، $(2,11)$، $(3,26)$

25 **کورتە وەڵام** ژمارەی نەزانراو لە خشتەکەدا بدۆزەوە ئەگەر بزانیت پێدراوەکانی توانین.

x	0	1	2	3
y	2	3.5	■	10.71875

بەرەنگاری و فراوانکردن

26 نەخشەیەکی توانی ڕوونکردنەوەی بە دوو خاڵی $(2,48)$ و $(4,300)$دا دەروات بدۆزەوە. هەنگاوەکانت ڕوونبکەوە

27 **ژینگە** سەناریا لەیەکێك لە تاقیگەکانی کیمیا کاردەکات، هەڵمێکی ژەهراوی هەڵمژی لە ئەنجامی، تێکچوونی ئامێرێك. لە شیکردنەوەی خوێنەکەیدا پاش 4 کاتژمێر لە ڕووداوەکە دەرکەوت، ماددەی تۆکسین Toxine ی ژەهراوی بە ڕێژەی $0.01006mg/cm^3$ لە خوێنەکەیدا هەیە، لە شیکردنەوەیەکی تر دوای 2 کاتژمێر دوای شیکردنەوەی یەکەم دەرکەوت ڕێژەی تۆکسین بوو بە $0.00881mg/cm^3$ وایدابنێ هێندی تۆکسین لە خوێنەکەیدا بە شێوەی توانی بە پێ کات دەگۆڕێت.

أ نەخشەیەکی توانی بدۆزەوە،پێدراوەکان بنوێنێت.

ب تۆکسین هەڕەشە لە تەندروستی مرۆڤ دەکات ئەگەر ڕێژەکەی $0.015mg/cm^3$ لە خوێن زیاد بکات. ئایا ئەو هێندە تۆکسینەی کە سەناریا هەڵیمژی هەڕەشە لە تەندروستی دەکات؟

ج سەناریە دەتوانیت دەست بە کاری ڕۆژانەی خۆی بکاتەوە، کاتێك تێکرایی تۆکسین لە خوێنەکەی $0.00010mg/cm^3$ کەمتر بێت. ژمارەی کاتژمێری پیویست (بەنزیکردنەوە بۆ نزیکترین کاتژمێر) هەژماربکە بۆ ئەوەی بچێتەوە سەرکاری ڕۆژانەی خۆی.

پێداچوونەوەی لولپێچی

شیکاربکە *(وانەی پیشوو)*

28 $|-5x| = 45$ **29** $|x+4| = 0$ **30** $|2x-4| = 3$ **31** $2|2x|+1 = 10$

سفرەکانی هەر نەخشەیەك بەبەکارهێنانی شیتەڵکردن بدۆزەوە *(وانەی پیشوو)*

32 $f(x) = x^2 + 2x - 3$ **33** $f(x) = 3x^2 + 24x$

34 $f(x) = 2x^2 + 10x + 12$ **35** $f(x) = x^2 + 9x - 36$

شیکار بکە و ساغیبکەوە *(وانەی 6-4)*

36 $\frac{1}{64} = 4^{x+5}$ **37** $81^x = 3^{x+4}$ **38** $8^{\frac{x}{3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$ **39** $216^x = 6^{2x}$

بەشی 4

ڕێبەری خوێندن: پێداچوونەوە

1 جۆرە ڤیتامینێك لە خوێندا بە ڕێژەی 15% لە کاتژمێرێکدا کەمدەکات.

أ ئایا ئەم نەخشەیەی ئەم بارەدەنوێنێت نەخشە-یەکی ڕوو لەزیاد بوونە یان ڕوولە کەمبوون؟

ب ئەگەر بڕی ئەم جۆرە ڤیتامینە $400\ mg$ بێت. نەخشەیەك بنووسە بڕی ماوەی ڤیتامینەکە پاش T کاتژمێر بنوێنێت.

ج وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە و بەکاربهێنە بۆ خەملاندنی بڕی مانەوەی ڤیتامینەکە پاش 7 کاتژمێر

هەر نەخشەیەك لەمانە نەخشەی گەشەیە یان نەخشەی پووکانەوەیە دیاریبکە.

2 $f(x)=0.5(1.25)^x$

3 $f(x)=0.5\left(\frac{3}{2}\right)^x$

4 $f(x)=2.5(0.25)^x$

5 $f(x)=2(1+0.25)^x$

ئەم پێدراوانە بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکان لە 6 بۆ 9

ژمارەی خوێندکاران لە یەکێك لە قوتابخانەکاندا بە ڕێژەی 2% ساڵانە زیاد دەکات، لەپێنج ساڵی کۆتایدا. ژمارەی خوێندکارەکان ئەم ساڵ گەیشتە 765 قوتابی.

6 ئایا ئەو نەخشەی ئەو بارە دەنوێنێت نەخشەی گەشەیە یان نەخشەی پووکانەوەیە.

7 وێنەی ڕوونکردنەوەیی ئەم نەخشەبکێشە.

8 وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بەکاربهێنە، بۆ خەملاندنی ژمارەی خوێندکارەکان پاش 5 ساڵ.

9 کەی ژماری خوێندکارانی قوتابخانەکە لە 1000 خوێندکار تێپەڕ دەکات؟

10 ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=\frac{4}{5}-3x$ بکێشە. پێچەوانەی نەخشەکەی بنووسە وێنەی ڕوونکردنەوەیی بکێشە.

11 ئەو پەیوەندییەی بە خشتەکە نوێنراوە بە شێوەی ڕوونکردنەوە بکێشە.

x	−1	0	1	2	3
y	1	0.2	0.04	0.008	0.001

پاشان وێنەی ڕوونکردنەوەیی پێچەوانەی نەخشەکە بکێشە، و ئەو خشتەیە بنووسە کە دەینوێنێت.

ئەم پێدراوانە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی 12 و 13 بەکاربهێنە.

کەمبوونەوەی ژمارەی دانیشتوانی شارێك بە ڕێژەی 3% لە چاو ژمارەی ساڵی ڕابردوو.

12 بڕێك بنووسە ژمارەی دانیشتوانی شارەکە ئەم ساڵ P_T بەپێی ژمارەیان بۆ ساڵی ڕابردوو P_L بنوێنێت.

13 بڕێك بنووسە ژمارەی دانیشتوانی شارەکە بۆ ساڵی ڕابردوو P_L بەپێی ژمارەیان بۆ ئەم ساڵ P_T بنوێنێت.

14 نەخشەی $M=\frac{5}{8}K$ ڕێگە بە گۆڕینی ماوەکان لە کیلۆمەتر بۆ میل بە شێوەی نزیکراوەیی دەدات. پێچەوانەی نەخشەکە بنووسە و بەکاربهێنە، بۆ گۆڕینی 25 میل بۆ کیلۆمەتر.

15 ئەم یەکسان بوونە $19^{1.5}=27$ بە شێوەی لۆگاریتمی بنووسە.

16 بەهای بڕەی $\log_4 64$ چەندە؟

17 وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=0.6^x$ بکێشە. و وێنە ڕوونکردنەوەی هەڵگەڕاوەی نەخشەکە بکێشە، و مەوداکەی دیاریبکە.

ئەمانە لە شێوەی توانیەوە بۆ شێوە لۆگاریتمی بگۆڕە.

18 $3^5=243$ **19** $1=9^0$ **20** $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}=27$

ئەمانە لە شێوەی لۆگاریتمی بۆ شێوە توانییەوە بگۆڕە.

21 $\log_2 16=4$ **22** $\log 10=1$

23 $2=\log_{0.6} 0.36$

بەهای ئەم بڕانە بە هزری هەژماربکە.

24 $\log_7 49$ **25** $\log_{0.5} 0.25$

26 $\log_{12}\left(\frac{1}{12}\right)$ **27** $\log 0.01$ **28** $\log_2 1$

29 خشتەیەك بۆ بەهاکانی نەخشەی $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ دروستبکە، و ێنەی ڕوونکردنەوەی پێچەوانەی نەخشەکە بکێشە، بەبەکارهێنانی خشتەی بەهایەکان، بوار و مەودای پێچەوانەی نەخشەکە دیاریبکە.

ئەم بڕە لۆگاریتمییانە بە سادەترین شێوە بنووسە

30 $\log 25 + \log 40$

31 $\log_5 25 - \log_5 25$

32 $\log_2 8 + \log_2 16$

33 $\log 100 + \log 1000$

34 $\log_2 128 - \log_2 2$

35 $\log 10 - \log 0.1$

36 $\log 10^5 + \log 10^4$

بەهای بڕەکان بدۆزەوە.

37 $\log_3 8^2$

38 $\log_5 25^2$

39 $\log_5 16$

40 ئەمڕۆ ئاستی توندی دەنگ میوزیك لە یانەی لاوان بە 10 دیسیبل Decibel لەوەی دوێنێ بەرزتربوو نەخشەی $L = 10\log\frac{I}{I_0}$ بەکاردەهێنرێت بۆ پێوانی ئاستی توندی دەنگی مۆزیك L، کاتێك I هێمای توندی دەنگ بە $\mathrm{W/m^2}$ دەپێورێت. هێمای I_0 بۆ توندی بەرگوێ کەوتن. توندی دەنگی مۆزیك دوێنێ چەند ئەوەندەی توندی دەنگی مۆزیك ئەمڕۆیە؟

شیکاری ئەم هاوکێشە.یە بکە

41 $5^x = 50$

42 $\log_9 x^2 = 5$

43 $3^{x-1} = \frac{1}{9}$

شیکاری ئەم لاسەنگەیە بکە.

44 $\left(\frac{1}{2}\right)^x \le 64$

45 $\log x^{\frac{5}{2}} > 2.5$

46 پەیوەندی $A = P(1+r)^n$ بۆدیاریکردنی بەهای دانراوی حسابی بانکی بە کاردێت، کە تێیدا گوژمەی بنەڕەتی P بە سوودی ساڵانە و تێکڕای r پاش n ساڵ لە سپاردنی گوژمەکە. هەکار 250 000 دیناری لە بانکی دانا، کەی نرخی حسابە کە دەبێتە 500 000 دینار ئەگەر بزانیت ڕێژەی سوودی ساڵانە بریتییە لە 4%؟

47 ئەم بڕە بەسادەترین شێوە بنوسە. $e^{\ln(2x+1)}$

48 سەیران 5 ملیۆن دینار لە حسابێك بە تێکڕای سوودی ساڵانە 6% سپارد، بۆ ئەوەی پاشکەوت کردنەکە بەردەوام بێت. حسابەکەی پاش 5 ساڵ دەبێتە چەند؟

49 جۆرێك لە باڵندە ساڵی 1940 ژمارەیان 22 باڵندە بوو. بەردەوام بەزیاد بوونی توانی هەتا ساڵی 2003 گەیشتە 194 باڵندە.

أ نەخشەی گەشەی توانی بەکاربهێنە $P(t) = P_0 e^{kt}$ هێمای ژمارەی بنەڕەتی و $P(t)$ ژمارەکانییەتی P_0 لە کاتی t دا بۆ دیاریکردنی تێکڕای زیادبوون k.

ب بەچەند ژمارەی ئەم باڵندانە دەخەملێنیت ئەگەر زیادبوونەکەی بەهەمان شێوە بەردەوام بێت؟

50 ئەم خشتەیەی خوارەوە زیادبوونی ژمارەی جۆرێك لە دارەکانی بەهارات دەنوێنێت بۆ ماوەی 6 ساڵ لە کێڵگەیەکی نموونەییدا. بژمێری ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنە، بۆ دۆزینەوەی نەخشەیەکی لۆگاریتمی کە پێدراوەکانی خشتەکە بنوێنێت. ئەو ساڵەی ژمارەی دارەکان دەبێتە 70 دار بخەملێنە.

ساڵ	1	2	3	4	5	6
ژمارە	14	30	40	46	53	55

ئەم خشتەی خوارەوە زیادبوونی ژمارەی باڵندەکان لە پۆلێك باڵندە لە جۆری دەگمەن دەنوێنێت. کە لە شوێنێکی دیاریکراودا دەژی لە ماوەی 55 ساڵانی کۆتایی.

ساڵەکان لە دەستکردن بەتۆمارکردنی ژمارەکان	ژمارەی باڵندەکان
5	18
22	22
40	85
57	185

51 لە بژمێری ڕوونکردنەوەیی **ExpReg** بەکاربهێنە، بۆ دۆزینەوەی نموونەیەکی توانی بۆ پێدراوەکانی خشتەکە.

52 لە بژمێری ڕوونکردنەوەیی **LnReg** بەکاربهێنە، بۆ دۆزینەوەی نموونەیەکی لۆگاریتمی بۆ پێدراوەکانی خشتەکە.

53 بەراوردبکە لەنێوان دوو بەهای r^2 کە بۆ دوو نەخشەکە دەگەڕێتەوە. کام لەم دوو نەخشانە باشترین نموونەیە لە نواندنی پێدراوەکانی خشتەکەدا؟ بۆچی؟

بەشی 4



دیاریبکە، نەخشەکە گەشەی توانییەیان نەخشەی پووکانەوەی توانییە، پاشا وێنەی ڕوونکردنەوەیی بکێشە

1. $f(x)=0.4^x$
2. $f(x)=1.3\left(\frac{2}{5}\right)^x$
3. $f(x)=\frac{7}{8}(1.1)^x$
4. $f(x)=50(1+0.04)^x$
5. تارا ئۆتۆمبێلێکی بە 500 000 13 دینار کڕی. وادابنێ نرخی ئۆتۆمبیلەکە ساڵانە بە ڕێژەی 15% دادەبەزێت. نەخشەی توانی بنووسە کە ببێتە نموونەیەك بۆ دیاریکردنی نرخی ئۆتۆمبیلەکە بە پێی کات (ساڵ)، وێنەی ڕوونکردنەوەیی ئەم نەخشە بکێشە، کەی نرخی ئۆتۆمبێلەکە لە 000 000 3 دینار کەمتر دەبێت؟

وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بکێشە، پاشان پێچەوانەی نەخشەکەی بنووسە، ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بکێشە.

6. $f(x)=x-1.06$
7. $f(x)=\frac{5}{6}x-1.06$
8. $f(x)=1.06-\frac{5}{6}x$
9. $f(x)=\frac{1}{4}\left(1.06+\frac{5}{6}x\right)$

ئەمانە بە شێوەیەکی تر بنووسە (توانی یان لۆگاریتم)

10. $16^{\frac{1}{4}}=2$
11. $16^{-0.5}=\frac{1}{4}$
12. $\log_{\frac{1}{4}}64=-3$
13. $\log_{81}\frac{1}{3}=-\frac{1}{4}$

بەهای پێدراوی x بەکاربهێنە بۆ کێشانی وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە، پاشان پێچەوانەی نەخشەکە بنووسە، و وێنەی ڕوونکردنەوەیی بکێشە بوار و مەودای پێچەوانەکەی نەخشەکەی دیاریبکە.

14. $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x;\ x=-1,0,2,4$
15. $f(x)=2.5^x;\ x=-1,0,1,2,3$
16. $f(x)=5^{-x};\ x=-1,0,1,2,3$

بە سادەترین شێوە بنووسە

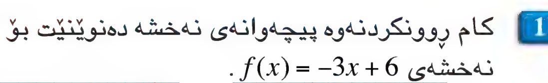
17. $\log_4 128-\log_4 8$
18. $\log_2 12.8+\log_2 5$
19. $\log_3 243^2$
20. $5^{\log_5 x}$

شیکاربکە

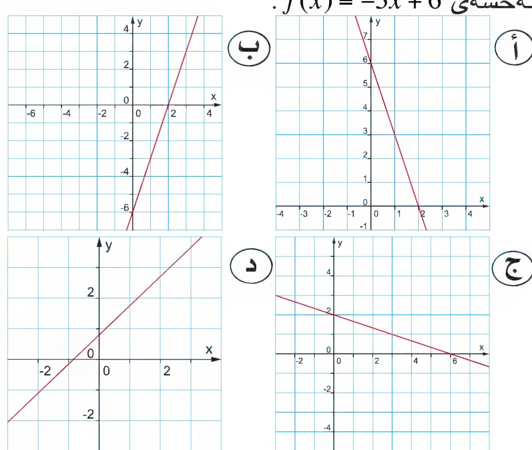
21. $3^{x-1}=729^{\frac{x}{2}}$
22. $5^{1.5-x}\le 25$
23. $\log_4(x+48)=3$
24. $\log(6x^2)-\log 2x=1$
25. دەتوانیت نەخشەی $y=D(0.95)^x$ بەکاربهێنێت وەك نموونەیەك بۆ هەژمارکردنی ئەوەی دەمێنێتەوە لەو ڤیتامینە شلەی لە لەشی مرۆڤ دوای خواردنەوەی. D هێمای بڕی ڤیتامینی شلی خوراوەیە.
y هێمای بڕی ڤیتامینی ماوەیە بە ملیلتر پاش x خولەك یەکێك 15m ڤیتامینی شلی خواردوە. چەند کاتی دەوێت بۆ ئەوەی ڤیتامینەکەی لەشی لە 5ml کەمتربێت.
26. نیوەی تەمەنی پلۆتۆنیۆم دەگاتە 239 و 24 000 ساڵ پەیوەندی $\frac{1}{2}=e^{-kt}$، t نیوەی تەمەنی مادەکەیە، k نەگۆڕی پووکانەوەیە، لە 100g پلۆتۆنیۆم پاش 5 ساڵ چەند دەمێنێتەوە؟
27. لێژبوونەوەی لۆگاریتمی بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی نەخشەیەك بۆ لیکۆڵینەوەی ژمارەی تیمساحەکان، لە کۆمەڵە کە دا لەپێدراوەکانی خشتەی بەرامبەر. کاتێك y هێمای گۆڕاوی ژمارەی تیمساحەکانە، x هێمای گۆڕاوی کاتە بە ساڵ.

ژمارە	50	62	78
ساڵ	1	2	3

بەشی 4



1 کام ڕوونکردنەوە پێچەوانەی نەخشە دەنوێنێت بۆ نەخشەی $f(x) = -3x + 6$.



2 کام لەمانەی خوارەوە سادەترین شێوەیە بۆ بڕەی $\log_5 12 - \log_5 4$ ؟

أ) $\log_5 48$ ب) $\log_5 8$ ج) $\log_5 16$ د) $\log_5 3$

3 بەهای x چەندە لە هاوکێشەی $\log_4 (x-1)^3 = 9$ ؟

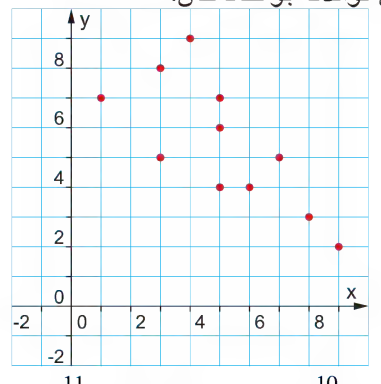
أ) 27 ب) 64 ج) 65 د) 81

4 کام لەمانە نەخشەی پەیدابووە لە ڕاکێشانی نەخشەی بنەڕەتی $f(x) = \ln x$ دووییەکە بۆلای ڕاست و 7 یەکە بۆ خوارەوە پاشان فراونبوونی ئاسۆیی هاوکۆلکەی 6 بێت؟

أ) $g(x) = 6\ln x$ ج) $g(x) = 6\ln\left(x+2\right)+7$

ب) $g(x) = \ln\left(\frac{x}{6}-2\right)-7$ د) $g(x) = 6\ln\left(\frac{x}{6}+2\right)+7$

5 کام لەمانەی خوارەوە هاوکێشەی ڕاستەهێڵی باشترین نواندنە بۆ خاڵەکان.



أ) $y = -\frac{10}{11}x + 10$ ج) $y = -\frac{11}{10}x + 1$

ب) $y = \frac{10}{11}x + 10$ د) $y = \frac{11}{10}x + 1$

6 کام لەمانەی خوارەوە هاوکۆلکەی $P(x) = 8x^3 + 16x^2 + x + 2$

أ) $4x - 1$ ب) $2x + 3$ ج) $x + 2$ د) $3x - 3$

7 کام نەخشە لە مانەی خوارەوە سفرەکانی 1- و 0 ؟

أ) $f(x) = x^2 + x - 1$ ج) $f(x) = x^2 + x$

ب) $f(x) = x^2 - x$ د) $f(x) = -x^2 + x$

8 هاوکۆلکەی پەیوەستی بۆ دووکۆمەڵە پێدراو بریتییە لە -0.24 لە کاتێکدا ڕاستەهێڵی باشترین نواندن تەوەرەی دووەم لە $y = 10$ دەبڕێت. کام لەمانەی خوارەوە مەرج نیە ڕاست بێت؟

أ) تا بەهایەکانی کۆمەڵەیەك زیاد بکات بەهایەکانی کۆمەڵەکەی تر کەم دەکات.

ب) لە ڕاستەهێڵی باشترین نواندندا بەهایەکانی، y کەمدەکات بەهایەکانی x ی بەرامبەر، کە لە 10 کەمتر دەبێت.

ج) ڕاستەهێڵی باشترین نواندن نموونەیەکی باشە بۆ پێدراوەکان.

د) ئەو ڕاستەهێڵەی باشترین نواندنە، لارییەکەی سالبە.

9 کام لەم برگەهاوتایانەی خوارەوە سەرەکەی $(-2, -3)$

أ) $y = x^2 + 4x + 1$ ج) $y = x^2 - 4x + 1$

ب) $y = x^2 + 4x - 1$ د) $y = x^2 - 4x - 1$

10 کام لەمانە یەکسانە بە $3(x+y)^4$

أ) $x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

ب) $3x^4 + 12x^3y + 18x^2y^2 + 12xy^3 + 3y^4$

ج) $81x^4 + y^4$

د) $3x^4 + 3y^4$

11 لاری ڕاستەهێڵی $y = mx + b$ موجەبە و یەکتربڕینی ستوونی 5 . لاری ڕاستەهێڵەکە دەست بە کەمبوونەوە دەکات کام لەمانە هەڵەیە؟

أ) یەکتربڕینی ئاسۆیی ڕاستەهێڵە نوێیەکە کەمترە لە یەکتربڕینی ڕاستە هێڵە بنەڕەتییەکە.

ب) ڕاستەهێڵی نوێ ڕاستەهێڵی بنەڕەتی تەنها لە $(0, 5)$ دا دەبڕێت.

ج) لاری ڕاستەهێڵی نوێ گەورەترە لە 0 .

د) ڕاستەهێلی نوێ تەریبە بە ڕاستەهێڵی بنەڕەتی.

ڕیزکراوەی $N = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی دوو ڕاهێنانی 12 ، 13

12 دانەی n_{21} چەندە؟

(أ) 2 (ب) -3 (ج) 4 (د) -6

13 کام لەمانە هەلگەراوەی ڕێزکراوی N

(أ) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ \frac{3}{2} & -2 \end{bmatrix}$

کورتە وەڵام

14 دانەی وونبوو چەندە؟

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \square & 2 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 & 10 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

15 بەهای $\log_{6.25} 2.5$ چەندە؟

16 یاسای هاوکێشەی دووجا بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی ڕەگی موجەب بۆ نەخشەی $f(x) = x^2 + 2.6x - 7.31$

17 دووبارە بۆوەی ڕەگی 2 لەم هاوکێشەیەدا چەندە؟ $x^3 - 8x^2 + 20x - 16 = 0$

18 جێگۆرکێی نەخشەی بنەڕەتی $f(x) = x^2$ بۆ نەخشەی $g(x) = \frac{1}{2}(5x)^2 - 4$ کرا هاوکۆلکەی چوونەوەیەکەی چەندە؟

19 کام هێز لە هێزەکانی 2 یەکسانە بە؟ 268435456

کورتە وەڵام

20 یەکێك لە خوێندگاکان بژمێری چاپەکۆنەکانی خستە مەزاد بۆ فرۆشتن ودابینکردنی بە گوژمەی لە 000 200 5 دینار کەمتر نەبێت خوێندنگا کە نرخی بژمێری 000 500 دینارو نرخی ئامێری چاپی بە 000 50 دینار دیاریکرد خوێندنگاکە بەهیوای 5 بژمێر بۆ هەردوو ئامێری چاپ بەلایەنی کەمەوە بفرۆشێت.

(أ) سیستمی لاسەنگەی هێڵی بنووسە پرسیارەکە بنوێنێت x ژمارەی بژمێرەکان y ژمارەی ئامێری چاپەکانە.

(ب) بە شێوەی ڕوونکردنەوەیی سستەمی ئەو لاسەنگانەی نووسیوتە بنوێنە.

21 ڕادیۆم - 226 (Radium - 226) بۆ چارەسەری پزیشکی بەکاردەهێنرێت نیوەی تەمەنی ئەم ماددە 1620 ساتە.

(أ) بەهای k بدۆزەوە کەسەر بەڕادیۆم – 226

(ب) 100 g لە ڕادیۆم –226 پاش 3240 ساڵ چەندی لێدەمێنێتەوە؟ وەڵامەکەت نزیك بکەوە بۆ نزیکترین گرام.

22 زریان 26 شەتڵی سنەوبەری هەیە. دەیەوێت لە دووری یەکساندا، بیانڕوێنێت، بە دەوری باخچەیەکی چوار گۆشە درێژی لایەکی 21 مەتر بێت، لە هەر گۆشەیەکی شەتلێك دەڕوێنێت.

(أ) زۆرترین ژمارەی لە تواناداابووی شەتڵەکان کە بتوانیت بیروێنێت چەند؟

(ب) ماوەی نێوان دوو شەتڵ چەندە؟

23 ماوە لە ئەنجامی دابەشکردنەکە بدۆزەرەوە.
$2x^5 + 6x^4 - 10x^3 - 2x^2 + 54x + 14$ بەسەر $x - 4$

دریژە وەڵام

24 ئەم خشتە ژمارەی کاتژمێرەکان دەنوێنیت کە خوێندکارەکە هەموو ئێوارەیەك بۆ بە جێهێنانی ئەرکی ماڵەوە دەیخایەنێت بۆ هەندێك لە پۆلەکان.

پۆل (x)	4	6	8	10	12
ژمارەی کاتژمێرەکان (y)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3

(أ) دیاریبکە ئەم پێدراوانە توانییە.

(ب) پێدراوەکانی خشتەکە بە شێوەی ڕوونکردنەوەیی بنوێنە.

(ج) پاسەدانی ئەوە بکە نەخشەی $f(x) = \frac{1}{16}(\sqrt{2})^x$ نموونەیەك بۆ پێدراوەکان دەنوێنێت.

(د) خوێندکاری پۆلی سێ یەم خوێندنی هەموو ئێوارەیەکی چەند دەخایەنێت؟

بەشی

5

سیفەتی نەخشەکان

Properties of Functions

بەشی پێنجەم

وانەکان

خاشاکەکانی بۆشایی

گەشتەکانی بۆشایی ئاسمان لە پاش خۆیان زیاتر لە 28 000 پارچە خاشاکیان جێهێشتووە، لە بۆشاییدا مەلەدەکەن. دەتوانیت ئەو ئاڕاستەی کە زیادبوونی ژمارەی ئەو خاشاکانەی دەیگرنە بەر شیبکەیتەوە بە بەکارهێنانی نەخشەکان و ڕوونکردنەوەکانیان

ئایا تۆ ئامادەیت؟

زاراوەكان

هەر زاراوەیەك بە پێناسەكەی لای چەپ ببەستەوە.

1 ڕاكێشان
2 لاری
3 لێژبوونەوە
4 پەیوەستی

أ لێكۆڵینەوەیەكی ئامارییە بۆ پەیوەندی نێوان دوو گۆڕاو.
ب تێكڕای نەگۆڕ بۆ گۆڕانی نەخشەی هێڵی.
ج ڕێژە لەنێوان دوو كۆمەڵە لە پێوانەكان.
د جێگۆڕكێی ئەندازەیی هەر خاڵێك لە خاڵەكانی شێوە ئەندازەییەكەیان بۆ ڕوونكردنەوەیی بەهەمان ماوە و ئاراستە دەجوڵێنیت.
هـ پێوانەی هێزی پەیوەندی هێڵی نێوان دوو گۆڕاو و ئاراستەكانیانە.

پێكەوە بەستنی دەق و جەبر

هاوكێشەیەك بنووسە هەر بارێك لەمانە بنوێنێت.

5 تێچوونی بەكرێگرتنی ستۆدیۆی تۆماركردن كاتژمێری یەكەم 30 000 دینارەو 20 000 دینار بۆ هەر كاتژمێرێكی زیادە

6 تانكییەكی ئاو 30 گاڵۆن ئاوی تێدایە، ترومپایەك 8 گالون ئاو زیاد دەكاتە سەری بۆ هەر خولەكێك.

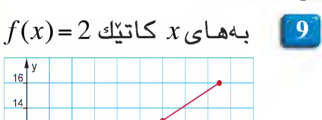
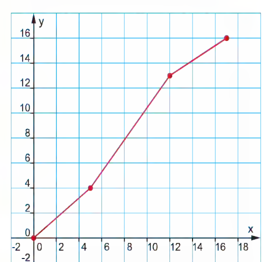
هێڵە ڕوونكردنەوەییەكان

وێنەی ڕوونكردنەوەیی بەرامبەر بەكاربهێنە بۆ دیاریكردنی بەهای داواكراو

7 $f(6)$

8 $f(15)$

9 بەهای x كاتێك $f(x)=2$

10 بەهای x كاتێك $f(x)=9$

11 لاری پارچە ڕاستەهێڵی نێوان $x=6$ و $x=14$

12 لاری پارچە ڕاستەهێڵی نێوان $x=14$ و $x=18$

لێكدانی دوو ڕادەدارەكان

لێكبدە، پاشان بە سادەترین شێوە بنووسە.

13 $(x-6)(x+4)$

14 $(6-x)(4-x)$

15 $(5x+8)(2x-7)$

16 $(x^2-7)(4x+5)$

17 $(3x^2+8)(7x^2+8)$

18 $(x-8)(x+8)$

نووسینی بڕی ڕادەدارەكان بەسادەترین شێوە

ئەمانە بە سادەترین شێوە بنووسە.

19 $8(3x^5)-(2x)^3(5x^2)$

20 $5(x+3)^2-6(x+3)$

21 $3x(4-x^3)-6x^2(x+4)$

22 $3x^3(x^2+4)^2-x(x^4-5)$

بەشی 5

ڕێبەری خوێندن: تێڕوانین لەسەر بەشەکە

لە ڕابردوودا

خوێندووتە

- نەخشە جیاوازەکان و ڕوونکردنەوەکانیان و هاوکێشەکانیان.
- جێگۆڕکێی زۆر لە نەخشەکان.
- جێبەجێکردنی کردارە جیاوازەکان لەسەر برە جیاوازەکان.
- بەکارهێنانی نەخشە هێڵییەکان و دووجاکان و توانەکان بۆ دروستکردنی نموونەی بیرکارییانە، بارەکانی ژیانی ڕۆژانە بنوێنێت.

لەم بەشەدا

لەمەودوا فێردەبیت

- نواندنە جیاوازەکانی نەخشەکە.
- جێگۆڕکێی نەخشە بنکە پەلدارەکان.
- ئەنجامدانی کردارەکان لەسەر نەخشەکان.
- دروستکردنی نموونە بیرکارییەکان بە بەکارهێنانی نەخشە جیاوازەکان.

لە داهاتوودا

دەتوانیت کارامەییەکانی ئەم بەشە بەکاربێنیت

- لە قۆناغەکانی داهاتوو کە جیاکاری و تەواوکاری و ئامار دەخوێنن.
- لە خوێندنی وانەکانی تری وەک تەندروستی و فیزیا و کیمیا و ئابووریدا.
- لە دەرەوەی خوێندنگا بۆ داڕشتنی نموونەی پێدراوەکان و جیبەجێکردنی بێشبینییەکان، لە بوارە جۆر بەجۆرەکانی وەک وەرزش و گەشت و پارەدار کردن.

زاراوەکان — Vocabulary

زاراوەکان	Vocabulary
ئاوێتەکردنی نەخشەکان	Composition of functions
نەخشەی یەك بۆ یەك	One-to-one function
نەخشەی ڕێسا پەلدار	Piecewise function
نەخشەی پلەدار	Step function

ڕۆشناییەك لەسەر زاراوەکان

بۆ ڕاهاتن لەگەڵ هەندێك زاراوەی هاتوو لەم بەشەدا، ئەم هەنگاوانە پەیڕەوبکە:

1. لە واتاکانی وشەی **ئاوێتە** کۆمەڵە شتێك پێکەوە دابنرێن، چۆن وشەی ئاوێتە بەو واتایە بەکاردێت بۆ تێگەیشتنت لە **ئاوێتەکردنی نەخشەکان** لە بیرکارییدا.

2. ئەگەر سەیری پلەکانی پەیژە بکەیت لە تەنیشتەوە، ئایا ئەوە دەبینیت وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشە دەنوێنێت؟ تا چ ڕادەیەك لە ڕوونکردنەوەی **نەخشەڕێسا پەلدار** دەچێت؟

3. پێناسەی نەخشەت لەبیربێت، بۆ چوونت لەسەر **نەخشەی یەك بۆ یەك** چییە؟ نموونەیەك لە بیرکارییدا بهێنەوە و نموونەیەکی ژیانی ڕۆژانە بۆ نەخشەی یەك بۆ یەك و نموونەیەکی تر بۆ نەخشەیەك یەك بۆ یەك نەبێت.

4. پلەکانی پەیژە تەریبن و بەیەکەوە نەبەستراون، چی تێدەگەی لە دەستەواژەی نەخشەی پلەدار.





ستراتیژی خوێندنەوە: پرسیارەکان بخوێنەوە بۆئەوەی تێبگەیت

پرسیارەکە چەندجارێك بخوێنەوە، بۆئەوەی لە بیرۆکەی پرسیارەکە تێبگەیت پاشان پرسیارەکە بە شێنەیی و بە وردی بخوێنەوە بۆ دیاریکردنی داواکراو. لەکاتی خوێندنەوەدا هێڵ بەژێر زانیارییەکان بکێشە – کلیلەکانی دەقی پرسیارەکە هەنگاوی جۆراوجۆر بێت، بیکە بەچەند بەشێك، پاشان پلان بۆ شیکارکردنەکەی دابڕێژە.

دۆزینەوەی بۆشایی نەخشەی $f(x)=\frac{7}{2}\sqrt{x}$ ڕێسایەکە بۆ خەملاندنی ئاسۆ بەکیلۆمەتر کاتێك چاوی بینەر لە بەرزی x مەتر لە ڕووی زەوی بێت. دەتوانیت وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشیت بۆ بەرامبەرەکەت لەسەر مەریخ بەکێشانیکی ئاسۆیی هاوکۆلکەکەی $\frac{9}{5}$ بێت. نەخشەی دووری ئاسۆ لە مەریخ بنووسە و بەکاربهێنە بۆ هەژمارکردنی دووری ئاسۆ لە کەشتییەوانی بۆشایی سەر مەریخ، لەڕووی هەسارەکەوە 6 مەتر چاوی بەرز دەکاتەوە.

هەنگاو	پرسیار	وەڵام
1	بیرۆکەی پرسیارەکە چییە؟	جێگۆڕکێی نەخشەی ڕەگی دووجا بە گۆڕینی هاوکۆلکەکانی.
2	پرسیارەکە داوای چ وەڵامێك دەکات؟	• نووسینەوەی نەخشەکە بۆ تێخستنی هاوکۆلکەکەی نوێ. • هەژمارکردنی بەهای نەخشە نوێیەکە کاتێك x بەهایەکی دیاریکراوە وەردەگرێت.
3	ئەم زانیارییانە – کلیلی پێویست بۆ شیکارکردنی پرسیارەکە چین؟	• نەخشەی $f(x)=\frac{7}{2}\sqrt{x}$ دووری لەسەر زەوی دەنوێنێت. • نەخشەی سەر مەریخ بریتییەلە کشانی نەخشەی زەوی بەهاوکۆلکەی $\frac{9}{5}$. • کەشتییەوانی بۆشایی لەسەر ڕووی مەریخ 6 مەتر چاوی بەرزدەکاتەوە.
4	پلانم چییە بۆ شیکارکردنی ئەو پرسیارە فرە هەنگاوە؟	• نووسینی نەخشەی دووری ئاسۆیی لەسەر مەریخ. • هەژمارکردنی بەهاکەی کاتێك $x = 6$

هەوڵبدە

بۆ هەر پرسیارێك خشتەیەك بۆ هەنگاوەکانت دروستبکە (هەروەك لەسەرەوە دیارە)

1. درێژی لاکێشە $x + 5$، پانی $x + 4$ مەتر بێت خشتەیەکی ڕێژەیی بنووسە، ڕێژەی ڕووبەری لاکێشەکە بۆ چێوەکەی بنوێنێت. بوار و مەودای گونجاو بۆئەم خشتەیە دیاریبکە.

2. نەخشەی $d = \frac{\sqrt{15w}}{2.54\pi}$ نموونەیەکە بۆ هەژمارکردنی تیرەی گوریس (بەسانتیمەتر) کە پێویستە بۆ بەرزکردنەوەی w تەن. گوریسێك تیرەکەی 3.5 cm بێت بارستایی چەن تەن زیاتر دەتوانێت بەرزبکاتەوە لە گوریسێکی تر تیرەکەی 5.1 cm بێت؟

1-5 نەخشە ڕێسا پەلدارەکان

Piecewise Functions

ئامانجەکان

• نەخشەی ڕێسا پەلدار دەنوسێت و وێنە ڕوونکردنەوەییەکەی دەکێشێت.

• نەخشە ڕێسا پەلدارکان بۆ باسکردنی باری ژیانی ڕۆژانە بەکاردەهێنێت.

زاراوەکان Vocabulary

نەخشەی ڕێسا پەلدار Piecewise function

نەخشەی پلەدار Step function

بۆچی ئەمە فێردەبین؟

دەتوانیت نەخشەی بنکە پەلدار بەکاربهێنیت بۆ نواندنی توانای پێشبڕکێکار لە پێشبڕکێی سیانی (نموونە 4) .

نەخشەی ڕێسا پەلدار Piecewise Function بریتییە لە کۆبوونەوەی نەخشەیەك یان زیاتر کە **لقەکانی** ، ڕێسای ئەو نەخشە لە بەشێکەوە بۆ بەشێکی تر بوارەکەی دەگۆڕێت بۆ نموونە. نرخی بلیتی چوونەژورەوەی مۆزەخانەی نیشتمانی بە جیاوازی تەمەنەکان دەگۆڕێت، بە جۆرێك کە بۆهەر چەشنە تەمەنێك نرخێك دیاریدەکرێت بەم شێوەیە. بەهای ئەم نەخشەیە نرخی بلیتی چوونە مۆزەخانە کە بەپێی تەمەن دەنوێنێت، نەگۆڕە لەمەودای هەر بەشێکدا کە بوارەکەی چەشنە تەمەنێك دەنوێنێت، بەهایەکان بە پێی جیاوازی بەشەکان جیاوازدەبن. (نرخی بلیتەکان بە پێی تەمەنەکان جیاوزا دەبن).

نموونە 1 جیبەجیکردن لە بواری خۆشیدا

خشتەیەك بۆ نواندنی وێنەی ڕوونکردنەوەیی بەرامبەرت دروستبکە. پاشان بە وشە باسیبکە.

بلیتی چوونە ژوورەوە

هەنگاوی 1 خشتەیەك دروستبکە.

لەبەرئەوەی سەری پارچە ڕاستەهێڵەکانی ناو وێنە ڕونکردنەوەییەکە بوارەکە دەکەن بە سێ بەشەوە. خاڵی سەرەکان و ئەو خاڵانەی لێوەی نزیکە بۆ دیاریکردنی ئەو بەشانە بەکاربهێنە.

نرخی بلیتی چوونەژوورەوە	
تەمەن	نرخ
لە 5 بۆ 12	5000
لە 13 بۆ 54	9000
لە 54 گەورەتر	6500

بواری نەخشەکە بۆ سێ بەش دابەش دەکرێت

تەمەنەکانی لە 12 کەمتر ←$[5, 13)$

تەمەنەکانی لە 13 کەمتر نەبێ و لە 55 کەمتر بێت ←$[13, 55)$

تەمەنەکانی کەمتر نەبێت لە 55 ←$[55, \infty)$

هەنگاوی 2 باسکردنی بە وشە بنووسە.

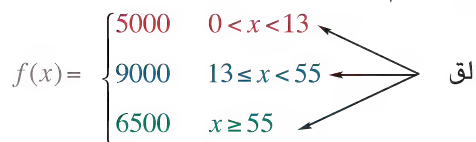
بەشەکانی بوار و نرخەکان بەپێی خشتەکە بەکاربهێنە.

تەمەنی کورێك لە 12 ساڵ بەرەو خوار بۆ نرخی بلیتەکەی 5000 دینار دەدات بەڵام ئەوەی لە 13 ساڵ کەمتر نەبێت و لە 54 ساڵ زیاتر نەبێت بۆ بلیتەکەی 9000 دینار دەدات. ئەوەی لە 55 ساڵ کەمتر نەبێت 6500 دینار دەدات.

نرخی بلیتی چوونەژوورەوە

خاڵی چاودێری **1.** خشتەیەك دروستبکە وێنە ڕوونکردنەوەیی بەرامبەر بنوێنێت، پاشان باسکردنی بە وشە بنووسە.

دەتوانیت نەخشەی ڕێسا پەلدار بە نووسینی نەخشەیی دەربېڕێت وەك نەخشەی نموونە 1، بەم شێوەیە دەنووسرێت.

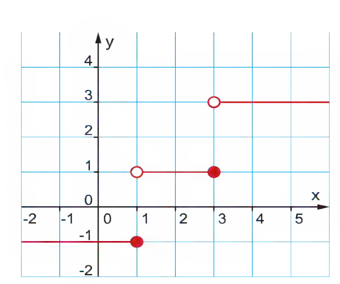


$$f(x)=\begin{cases}5000 & 0<x<13\\ 9000 & 13\le x<55\\ 6500 & x\ge 55\end{cases}$$

لق

بەم شێوەیە دەخوێنرێتەوە، $f(x)$ یەکسانە بە 5000 کاتێك x گەورەتر لە 0 و بچوكتر لە 13 بێت، 9000 کاتێك x کەمتر نەبێت لە 13 و کەمتر لە 55 بێت، 6500 کاتێك x کەمتر نەبێت لە 55 .

بۆ دیاریکردنی بەهای نەخشەیەکی ڕێسا پەلدار بۆئەو بەهایەی دەیدرێتێ، لقەکەی دیاریبکە، پاشان ڕێسای نەخشەی ئەو بەشە بەکاربهێنە.



جۆرێك لە نەخشەی بنکە پەلدار سیفەتێکی گرنگیان هەیە لە بەهایەکەی نەگۆڕە لەهەر بەشێك لە بەشەکانیدا. بەم نەخشانە دەوترێت **نەخشەی پلەدار** **Step Function** .

نموونە لەسەر نەخشەی پەلدار:

$$f(x)=\begin{cases}-1 & x\le 1\\ 1 & 1<x\le 3\\ 3 & x>3\end{cases}$$

بۆ تێگەیشتنت لەهۆکاری ناونانی نەخشەکە بە پلەدار، بە وردی سەرنجی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بدە.

نموونە 2

هەژمارکردنی بەهاکانی نەخشەی ڕێسا پەلدار

بۆهەر نەخشەیەکی ڕێسا پەلدار بەهای بەرامبەر $x=-2$ و $x=5$ بدۆزەوە.

أ

$$f(x)=\begin{cases}-5 & x\le 0\\ 4 & 0<x\le 3\\ 12 & x>3\end{cases}$$

$f(-2)=-5$ لەبەرئەوەی $-2<0$ ، ئەو لقەی بەرامبەر $x\le 0$ بەکاربهێنە

$f(5)=12$ لەبەرئەوەی $3<5$ ، ئەو ئەلقەی بەرامبەر $x>3$ بەکاربهێنە

ب

$$f(x)=\begin{cases}3x+4 & x<5\\ x^2-3 & x\ge 5\end{cases}$$

$f(-2)=3(-2)+4=-2$ لەبەرئەوەی $-2<5$، ئەو ئەلقەی بەرامبەر $x<5$ بەکاربهێنە

$f(5)=5^2-3=22$ لەبەرئەوەی $5\le 5$ ، ئەو ئەلقەی بەرامبەر $x\ge 5$ بەکاربهێنە



2. بۆ هەر نەخشەیەکی ڕێسا پەلدار بەهای بەرامبەر $x=-1$ و $x=3$ بدۆزەوە.

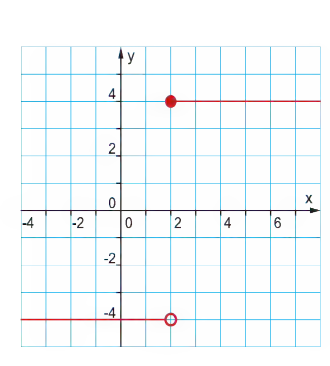
أ $$f(x)=\begin{cases}12 & x<-3\\ 15 & -3\le x<6\\ 20 & x\ge 6\end{cases}$$

ب $$f(x)=\begin{cases}3x^2+1 & x<0\\ 5x-2 & x\ge 0\end{cases}$$

نموونـــــه 3 وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەیی بنکە پەلدار

وێنەی ڕوونکردنەوەیی هەر نەخشەیەك بكێشە.

أ
$$f(x)=\begin{cases}-4 & x<2\\ 4 & x\geq 2\end{cases}$$

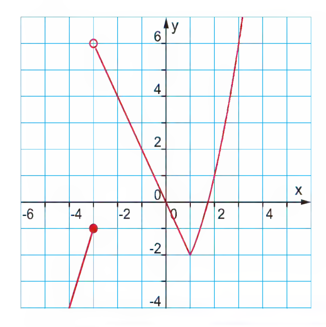


ڕوونكردنەوەی نەخشەكە لەدوو بەش پێكدێت و هەریەكەیان نیو ڕاستەهێڵە لەبەرئەوەی $x=2$ بواری نەخشەكە دەكات بەدوو بەشەوە، بەهای نەخشەكە لەو بەهایەدا هەژماریكە. بە بەكارهێنانی دوو لقی بنكەكەی. لەبەرئەوەی $f(x)=-4$ كاتێك $x<2$ وێنەی خاڵی $(2, -4)$ لە شێوەی بازنەیەكی بچوك كراوەی بكێشە، پاشان بە دەستپێكردن لەم خاڵەوە وێنەی نیو ڕاستەهێڵەكە بە ئاسۆیی بۆلای چەپ بكێشە. لەبەرئەوەی $f(x)=4$ كاتێك $x\geq 2$ وێنەی خاڵی $(2, 4)$ لە شێوەی بازنەیەكی بچوكی پڕكراوە بكێشە، و بەدەستپێكردن لەم خاڵەوە نیو ڕاستەهێڵەكە بە ئاسۆیی بۆلای ڕاست بكێشە.

ب
$$g(x)=\begin{cases}3x+8 & x\leq -3\\ -2x & -3<x<1\\ x^2-3 & x\geq 1\end{cases}$$

x	$3x+8$	$-2x$	x^2-3
-4	-4		
-3	-1	6	
-2		4	
-1		2	
0		0	
1		-2	-2
2			1
3			6

نەخشەكە لەدووبەشی هێڵی و بەشێكی دووجا پێكدێت. بواری نەخشەكە لە $x=-3$ و $x=1$ بەش دەبێت. خشتەی بەهایەكان بۆ وێنە كێشانی ڕوونكردنەوەیی هەرلقێك بەكاربهێنە.



بازنەیەكی پڕ لە $(-3, -1)$ و بازنەیەكی بەتاڵ لە $(-3, 6)$ دیارییكە بە شێوەیەك لەسەر ڕوونكردنەوەكە بەهای نەخشەكە لە $x=-3$ بەڕوونی دیاربێت.
پێویست بە دانانی خاڵ لەسەر $(1, -2)$ ناكات.
چونكە ڕوونكرنەوەی دوو لقەكە لەم خاڵەدا بەیەك دەگەن.



3. وێنەی ڕوونكردنەوەیی نەخشەكە بكێشە.

أ
$$f(x)=\begin{cases}4 & x\leq -1\\ -2 & x>-1\end{cases}$$

ب
$$f(x)=\begin{cases}-3x & x<2\\ x+3 & x\geq 2\end{cases}$$

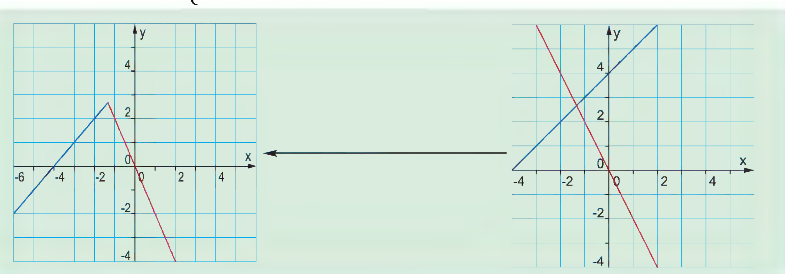
سەرنجبدە نەخشەی ڕێسا پەلدار مەرج نییە نەخشەیەكی بەردەوام بێت، واتە ڕوونكردنەوەكەی خاڵی لێكدابڕاوی تێدایە. بۆ نووسینی ڕێسای نەخشەی ڕێسا پەلدار یەكەمجار دیارییكە لە كوێدا بواری نەخشەكە بەش دەبێت، پاشان ڕێسای هەر بەشێك بنووسە پاش ئەوە ڕێساكان لە نووسینی نەخشەیدا كۆبكەوە.



لە خوێندکارەوە بۆ خوێندکار وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشە ڕێسا پەلدارەکان

کاتێك وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی ڕێسا پەلدار دەکێشم، وێنەی ڕوونکردنەوەیی هەر لقێك دەکێشم، هەروەکو نەخشەیەکی سەربەخۆ،پاشان ئەم بەشە ڕوونکردنەوەییە کە بەهایەکانی x ی دەکەوێتە دەرەوەی بەشەکە دەسڕمەوە.

نموونە $f(x)=\begin{cases}x+4 & x<-2\\ -2x & x\geq -2\end{cases}$



نموونە 4 جیبەجیکردن لەسەر وەرزش

ئالان بەشداری لە پێشبڕکێی سیانی بەدرێژی 153 km کرد، لەیەك کاتژمێر دا 3 km مەلەی کرد و 120 km بەسواری پاسکیل لە ماوەی 4 کاتژمێردا بڕی. پاشان 30 km بۆماوەی 3 کاتژمێر ڕایکرد. وێنەیەکی ڕوونکردنەوەیی بکێشە بۆئەو دوورییەی ئالان بەپێی کات بڕیویەتی. پاشان نەخشەیەکی ڕێسا پەلدار بۆئەو ڕوونکردنەوە بنووسە.

هەنگاوی 1 خشتەیەك دروستبکە پێدراوەکان کورتبکاتەوە. یاسای پەیوەندی نێوان خێرایی و کات و دووری براو بەکاربهێنە، بۆ دیاریکردنی تێکڕای خێرایی ئالان لەهەر قۆناغێکی پێشبڕکێکەدا.

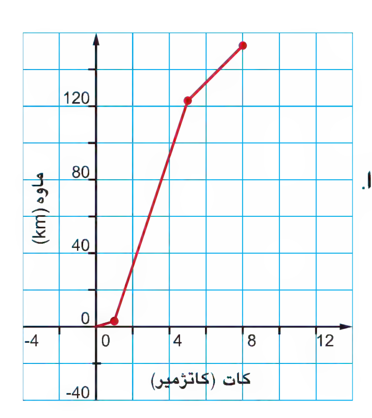
نواندنی ئالان لە پێشبڕکێی سیانی			
قۆناغ	کات	دووری	خێرایی
مەلەوانی	1	3	3
پاسکیل سواری	4	120	30
ڕاکردن	3	30	10

هەنگاوی 2 لەبەرئەوەی کات گۆڕاوێکی ئازادە، دیارییکە لە کوێدا بواری نەخشەکە بەش دەبێت بە بەکارهێنانی پێدراوەکانی کات.

مەلەوانی $0\leq t\leq 1$ یەك کاتژمێر مەلەی کردووە

پاسکیل سواری $1<t\leq 5$ 4 کاتژمێر ڕایکردووە

ڕاکردن $5<t\leq 8$ 3 کاتژمێر ڕایکردووە



هەنگاوی 3 وێنەیەکی ڕوونکردنەوەیی دروستبکە.

پاش کاتژمێرێك. ئالان $3\ km$ بڕی . هەتاکو ئەوەی بڕیویەتی لە کۆتایی قۆناغی دووەم (پاش 5 کاتژمێر) $123\ km$ بڕی لە کۆتاییدا $153\ km$ تەواوکرد لە 8 کاتژمێردا.

ئاگاداربە!

دەتوانرێت پەیوەندی $d=vt$ بنووسرێت، بەشێوەی $v=\frac{d}{t}$ بۆ دۆزینەوەی تێکڕای خێرایی

هەنگاوی 4 نەخشەی هێڵی بۆهەر لقێك بنووسە.

شێوەی لاری – خاڵ بەکاربهێنە

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

مەلەوانی $d=3t$ $m=3$ و خاڵی $(0, 0)$ بەکاربهێنە

بە پاسکیل $d=30t-27$ $m=30$ و خاڵی $(5, 123)$ بەکاربهێنە

ڕاکردن $d=10t+73$ $m=10$ و خاڵی $(8, 153)$ بەکاربهێنە

نووسینی نەخشەیی بۆئەم نەخشە بریتییە لە:

$$d(t)=\begin{cases}3t & 0\le t\le 1\\ 30t-27 & 1<t\le 5\\ 10t+73 & 5<t\le 8\end{cases}$$



4. ڕێباز لە یەکێك لە چێشتخانەکانی پایتەخت ئیش دەکات، بۆهەر کاتژمێرێکی ئیش 8000 دینار وەردەگرێت، کاتێك کاتژمێرەکانی ئیشکردنی هەفتەیەکی لە 40 کاتژمێر تێپەڕنەکات. و 12 000 دینار وەردەگرێت بۆهەر کاتژمێرێکی ئیشکردن زیاد لە 40 کاتژمێر تێپەڕنەکات. وێنەیەکی ڕوونکردنەوەیی بکێشە، دەستکەوتنی ڕێباز بەپێی ژمارەی کاتژمێرەکانی ئیشکردن لە هەفتەیەکدا بنوێنێت، ئەگەر بزانیت ناتوانیت زیاتر لە 60 کاتژمێر لە هەفتەیەکدا ئیش بکات. نەخشەیەکی ڕێسا پەلدار بۆئەو ڕوونکردنەوە بنووسە.

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. ڕونبکەوە ئەگەر لە تواناداببێت نەخشەی پلەدار بەدەستبهێنرێت بەهایەکەی نەگۆڕبێت. لەهەر لقێك و ڕوونکردنەوەکەی نەپچڕاوبێت.

2. ڕێکخەربە ئەم خشتەیەی خوارەوە دروستبکە و تەواویبکە. بۆهەر چوارچێوەیەك باسی بوار و مەودای هەموو نەخشەکە بنووسە و نموونەی بۆ بهێنەوە.

نەخشە	بوار	مەودا	نموونە
ڕێسا پەلدار			
پلەدار			

1-5 ڕاهێنانەکان

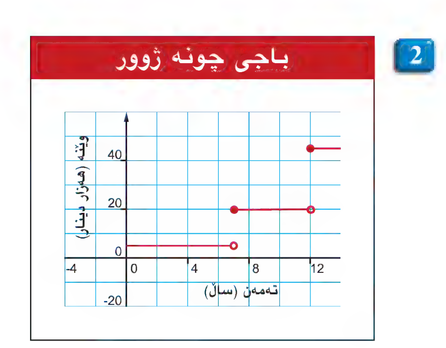
ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 پەیوەندی نێوان نەخشەی پلەدار و نەخشەی ڕێسا پەلدار ڕوونبکەوە.

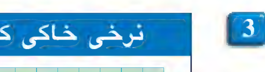
پڕوانە نموونە 1

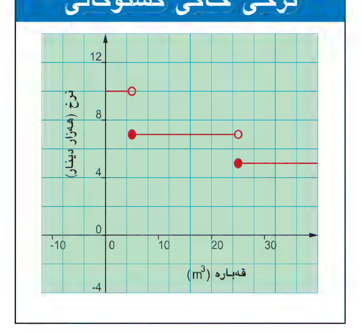
خشتەیەك بۆهەر وێنەیەکی ڕوونکردنەوە بکێشە و بە وشە باسیبکە.

2



3





پڕوانە نموونە 2

بەهای نەخشەکە هەژماربکە کاتێك $x=-6$ و $x=3$

4

$$f(x)=\begin{cases}-8 & x\le -5\\ 0 & -5<x<6\\ 5 & x\ge 5\end{cases}$$

5

$$g(x)=\begin{cases}5x-9 & x<2\\ 4-x^2 & x\ge 2\end{cases}$$

پڕوانە نموونە 3

وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە.

6

$$f(x)=\begin{cases}7 & x<-2\\ -2 & x\ge -2\end{cases}$$

7

$$g(x)=\begin{cases}-2x+8 & x\le 4\\ \frac{1}{2}x & x>4\end{cases}$$

پڕوانە نموونە 4

8 تێچوونی بەکرێ گرتنی کەشتییەکی بچوك 20 000 دینارە لە کاتژمێرێکدا بۆ 4 کاتژمێری یەکەم، و 3 000 دینارە بۆهەر کاتژمێرێکی زیادە، وێنەی ڕوونکردنەوەیی بکێشە، تێچوونی بەکرێگرتنی کەشتییەکە بۆ ژمارەی کاتژمێرەکان بنوێنێت، کە لە 8 کاتژمێر زیاتر نەبێت.

ڕاهێنان وشکیارکردنی پرسیارەکان

ڕاهێنانی ئازاد

بۆشیکارکردنی پرسیارەکان	تەماشای نموونە
10-9	1
12-11	2
14-13	3
15	4

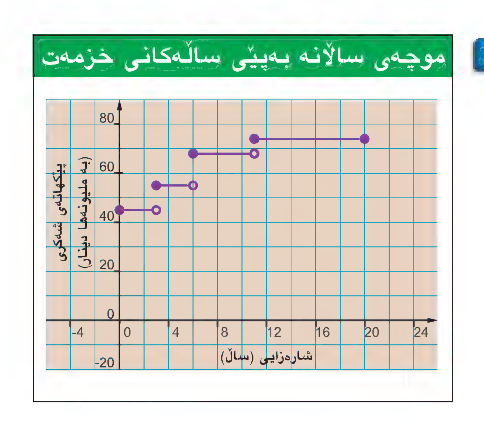
خشتەیەك دروستبکە بۆهەر وێنەیەکی ڕوونکردنەوە، پاشان بە وشە باسیبکە.

9 نرخەکانی بۆفیەی کراوە

نرخ (بە هەزارەها دینار)

تەمەن (ساڵ)

10



بەهای نەخشەکە هەژماربکە کاتێك $x=-2$ و $x=2$ و $x=6$.

11 $f(x)=\begin{cases} 9x-2 & x<-3 \\ x^2-3 & -3\le x<1 \\ 5 & x\ge 1 \end{cases}$

12 $f(x)=\begin{cases} 12-9x & x\le 0 \\ x^2+3x & 0<x<3 \\ 4^x & x\ge 3 \end{cases}$

وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە.

13 $f(x)=\begin{cases} \frac{3}{4}x+1 & x<4 \\ \frac{3}{4}x-2 & x\ge 4 \end{cases}$

14 $g(x)=\begin{cases} -2x-5 & x<-2 \\ x^2-3 & x\ge -2 \end{cases}$

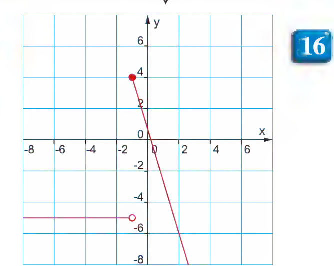
15 تێچوونی برینەوەی خوری مەڕ دەگۆڕێت، بە گۆڕانی بارستاکەی. ئەم خشتەی بەرامبەر نرخەکانی برینەوەی مەڕێکەکە، هۆشیار وەریدەگرێت. وێنەی ڕوونکردنەوەیی بکێشە، تێچوونی برینەوەی مەڕ بنوێنێت، بارستایی لە60 kg زیاتر نەبێت. نەخشەیەکی بنکە پەلدار بنووسە ئەمە دەرببڕێت.



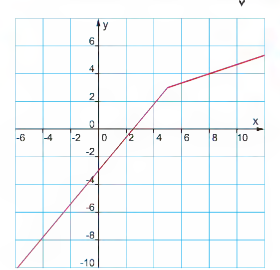
نرخی مەڕ برینەوە	
بارستایی(kg)	نرخ (دینار)
15 یان کەمتر	30 000
نێوان 15 و 50	50 000
50 یان زیاتر	75 000

بۆهەر وێنەیەکی ڕوونکردنەوە نەخشەیەکی ڕێسا پەلدار بنووسە.

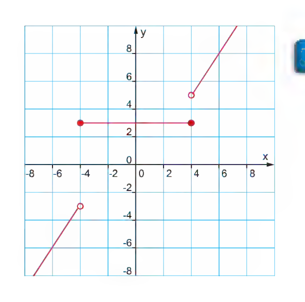
16



17



18



19 **گەراج** گەراجی ئۆتۆمبیل لە پایتەخت بۆهەر کاتژمێرێکی وەستان 6000 دینار وەردەگرێت، لەماوەی چوار کاتژمێری یەکەمدا، بۆهەر کاتژمێرێکی زیادە 3000 دینار وەردەگرێت. نەخشەی ڕێسا پەلدار بنووسە بۆ هەژمارکردنی تێچوونی وەستانی ئۆتۆمبیل بەپێی ژمارەی کاتژمێرەکان.

20 **گەشت** هەڵۆ و توانا بە ئۆتۆمبیل لە سلێمانییەوە بۆ دهۆك ڕۆیشتن. ئەم وێنەی بەرامبەر ناوەندەی خێرایی ئۆتۆمبیلەکە بەپێی قۆناغەکان دەنوێنێت، بۆ ماوەی 30 خولەك لەناو شاردا بە ناوەندە خێرایی 45 km / h دەڕۆیشت پاشان ماوەی 3 کاتژمێر لە ڕێگای خێرا بە ناوەندەی خێرایی 90 km / h دەڕۆیشت، و 30 خولەك بە ناوەندە خێرایی 60 km / h دەڕۆیشت لە شاخ.



أ نەخشەیەکی ڕێسا پەلدار بنووسە ئەو دووریەی ئۆتۆمبیلەکە بڕیویەتی بەپێی کات بنوێنێت.

ب وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە.

ج **چی دەبێت ئەگەر ... ؟** ماوەی گەشتەکە چەند دەخایەنێت ئەگەر ناوەندە خێرایی ئۆتۆمبیلەکە لە قۆناغی دووەم 75 km / h لە جیاتی 90 km / h بێت.

نەخشەی ڕووت بەشێوەی نەخشەی ڕێسا پەلدار بنووسە.

21 $f(x)=|x|$ **22** $g(x)=|x-4|$ **23** $h(x)=2|x|-4$

24 **خزمەتگوزاری** دەزگای هیوا بۆ نێراوە پۆستییەکان بۆ گەیاندنی هەر کیلۆگرامێك 11 000 دینار وەردەگرێت، بۆ ئەو نێراوانەی کێشیان لە2kg تێپەڕ نەکات، و بۆ ئەو نێراوانەی کێشیان لە2kg زیاترە 3000 دینار بۆهەر کیلۆگرامێك بۆنرخەکەی زیاددەکرێت،و وێنەیەکی ڕوونکردنەوەیی بکێشە بۆ تێچوونی گەیاندنی نامەیەك کێشەکەی لە2kg زیاتر نەبێت. نەخشەیەکی ڕێسا پەلدار بنووسە ئەمە دەرببڕێت.

وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە.

25
$$h(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2 & x\le 0\\ 2^x-4 & 0<x\le 3\\ 2x-2 & x>3\end{cases}$$

26
$$g(x)=\begin{cases}-3 & x\le 0\\ 3^x-4 & x>0\end{cases}$$

بوار و مەودای هەر نەخشەیەك بدۆزەوە.

27
$$g(x)=\begin{cases}-\frac{5}{2}x-2 & x\le -2\\ -x-5 & x>-2\end{cases}$$

28
$$h(x)=\begin{cases}x^2-2x-3 & x<4\\ 3x-7 & x\ge 4\end{cases}$$

29 **بیركردنەوەی ڕەخنەگرانە** بۆچی نواندنی نەخشەی ڕێسا پەلدار باشترین نواندنە بۆ بەرزی سەرخەری كارەبایی لە زەوی پاش t چركە لە بەرزبوونەوەی؟ ئایا دەتوانرێت بكرێت بە نەخشەی پلەدار؟

30 **بنووسە** هۆی چییە وا دەكات بەكارهێنانی نەخشەی ڕێسا پەلدار باشترین نواندنە بۆ بارەكانی ژیانی ڕۆژانە؟ دوو نموونە بەلایەنی كەمەوە لەناو وەڵامەكەت بهێنەوە.



31 یەكێك لە بریكارەكانی بەكرێدانی ئۆتۆمبیل لە ڕۆژێكدا 15 000 دینار وەردەگرێت، ئەگەر ژمارەی ئەو كیلۆمەترانەی ئۆتۆمبیلەكە دەیبڕێت لە 200 km تێپەڕنەكات. ئەگەر ئۆتۆمبیلەكە لە 200 km زیاتری بڕی لەسەر كرێگرتە پێویستە 50 دینار بۆهەر كیلۆمەترێكی زیاد بدات، كام لەم نەخشانەی خوارەوە تێچوونی بەكرێگرتنی ئۆتۆمبیلەكە بەپێی ژمارەی كیلۆمەترە بڕاوەكان لە ڕۆژێكدا دەنوێنێت؟

أ) $f(x)=\begin{cases}15\ 000 & 0\le x\le 200\\ 50x & x>200\end{cases}$

ج) $f(x)=\begin{cases}15\ 000 & 0\le x\le 200\\ 15\ 000+50(x-200) & x>200\end{cases}$

ب) $f(x)=\begin{cases}15\ 000x & 0\le x\le 200\\ 15\ 000x & x>200\end{cases}$

د) $f(x)=\begin{cases}15\ 000 & 0\le x\le 200\\ 15\ 000+50x & x>200\end{cases}$

32 كام لەم نەخشانەی خوارەوە نەخشەی بەردەوامە؟

أ) $f(x)=\begin{cases}3x-4 & x<0\\ -1 & x\ge 0\end{cases}$

ج) $h(x)=\begin{cases}x^2 & x<-2\\ 2x & x\ge -2\end{cases}$

ب) $g(x)=\begin{cases}5x-4 & x<3\\ 2x+5 & x\ge 3\end{cases}$

د) $(x)=\begin{cases}3x+4 & x\le -1\\ 3^x+4 & x>-1\end{cases}$

33 $f(-2)$ بدۆزەوە كاتێك $f(x)=\begin{cases}1-5x & x<-5\\ 3-x^3 & -5\le x<-2\\ 5-x^2 & x\ge -2\end{cases}$

أ) 5-　　ب) 1　　ج) 9　　د) 11

بەرەنگاری و فراوانكردن

نەخشەی گەورەترین تەواو بریتییە لە نەخشەی $f(x)=[x]$ كاتێك $[x]$ هێمای گەورەترین ژمارەی تەواوە لە x زیاترنەبێت. بژمێری ڕوونكردنەوەیی هێمای $\text{Int}(x)$ بۆ نواندنی ئەم نەخشە بەكاردەهێنێت. ئەگەر نرخی قووتویەك شەربەت 750 دینار بێت. ئەوا نەخشەی $f(x)=\text{Int}\left\lfloor\frac{x}{750}\right\rfloor$ ژمارەی قووتوە شەربەتەكانت دەداتێ كە دەتوانیت بە x دینار بیكڕیت.

34 نەخشەیەك بنووسە بۆ هەژمارکردنی ژمارەی قووتوی پەتاتەی سوورکراوە کە دەتوانیت بیکڕیت بە x دینار. ئەگەر بزانیت نرخی قوتویەك 650 دینارە، ئەم خشتە بەکاربهێنە بۆ دیاریکردنی ژمارەی قووتوە پەتاتە سوورکراوەکان کە دەتوانیت بە دەهەزار دینار بیکڕیت.

تێبینی: نەخشەی بچووکترین تەواو بریتییە لە $f(x) = [x]$ کاتێك $[x]$ هێمای کەمترین ژمارەی تەواوە لە x کەمتر نەبێت وەك $f(2.9) = f[2.9] = 3$

35 گەراجی ئۆتۆمبیل 4000 دینار وەردەگرێت بەرامبەر وەستانی ئۆتۆمبیلێك ماوەکەی لە یەك کاتژمێر تێپەڕنەکات. ئەگەر ماوەی وەستان لە کاتژمێرێك زیاتر بوو، گەراجە 1500 دینار وەردەگرێت بۆهەر کاتژمێرێکی زیادە، یان کەرتێك لە کاتژمێرێکی زیادە. نەخشەیەك بنووسە تێچوونی وەستانی ئۆتۆمبیل بەپێی کات t کاتژمێر بنوێنێت. ئەم نەخشە بەکاربهێنە بۆ هەژمارکردنی تێچوونی وەستانی ئۆتۆمبیلێك بۆماوەی 5 کاتژمێر و 23 خولەك.

پێداچوونەوەی لوولپێچی



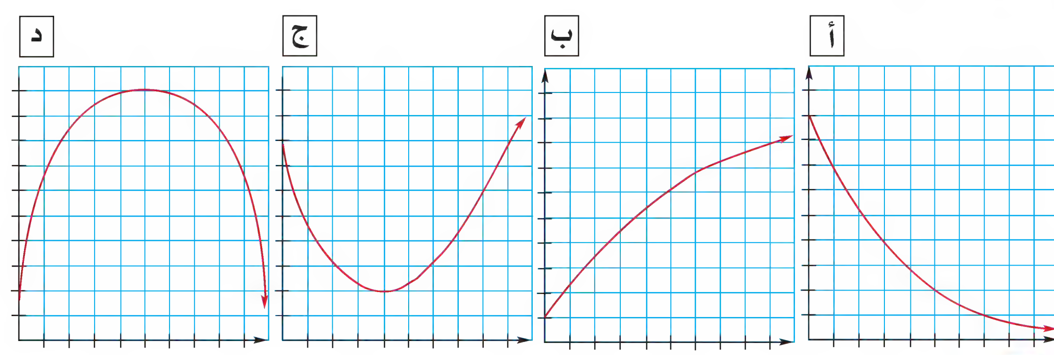
36 **ئەندازە** پەیوەندییەکی هێڵی هەیە لایەکانی چەندلا ڕێکە و کۆی پێوانەکانی گۆشەکانی ناوەوەی بەیەکەوە دەبەستێت، وەك لەم خشتەی خوارەوە دەردەکەوێت. نەخشەیەك بۆ دەربڕینی ئەم پەیوەندییە بنووسە. (وانەی 1 – 2)

ژمارەی لایەکان	3	4	5	6	8
سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوە بەپلە	180	360	540	720	1080

دەرکەنارەکانی هەر نەخشەیەك و بوار و مەودای دیاریبکە (پۆلەکانی پێشوو)

37 $f(x)=\frac{4}{x-1}-3$ **38** $f(x)=\frac{3}{x+2}+1$ **39** $f(x)=\frac{5}{x-3}+1$

هەریەکە لەم وێنە ڕوونکردنەوەییانە، بارێك لەپرسیارەکانی خوارەوە (40 – 43) دەنوێنێت دیاربکە. (وانەی 5 – 1)



40 کۆمپانیایەك یەکێك لە بەرهەمەکانی لەبازاڕ خستەڕوو، بەبێ ئەوەی پروپاگەندەی بۆ بکات، قازانجی دابەزی! پاشان پروپاگەندەی بۆکرد قازانجی بەرزبووە.

41 دابەزینی نرخی بژمێر بەپێی کات.

42 دابەزینی قازانجی دوکانی ئایس کرێم لە زستان، بەڵام بەهار و پایز بەرزدەبێتەوە لەهاویندا زۆر بەرز دەبێتەوە.

43 پلەی گەرمی بەرزدەبێتەوە. لەنێوان کاتژمێر12:00 پاش نیوەڕۆ تا 5:00پاش نیوەڕۆ.



دۆزینەوەی جیاوازییەکان و ڕێژەکان

بیرت بێت، هەردەم جێگیربوونی جیاوازییەکان یان ڕێژەکان یارمەتیت دەدەن بۆ دیاریکردنی جۆری ئەو نەخشەیەی بەکاریدەهێنیت بۆ نواندنی کۆمەڵە پێدراوەکان. دەتوانیت بەرنامەی EXCEL ی بژمێر بۆ هەژمارکردنی جیاوازییەکان و ڕێژەکان بەخێرایی بەکاربهێنیت.

پێدراوەکانی خشتەی بەرامبەر بەکاربهێنە. بەرنامەی EXCEL بەکاربهێنە بۆ هەژمارکردنی جیاوازییەکانی یەکەم و جیاوازییەکانی دووەم و ڕێژەکان، نەگۆڕەکە دیاریبکە ئەگەر هەبوو.

x	5	6	7	8	9	10	11
y	1	3.4	6.6	10.6	15.4	21	27.4

سەرەتا سەردێری ڕیزەکان بخەرە ناوبژمێرەکە، وەك دیارە بیرت نەچێت، جیاوازی نێوان بەهایەکانی x پێویستە یەکسان بن.

1 هەژماری جیاوازییەکان بکە یاسای C2 – B2 = لە خانەی C3 تۆماربکە بۆ هەژمارکردنی جیاوازی نێوان دوو بەهای یەکەم لە بەهایەکانی y ئەوەی لە C3 دایە لەبەرگرەوە بۆ خانەکان لە D3 هەتا H3 .

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	5	6	7	8	9	10	11
2	y	1	3.4	6.6	10.6	15.4	21	27.4
3	جیاوازییەکانی یەکەم		2.4	3.2	4	4.8	5.6	6.4
4	جیاوازییەکانی دووەم							
5	ڕێژەکان							

2 جیاوازییەکانی دووەم هەژماربکە یاسای D3 – C3 = لە خانەی D4 تۆماربکە بۆ هەژمارکردنی جیاوازییەکانی دووەم ئەوەی لە D4 دایە لەبەرگرەوە بۆ خانەکان لە E4 تا H4 .

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	5	6	7	8	9	10	11
2	y	1	3.4	6.6	10.6	15.4	21	27.4
3	جیاوازییەکانی یەکەم		2.4	3.2	4	4.8	5.6	6.4
4	جیاوازییەکانی دووەم			0.8	0.8	0.8	0.8	0.8
5	ڕێژەکان							

3 ڕێژەکان هەژماربکە یاسای C2 / B2 = لە خانەی C5 بۆ هەژمارکردنی ڕێژەی دوو بەهای یەکەمین لە بەهایەکانی y ئەوەی لە خانەی C5 لەبەربگرەوە بۆ خانەکانی D5 تا H5.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	5	6	7	8	9	10	11
2	y	1	3.4	6.6	10.6	15.4	21	27.4
3	جیاوازییەکانی یەکەم		2.4	3.2	4	4.8	5.6	6.4
4	جیاوازییەکانی دووەم			0.8	0.8	0.8	0.8	0.8
5	ڕێژەکان		3.40	1.94	1.61	1.45	1.36	1.30

لەمەی پێشوو دەردەکەوێت جیاوازییەکانی دووەم نەگۆڕە

هەوڵبدە

بۆ هەریەکە لەم کۆمەڵە پێدراوانە بەرنامەی EXCEL بەکاربهێنە بۆ هەژمارکردنی جیاوازییەکانی یەکەم و جیاوازییەکانی دووەم و ڕێژەکان. ئەگەر نەگۆڕی تێدابوو دیاریبکە.

1

x	2	4	6	8	10
y	–20	124	364	700	1132

2

x	4	7	10	13	16	19
y	1.31	2.48	3.65	4.82	5.99	7.16

3

x	3	4	5	6	7
y	8.96	35.84	143.36	573.44	2293.8

4

x	1.5	3	4.5	6	7.5
y	–9	15	57	117	195

5 بیری ڕەخنەگر کام جۆر لە نەخشەکان گونجاوترە بۆ نواندنی پێدراوەکانی ڕاهێنانی 4؟ بەڵگە بۆ وەڵامەکەت بهێنەوە.

2–5 جێگۆڕکێی نەخشەکان

Transforming Functions



نەگەر لە دانەوەی قەرزەکەت دوا بکەویت ئەوا لەبەردەم هاوکاران بڵاوی دەکەینەوە

داوای لێبوردن دەکەم لە دواکەوتنم لە دانەوەی بەشە قەرزەکانم چاوەڕوانی جێگۆڕکێم.

ئامانجەکان

- نەخشەکان جێگۆڕکێی پێدەکات.
- جێگۆڕکێی نەخشە دەناسێت.

بۆچی ئەمە فێردەبین؟

دەتوانیت جێگۆڕکێی نەخشەکان بەکاربهێنیت بۆ باسکردنی ئەو گۆڕانکارییانەی لە باجی تۆمار کردنی ناو لە زانکۆدا ڕوودەدات (نموونە 4)

لە وانەکان و پۆلەکانی پێشوودا فێربوویت چۆن نەخشە جیاوازەکان جێگۆڕکێ پێبکەیت، دەتوانیت نەخشەی ڕێسا پەلدار جێگۆڕکێ پێبکەیت بە جێگۆڕکێ کردنی هەر لقێك لە لقەکانی. ئەم خشتەی خوارەوە ڕێساکانی جێگۆڕکێی نەخشەکان کورت دەکاتەوە.



جێگۆڕکێی نەخشەی $f(x)$	
ڕاکێشانی ئاسۆیی	ڕاکێشانی ستوونی
$f(x)\to f(x-h)$ بۆلای ڕاست ڕادەکێشرێت ئەگەر $h>0$ بۆلای چەپ ڕادەکێشرێت ئەگەر $h<0$	$f(x)\to f(x)+k$ بۆلای سەرەوە ڕادەکێشرێت ئەگەر $k>0$ بۆلای خوارەوە ڕادەکێشرێت ئەگەر $k<0$
وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری دووەم y - axis	وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری یەکەم x - axis
$f(x)\to f(-x)$	$f(x)=-f(x)$
فراوانبوون یان چوونەوەیەکی ئاسۆیی	فراوانبوون یان چوونەوەیەکی ستوونی
$f(x)\to f\left(\frac{1}{b}x\right)$ فراوانبوونە ئەگەر $b>1$، چوونەوەیەکە ئەگەر $0<b<1$	$f(x)\to af(x)$ فراوانبوونە ئەگەر $a>1$، چوونەوەیەکە ئەگەر $0<a<1$

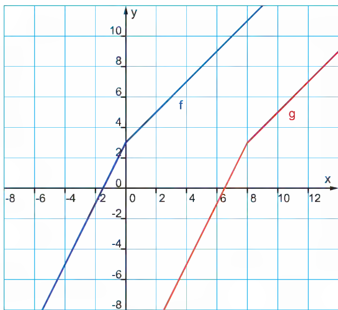
نموونە 1 جێگۆڕکێی نەخشە ڕێسا پەلدارەکان

نەخشەی $g(x)$ پەیدابوو لە جێگۆڕکێی نەخشەی $f(x)=\begin{cases}x+3 & x>0\\ 2x+3 & x\le 0\end{cases}$ بنووسە بە ڕاکێشانی 4 یەکە بۆلای ڕاست.

پێویستە هەرلقێك لە لقەکانی نەخشەکە 4 یەکە بۆلای ڕاست ڕابکێشرێت. $x-4$ لە جیاتی x لە ڕێسای نەخشەی $f(x)$ دابنێ، پاشان ڕێساکە بە سادەترین شێوە بنووسە.

$$g(x)=f(x-4)=\begin{cases}(x-4)+3 & x-4>0\\ 2(x-4)+3 & x-4\le 0\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}x-1 & x>4\\ 2x-5 & x\le 4\end{cases}$$



ساغبکەوە وێنەی ڕوونکردنەوەی هەردوو نەخشەکە لە ڕووتەختی پۆوتان بکێشە بۆ پاڵپشتی وەڵامەکەت

ئاگاداربە!

ڕاکێشانی ئاسۆیی، ڕێسایەکانی نەخشەی بنکە پەلدار ماوەکانی بوارەکەی دەگۆڕێت بەڵام ڕاکێشانی ستوونی تەنها ڕێساکانی نەخشەکە دەگۆڕێت.

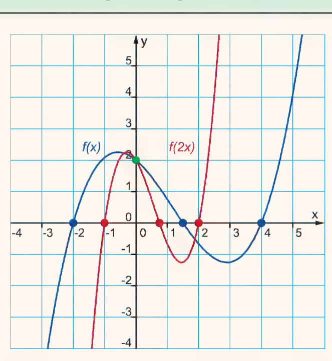
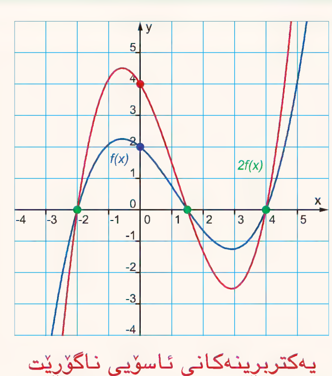
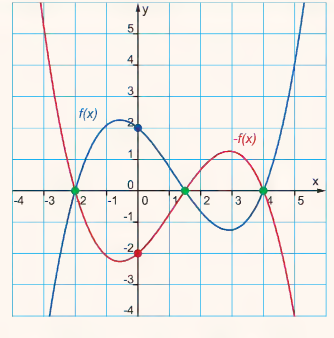
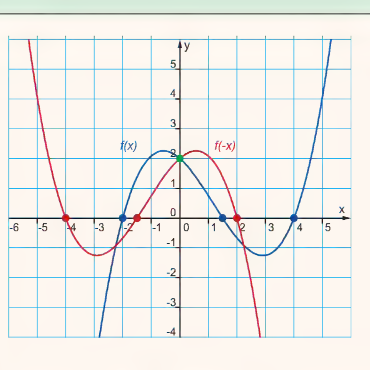


1. نەخشەی $g(x)$ ی پەیدابوو بە جێگۆڕکێی نەخشەی $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\le 0 \\ x-3 & x>0 \end{cases}$ بنووسە بە کشانی (مطّ) ئاسۆیی هاوکۆلکەی 2 بێت.

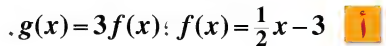
لەکاتی جێگۆڕکێی نەخشە لەوانەیە یەکتربڕینەکانی لەگەڵ تەوەرەی پۆوتانەکان بگۆڕێت و لەوانەشە نەگۆڕێت. کاتێك جێگۆڕکێیەکە پێناسە دەکرێت، دەتوانیت یەکتربڕینەکانی نەخشە – وێنە دیاریبکەیت.



کاریگەرییەکانی جێگۆڕکێی لەسەر یەکتربڕینەکانی ئاسۆیی و ستوونی نەخشەی $f(x)$

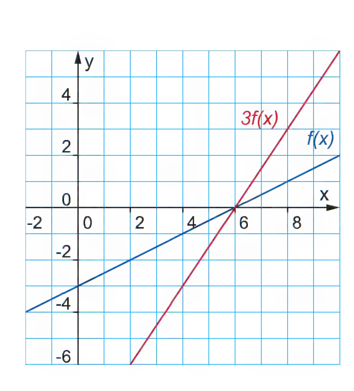
کشانی یان چوونەوەیەکی ئاسۆیی هاوکۆلکەی a بێت	کشانی یان چوونەوەیەکی ستوونی هاوکۆلکەی b بێت
 یەکتربڕینەکانی ئاسۆیی لە b دەدرێت یەکتربڕینەکانی ستوونی ناگۆڕێت	 یەکتربڕینەکانی ئاسۆیی ناگۆڕێت یەکتربڕینەکانی ستوونی لە a دەدرێت
وێنەدانەوە بە دەوری تەوەرەی یەکەم	**وێنەدانەوە بە دەوری تەوەرەی دووەم**
 یەکتربڕینەکانی ئاسویی ناگۆڕێت یەکتربڕینەکانی ستوونی دەگۆڕێت بە دژەکەی	 یەکتربڕینەکانی ئاسۆیی دەگۆڕێت بە دژەکەی یەکتربڕینەکانی ستوونی ناگۆڕێت

نموونــــە 2

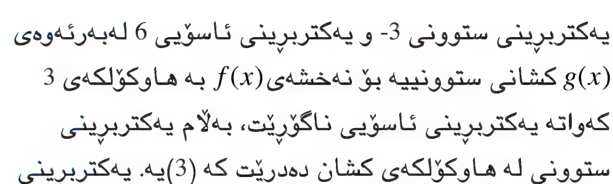


یەکتربڕینەکانی نەخشەی $f(x)$ دیاریبکە، پاشان یەکتربڕینەکانی نەخشەی $g(x)$ دیاریبکە، بەبێ وێنەکێشانی ڕوونکردنەوەیی.

أ $f(x)=\frac{1}{2}x-3$ ؛ $g(x)=3f(x)$.

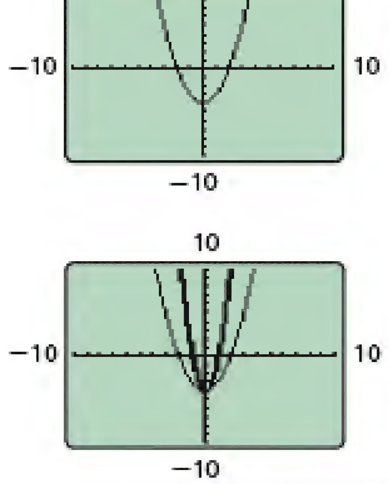


یەکتربڕینەکانی نەخشە بنەڕەتییەکە دیاریبکە.



$$0=\frac{1}{2}x-3 \qquad f(0)=\frac{1}{2}(0)-3=-3$$
$$x=6 \qquad f(0)=-3$$

یەکتربڕینی ستوونی 3- و یەکتربڕینی ئاسۆیی 6 لەبەرئەوەی $g(x)$ کشانی ستوونییە بۆ نەخشەی $f(x)$ بە هاوکۆلکەی 3 کەواتە یەکتربڕینی ئاسۆیی ناگۆڕێت، بەڵام یەکتربڕینی ستوونی لە هاوکۆلکەی کشان دەدرێت کە (3)یە. یەکتربڕینی ستوونی بۆ نەخشەی $g(x)$ بریتییەلە 9-=(3-)3



ب $f(x)=x^2-4$ ؛ $g(x)=f(2x)$.

بە بژمێری ڕوونکردنەوەیی دەردەکەوێت کە یەکتربڕینی ستوونی بۆ نەخشەکە بریتییە لە 4- و دوو یەکتربڕینی ئاسۆیی هەیە بریتین لە 2- و 2 لە نەخشەی $f(x)$ دا سەرنج بدە نەخشەی $g(x)$ بریتییە لە ئەنجامی چوونەوەیەکی ئاسۆیی نەخشەی $f(x)$ هاوکۆلکەی $\frac{1}{2}$ بێت. لەمەوە دەردەچێت یەکتربڕینی ستوونی ناگۆڕێت و هەر یەکتربڕینێکی ئاسۆیی لە $\frac{1}{2}$ دەدرێت. یەکتر بڕینەکانی ئاسۆیی بۆنەخشەی$g(x)$ بریتین لە 1- و 1.

ساغبکەوە لەسەر هەمان شاشە وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی$g(x)$ بکێشە بۆ پاڵپشتی وەڵامەکەت.



2. یەکتربڕینەکانی نەخشەی$f(x)$ دیاریبکە، پاشان یەکتربڕینەکانی نەخشەی $g(x)$بەبێ وێنەکێشانی ڕوونکردنەوەکەی دیاریبکە.

أ $f(x)=\frac{2}{3}x+4$ $g(x)=-f(x)$ **ب** $f(x)=x^2-9$ $g(x)=\frac{1}{3}f(x)$

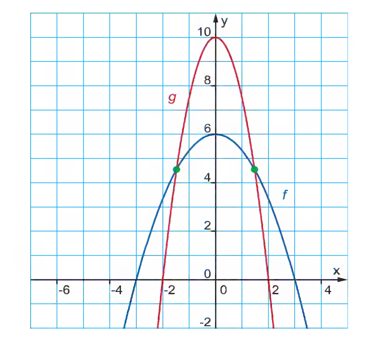
نموونـــــه 3 ئاوێتەکردنی جێگۆڕکێیەکان

وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $g(x)=f\left(\frac{\sqrt{15}}{2}x\right)+4$

کاتێك $f(x)=-\frac{2}{3}x^2+6$

هەنگاوی 1 وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $f(x)$ بکێشە ڕوونکردنەوەی $f(x)$ تەوەرەی دووەم لە$(0,6)$ و تەوەرەی یەکەم لە$(-3,0)$ و $(3,0)$ دەبڕێت

هەنگاوی 2 هەر جێگۆڕکێیەك بەجیا تاقیبکەوە. جێگۆڕکێی یەکەم بریتییە لە چوونەوەیەکی ئاسۆیی هاوکۆلکەی $\frac{2}{3}$ یە. پاش ئەم جێگۆڕکێیەکە یەکتربڕینی ستوونی ناگۆڕێت، وەك خۆی 6 دەمێنێت بەڵام یەکتربڕینەکانی ئاسۆیی دەبێتە 2- و 2 . جێگۆڕکێی دووەم بریتییە لە ڕاکێشانی 4 یەکە بۆ سەرەوە، خشتەکە بۆ ڕوونکردنەوەی ڕاکێشانی هەرسێ خاڵەکە بەکاربهێنە.



خاڵەکانی یەکتربڕین	$(-2,0)$	$(2,0)$	$(0,6)$
وێنەی ڕاکێشانەکەی	$(-2,4)$	$(2,4)$	$(0,10)$

ساغبکەوە وێنەی ڕوونکردنەوەیی دوو نەخشەی$f(x)$ و$g(x)$لە هەمان ڕووتەختی پۆوتان بکێشە.



3. وێنەی ڕونکردنەوەیی نەخشەی $g(x)=-\frac{1}{2}f(x)$کاتێك $f(x)=2^x-4$ بێت.

نموونـــــه 4 جێبەجێکردن لەسەر شیکارکردنی پرسیارەکان

سەرۆکایەتی یەکێك لە زانکۆکان نەخشەی بنکە پەلدار بەکاردەهێنێت بۆ دیاریکردنی باجی تۆمارکردنی خوێندکاران بەپێی ژمارەی کاتژمێرە وانەکان تیایدا تۆماردەکەن.

ئەم نەخشەیە بریتییە لە
$$f(x)=\begin{cases}110\ 000x & 0<x<12\\ 1\ 320\ 000 & 12\le x\le 18\\ 150\ 000(x-18)+1\ 320\ 000 & x>18\end{cases}$$

سەرۆکایەتی زانکۆ بڕیاریدا بۆ وەرزی پایز باج بە ڕێژەی **10%** زیادبکرێت، هەروەها بڕیاریدا **750 000** دینار باج بخرێتە سەر هەر کەسێك ناوی تۆمار دەکرێت. نەخشەیەك بنووسە ڕێگە بە هەژمارکردنی باجی تۆمارکردن لە وەرزی پایز بە پێی x دەدات.

1 پرسیارەکە تێبگە

نەخشەی نوێ بە جێگۆڕکێی نەخشەی سەرەکی بە دوو جێگۆڕکێ دیاریدەکرێت زیادکردنی باجی تۆمارکردنی 10% پاشان خستنەسەری باجی کارە کارگێڕییەکان بڕەکەی 75 000 دینارە. دەتوانین باجی 10% بگۆڕین بۆ لێکدانی هەر لقێك لە لقەکانی نەخشە لە 110% یان 1.1 ئەوە دەگەینێت نەخشە بخرێتە ژێر کشانی ستوونی هاوکۆلکەکەی 1.1 بێت، بەڵام زیادکردنی باجی کارگێڕییەکان، واتە گۆڕینی نەخشەکە بە ڕاکێشانی بۆ سەرەوە بە بڕی 75 000 یەکە.

2 پلان دابنێ

جێگۆڕکێی یەکەم جێبەجێبکە، پاشان جێگۆڕکێی دووەم و نەخشەی پەیدابوو بنووسە.

3 شیکاربکە

دەستبکە بە دۆزینەوەی نموونەی باجەکان پاش زیادکردنی 10% .

$$g(x)=(1.1)f(x)=\begin{cases}(1.1)110\ 000x & 0<x<12\\ (1.1)1\ 320\ 000 & 12\le x\le 18\\ (1.1)[150\ 000(x-18)+1\ 320\ 000] & x>18\end{cases}$$

هەر لقێك لە 1.1 بدە

$$=\begin{cases}121\ 000x & 0<x<12\\ 1\ 452\ 000 & 12\le x\le 18\\ 165\ 000(x-18)+1\ 452\ 000 & x>18\end{cases}$$

ئێستا نموونەی باجەکان پاش زیادکردنی باجی کارگێڕییەکان بڕەکەی 75 000 دینارە بدۆزەوە.

$$h(x)=g(x)+75\ 000=\begin{cases}121\ 000x+75\ 000 & 0<x<12\\ 1\ 452\ 000+75\ 000 & 12\le x\le 18\\ 165\ 000(x-18)+1\ 452\ 000+75\ 000 & x>18\end{cases}$$

$$=\begin{cases}121\ 000x+75\ 000 & 0<x<12\\ 1\ 527\ 000 & 12\le x\le 18\\ 165\ 000(x-18)+1\ 527\ 000 & x>18\end{cases}$$

4 ساغبکەوە

وەڵامەکەت بە بەکارهێنانی هەندێك لە بەهایەکانی ساغبکەوە. ئەگەر باجی سەرەکی بۆ 20 کاتژمێر 1 620 000 دینار بێت، بە زیادبوونی ئەو باجە 10% و خستنەسەری 75 000 دینار، ئەم باجە دەبێتە 1 857 000 دینار. بەهای نەخشە نوێیەکە بدۆزەوە کاتێك $x=20$.

$$h(20)=165\ 000(20-18)+1\ 527\ 000=330\ 000+1\ 527\ 000=1\ 857\ 000$$ ✓



4. مۆزەخانەی زانستەکان 000 5 دینار باجی چوونەژوورەوە وەردەگرێت، بۆهەر منداڵێك تەمەنی لە 12 ساڵ کەمتربێت، 7500 دینار وەردەگرێت بۆهەر کەسێك تەمەنی لە 12 ساڵ کەمتر نەبێت (12 ساڵی بەرەو سەرەوە) کارگێری مۆزەخانەکە بڕیاریدا نرخەکانی چونەژوورەوە 20% بەرزبکاتەوە، هەر بلیتێك 500 دینار بخاتە سەری. بۆ ئاسانکاری کرین بەهۆی ئامێرەوە. نەخشەیەك بنووسە. نرخی نوێی چوونەژوورەوە بەپێی تەمەنی کرپار بێت.

بیربکەوە و تاوتوێبکە

فێربە
سەرنج بدە

1. کام لەم جێگۆڕکێیانە یەکتربڕینەکانی ستوونی ناگۆڕێت؟
2. ڕوونی بکەوە بۆچی خاڵی (0 ، 0) ناگۆڕێت لەژێر کاریگەری هەرکشانێك وهەر چوونەوەیەکێك.
3. ڕیکخەربە ئەم خشتەی خوارەوە دروستبکە و پاشان تەواویبکە. باسی کاریگەری هەر جێگۆڕکێیەك لەسەر یەکتربڕینەکان بکە.

جێگۆڕکێ	یەکتربڕینی ئاسۆیی	یەکتربڕینی ستوونی
کشان یان چوونەیەکی ئاسۆیی بە هاوکۆلکەی b		
کشان یان چوونەیەکی ستوونی بە هاوکۆلکەی		
وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری x		
وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری y		

2–5 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

بڕوانە نموونە 1

ڕێسای نەخشەی $g(x)$ی پەیدابوو لە ئەنجامی جێگۆڕکێی نەخشەی $f(x)=\begin{cases} x-3 & x\le 0 \\ 4x & x>0 \end{cases}$ بنووسە.

1 ڕاکێشانی 6 یەکە بۆلای چەپ

2 چوونەوەیەکی ئاسۆیی هاوکۆلکەکەی $\frac{1}{4}$ بێت.

بڕوانە نموونە 2

یەکتربڕینەکانی نەخشەی $f(x)$ پاشان نەخشەی $g(x)$ دیاربکە بەبێ وێنەکێشانی ڕوونکردنەوەیی

3 $f(x)=4x+12$ ؛ $g(x)=\frac{1}{6}f(x)$

4 $f(x)=-x^2+16$ ؛ $g(x)=f(4x)$

بڕوانە نموونە 3

وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $f(x)$ بکێشە پاشان جێگۆڕکێ بەکاربێنە بۆ وێنەکێشانی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $g(x)$

5 $f(x)=-x^2+1$ ؛ $g(x)=f(2x)-1$

6 $f(x)=|x-1|-2$ ؛ $g(x)=-2f(x)$

بڕوانە نموونە 4

7 **باجەکان** یەکێك لە حکومەتەکان پشت دەبەستێت بە نەخشەی $T(x)=\begin{cases} 0.02x & 0<x\le 10\ 000\ 000 \\ 0.05x & x>10\ 000\ 000 \end{cases}$ بۆدیاریکردنی باجی دەرامەت بەپێی داهاتی تاك x . حکومەت بڕیاری زیادکردنی باجێکی 20% دا و باجێکی بڕاوەی 000 100 دینار سەپاند، بۆهەر کەسێك باجی لەسەرە بیدات، نەخشەیەکی نوێ بۆ دیاریکردنی نرخی باج بەپێی داهات بنووسە.

جێبەجێکردنەکان

بۆشیکارکردنی پرسیارەکان	تەماشای نموونە
10-8	1
16-11	2
18-17	3
19	4

(ڕاهێنانی ئازاد)

ڕیسای نەخشەی $g(x)$پەیدابوو لەئەنجامی جێگۆڕکێی نەخشەی $f(x)=\begin{cases} x^2 & x<1 \\ 4x & x\geq 1 \end{cases}$ بنووسە بەپێی ئەمانە:

8 چوونەوەیەکی ستوونی هاوکۆلکەی $\frac{1}{4}$

9 کشانی ئاسۆیی هاوکۆلکەی 2

10 ڕاکێشانی 3 یەکە بۆ خوارەوە

یەکتربڕینەکانی نەخشەی $f(x)$ پاشان نەخشەی $g(x)$ دیاربکە بەبێ وێنەکێشانی ڕوونکردنەوەکەی

11 $f(x)=-\frac{3}{2}x+9$ ؛ $g(x)=\frac{2}{3}f(x)$

12 $f(x)=x^2-25$ ؛ $g(x)=f\left(\frac{5}{3}x\right)$

13 $f(x)=-\frac{2}{5}x+2$ ؛ $g(x)=f(2x)$

14 $f(x)=x^2-3x-4$ ؛ $g(x)=-f\left(\frac{1}{3}x\right)$

15 $f(x)=3^x-1$ ؛ $g(x)=2f(x)-4$

16 $f(x)=x^3+8$ ؛ $g(x)=f\left(-\frac{1}{2}x\right)$

وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $f(x)$ بکێشە، پاشان جێگۆڕکێ بەکاربێنە بۆ دیارکردنی وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $g(x)$

17 $f(x)=\frac{1}{2}x+4$ ؛ $g(x)=3f(-x)$

18 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-2$ ؛ $g(x)=-f(2x)$

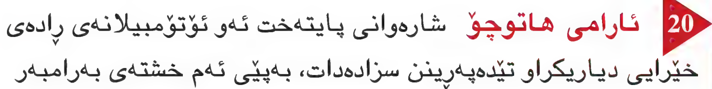
19 **کار** بۆهەژمارکردنی تێچوونی پێداویستییەکانی ئاهەنگی قوتابخانەکان، یەکێك لە کۆمپانیاکان پشت دەبەستێت بەم نەخشەیە. $c(n)=\begin{cases} 18\,000n & n\leq 50 \\ 400\,000+10\,000n & n>50 \end{cases}$ کاتێك n ژمارەی کەسان بێت.

أ بەڕێوەبەری کۆمپانیاکە بڕیاریدا لە وەرزی زستان نرخەکان 10%دابەزێنێت. نەخشەی نوێ بۆ هەژمارکردنی تێچوونەکان بنووسە.

ب بەڕێوەبەری کۆمپانیاکە بڕیارێکی تریدا، بۆهەر کەسێك بڕی 2000 دینار دابەشکێنێت، نەخشەی نوێ بۆ هەژمارکردنی تێچوونەکان بنووسە.

پۆلیس لەهەندێك لە شارەکان کامێرای وێنەگرتن دادەنێن، بۆدیاریکردنی ئەو ئۆتۆمبیلانەی سەرپێچی دەکەن و سزایان دەدات.

20 **ئارامی هاتوچۆ** شارەوانی پایتەخت ئەو ئۆتۆمبیلانەی ڕادەی خێرایی دیاریکراو تێدەپەڕینن سزادەدات، بەپێی ئەم خشتەی بەرامبەر



سزادانی تێپەڕاندنی خێرایی دیارکراو	
زیادە ڕۆیی (km / h)	سزادان (دینار)
10–1	30 000
15–11	50 000
20–16	100 000
25–21	150 000
←26	200 000

أ نەخشەیەك بۆ هەژمارکردنی نرخی سزادان بەپێی ماوەی تێپەڕاندن بنووسە

ب شارەوانی سزایەکی تر بڕەکەی 50 000 دینار دەسەپێنێت، ئەگەر هاتوو ڕادەی خێرایی لەو شوێنانەی قوتابخانەی تێدایە تێدەپەڕێنێت. نەخشەیەك بنوسە کە نرخی سزادان لەو شوێنانەی قوتابخانەی تێدایە دیاریبکات.

ج **چی دەبێت ئەگەر ...؟** شارەوانی بڕیاریدا سزادان لەسەر ڕادەی خێرایی بە 15% زیادبکات نەخشەی نوێ بۆ دیارکردنی سزادان بنووسە.

21 **بیری ڕەخنەگر** وادابنێ ڕوونکردنەوەی نەخشەی$f(x)$ تەوەری x، n جار دەبڕێت.

أ چەندجار ڕوونکردنەوەی نەخشەی $bf(ax)$ تەوەری xدەبڕێت؟ ئەمە ڕوونبکەوە.

ب ڕوونیبکەوە بۆچی ناتوانیت ژمارەی ئەو خاڵانە دیاربکەیت کە ڕوونکردنەوەی نەخشەکە $f(x-h)+k$ تەوەرەی x دەبڕێت.

22 **پارە** یەکێك لە بانکەکان ڕێگە بە هەڵگرانی ئەو کارتە بانکییەی دەریکردووە دەدات قەرز لە ئامێری ڕاکێشانی بانك گوژمەی 6000 دینار وەردەگرێت، ئەگەر نرخی گوژمەی ڕاکێشراو 200 000 تێپەڕنەکات،و 3% نرخی گوژمەی ڕاکێشراو کاتێك لە 200 000 دینار زیاتربوو.

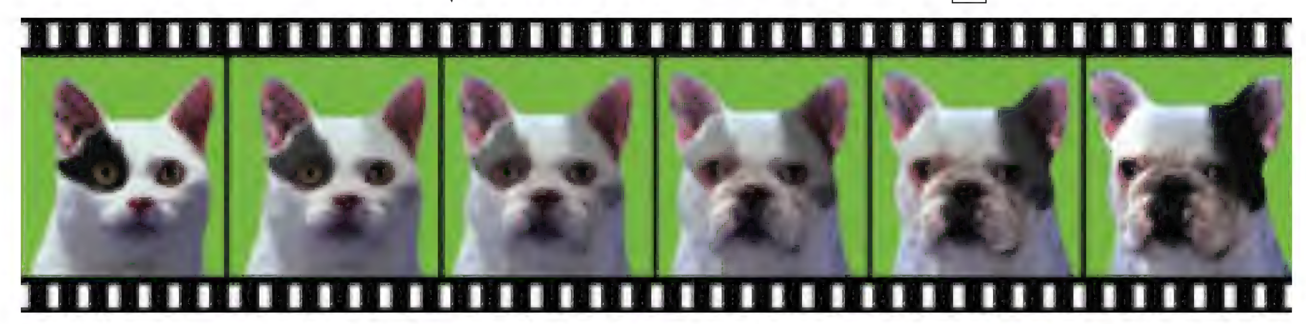
أ نەخشەیەك بنووسە، ئەو بڕە پارەی بانکەکە بەپێی گوژمەی ڕاکێشراو وەریدەگرێت بنوێنێت.

ب وادابنێ بانکەکە بڕیاریدا ئەوەی وەریدەگرێت 15% زیادبکات. نەخشەیەك بۆ ئەمە بنووسە.

23 خوێندکارەکان لە ئاهەنگی لەدایکبوونی یەکێك لە هاورێکەیان بە ریزێکی درێژ وەستابوون، خوێندکاری خانەخوێ ڕستەیەکی بەگوێی خوێندکاری یەکەم چپاند، و داوایلێکرد بە چپە بۆ خوێندکاری پاش خۆی بیگوازێتەوە، ئەویش ڕستەکەی بە گوێی پاش خۆیدا چپاند و داوایلێکرد بۆ خوێندکاری پاش خۆی بگوازێتەوە و بەم شێوەیە ... هەتا ڕستەکە گەیشتە خوێندکاری کۆتایی، بەدەنگی بیستراو بەرامبەر هەموو هاورێکانی ڕستەکەی گوتەوە. نەخشەی $T(n)=\begin{cases}3.5n & n\le 8\\ 5.4n-8 & n>8\end{cases}$ ڕێسایەکە بۆ هەژمارکردنی کاتی خەیانراو بە چرکە بۆ گواستنەوەی ڕستەکە لە یەکەم خوێندکار تا دوا خوێندکار لە ریزەکەدا (n ژمارەی خوێندکارەکانە لە ریزەکەدا).

أ) یارییەکە جارێکی تر دووبارەکرایەوە خوێندکارەکان لە یاریکردندا بە ڕیژەی 20% لە یەکەم جار خێراتربوون.

ب) کاریگەری باشبوونی توانای خوێندکاران لەسەر ڕوونکردنەوەی نەخشەی $T(n)$ باسبکە.



24 **تەکنەلۆژیا** مۆرفینگ Morphing تەکنەلۆژیای بژمێریە. ڕێگای بە گۆڕینی وێنەیەك بۆ وێنەیەکی تر دەدات وەك لە زنجیرە وێنەی سەرەوەدا دیارە. ئەم تەکنەلۆژیایە بەچەند خاڵێك لە وێنەکەوە بۆ وێنەیەکی تر دەگۆڕێت

أ) وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکانی $f(x)=\left\{\frac{1}{2}x+4\right.$ کاتێك $1\le x\le 2$ و $g(x)=\left\{-x^2+6x-7\right.$ کاتێك $2\le x\le 4$ و $h(x)=\left\{-\frac{1}{2}x+7\right.$ کاتێك $4\le x\le 5$ لەهەمان ڕووتەختی پۆوتان بکێشە.

ب) وێنەی ڕوونکردنەوەیی ئەمانە بکێشە $f_1(x)=-f(x)+8$ و $g_1(x)=-5g(x)+3$ و $h_1(x)=-h(x)+8$

بۆهەر نەخشەیەك نەخشەیەکی پەیدابوو لەئەنجامی جیگۆڕکێیەکەی بە جێگۆڕکێی دیاریکراو بنووسە.

25 $f(x)=\begin{cases}2^x-1 & x\le -3\\ -5x+3 & x>-3\end{cases}$ ، ڕاکێشانی 7 یەکە بۆ خوارەوە.

26 $f(x)=\begin{cases}3x^2 & x<1\\ -2x+4 & x\ge 1\end{cases}$ ، کشانی ستوونی هاوکۆلکەکەی 5 بێت.



27 **بەروبوومەکان** یەکێك لە جوتیارەکان بەر و بوومەکانی بە نرخێکی قایلکەر (مغرية) خستەڕوو.

أ) وێنەیەکی ڕونکردنەوەیی بکێشە تێچوونی کرینی هەندێك لەنێوان $0\ kg$ و $10\ kg$ بنوێنێت.

ب) نەخشەی ڕێسا پەلدار بنووسە کەبتوانرێت لەهەژمارکردنی نرخی $x\ kg$ بەروبوومی کشتوکاڵی بەکاربهێنرێت.

ج) **چی دەبێت ئەگەر...؟** لە کۆتایی ڕۆژ خستنە ڕوویەکی تری نیشاندا بۆ کڕیار بەرامبەر هەر کیلۆگرامێك دەیکرێت یەك کیلۆگرام بەخۆڕایی بێت، وێنەیەکی ڕوونکردنەوەیی نەخشە نوێیەکە بکێشە ئەو جێگۆڕکێیەی نەخشەی بنەڕەتی پەیدای دەکات، باسبکە.

28 **کار** یەکێك لە کۆمپانیاکانی فرۆشتنی بژمێر پشت بە نەخشەی $P(n)=-0.002n^2+19n-9000$ دەبەستێت بۆ دیاریکردنی قازانجەکانی فرۆشتنی n بژمێردا، کۆمپانیاکە بۆ ساڵی داهاتوو پشت بە نەخشەی $R(n)=P(0.8n)$ دەبەستێت.

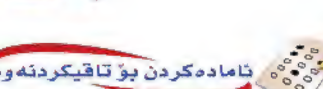
أ کاریگەری ئەم گۆڕانکارییانە لەسەر ژمارەی ئەو بژمێرانەی کۆمپانیاکە پێویستە بیفرۆشێت چییە بۆ ئەوەی زۆرترین قازانجی دەستکەوێت؟

ب ژمارەی بژمێرەکانی پێویستە بیفرۆشێت بۆ هێنانەدی بەرزترین ڕادەی قازانج بدۆزەوە.

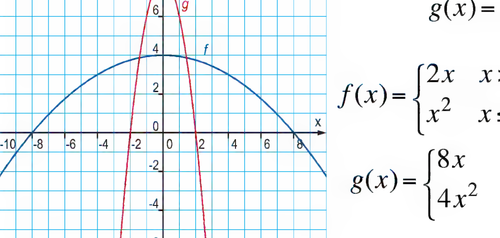
29 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** نەخشەیەکی هێڵی، یەکتربڕینە ئاسۆییەکەی یەکسانە بە 2 و یەکتربڕینە ستوونییەکەی یەکسانە بە 3 نەخشەکە بە شێوەی ستوونی فراوان بکرێت هاوکۆلکەی 2 بێت، پاشان 3 یەکە بۆ خوارەوە ڕابکێشرێت، وە بەشێوەی ئاسۆیی فراوانبکرێت هاوکۆلکەی 2 بێت، یەکتربڕینە نوێیەکانی نەخشە پاش جێگۆڕکێ چەندە؟

30 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** بۆچی لە ڕاکێشانی ستووندا بواری نەخشەکە ناگۆڕێت بەڵام لە ڕاکێشانی ئاسۆییدا بوارەکەی دەگۆڕێت؟ ئەمە ڕوونبکەوە.

31 **بنووسە** ئایا دەتوانرێت ڕوونکردنەوەیەکی پساو (بەیەکەوە نەبەستراو) بۆ ڕونکردنەوەیەکی نەپساو جێگۆڕکێ پێبکرێت، تەنها کشان و چوونەوەیەك بەکاربهێنرێت؟



32 کام لەمانەی خوارەوە بریتییە لە نەخشەی $g(x)$ لە وێنەی ڕونکردنەوەیی بەرامبەردا؟



أ $g(x)=2f\left(\frac{1}{4}x\right)$ ج $g(x)=2f(4x)$

ب $g(x)=\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{4}x\right)$ د $g(x)=\frac{1}{2}f(4x)$

33 کام لەمانە نەخشەی $g(x)=f(4x)$یە کاتێ $f(x)=\begin{cases}2x & x>8\\ x^2 & x\le 8\end{cases}$

أ $g(x)=\begin{cases}\frac{x}{2} & x>2\\ \frac{x^2}{16} & x\le 2\end{cases}$ ج $g(x)=\begin{cases}8x & x>32\\ 4x^2 & x\le 32\end{cases}$

ب $g(x)=\begin{cases}\frac{x}{2} & x>8\\ \frac{x^2}{16} & x\le 8\end{cases}$ د $g(x)=\begin{cases}8x & x>2\\ 16x^2 & x\le 2\end{cases}$

34 یەکتربڕینی ستوونی نەخشەی $g(x)=\frac{3}{5}f(5x)$ بریتییە لە 15. یەکتربڕینی ستوونی بۆ نەخشەی $f(x)$چەندە؟

أ 3 ب 9 ج 25 د 75

بەرەنگاری و فراوانکردن

35 **ئەندازە** نەخشەی $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x+4 & x<0\\ -\frac{1}{2}x+4 & x\ge 0\end{cases}$ بەکاربهێنە.

أ وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)$ بکێشە و یەکتربڕینەکانی دیاربکە. پاشان ڕووبەری ناوچەی دیاریکراو بە ڕوونکردنەوەی نەخشەکە و تەوەرەی یەکەم هەژماربکە.

ب وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $g(x)=4f(2x)$ بکێشە. پاشان ڕووبەری ناوچەی دیاریکراو بە ڕوونکردنەوەکە و تەوەرەی یەکەم هەژمار بکە.

36 نەخشەی $f(x)=2x^3-3x^2-11x+6$ بەکاربهێنە.

أ یەکتربڕینی نەخشەی $g(x)=3f\left(\frac{1}{2}x\right)$ دیاربکە ب یەکتربڕینی نەخشەی $h(x)=-g\left(\frac{1}{2}x\right)$ دیاربکە

پێداچوونەوەی لوولپێچی

37 **زەویناسی** لەنێوان ساڵی 1999 و 2002 دا 973 بومەلەرزە لە ولآتە یەکگرتووەکانی ئەمریکای داوە. 43% ئەو بومەلەرزانە لە کالیفۆڕنیای داوە. بە نزیکی چەند بومەلەرزە لەو ماوەیە لە کالیفۆڕنیای داوە. (پۆلەکانی پێشوو)

گەورەترین و بچووکترین بەها بۆهەر نەخشەیەك بدۆزەوە، پاشان بوار و مەودای نەخشەکە دیاریبکە. (پۆلەکانی پێشوو)

38 $f(x) = 4x^2 - 2x + 8$

39 $g(x) = -3x^2 + 6x - 9$

بەهای هەر نەخشەیەکی ڕێسا پەلداری خوارەوە کاتێك $x = -4$ و $x = 0$ و $x = 5$ هەژماربکە. (وانەی 5- 2)

40 $f(x) = \begin{cases} 3 & x < 1 \\ x^2 - 4 & x \geq 1 \end{cases}$

41 $g(x) = \begin{cases} 5 - 2x & x < -3 \\ 4 + x & x \geq -3 \end{cases}$



تاقیکردنەوەی نیوەی بەش



1–5 نەخشە ڕێسا پەلدارەکان

وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە.

1 $f(x)=\begin{cases}3 & x<0\\ 2x+3 & x\geq 0\end{cases}$

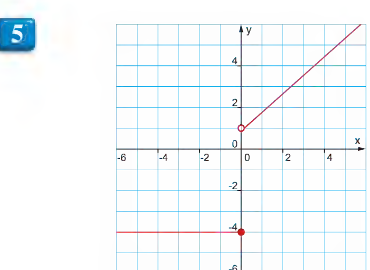
2 $h(x)=\begin{cases}-x+1 & x<-3\\ -x & -3\leq x<1\\ -x-1 & x\geq 1\end{cases}$

3 بەکرێ گرتنی پاسکیل بۆ گواستنەوە لە شاخ بۆ سێ کاتژمێری یەکەم 25 000 دیناری تێدەچێت، و 5000 دینار بۆهەر کاتژمێرێکی زیادە. وێنەیەکی ڕوونکردنەوەیی بکێشە بۆ بەکرێگرتنی پاسکیل بۆ کاتێکی دیاریکراو لە 0 تا 8 کاتژمێر.

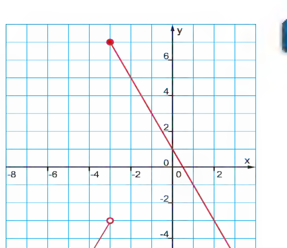
نەخشەیەکی ڕێسا پەلدار بۆهەر یەکێك لەم وێنە ڕوونکردنەوەییانە بنووسە.



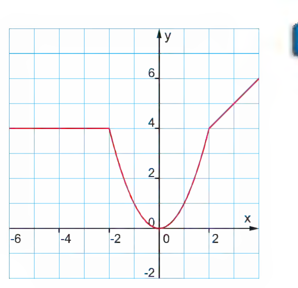
4

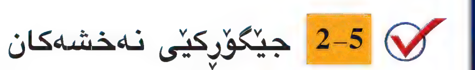


5



6





2–5 جیگۆڕکێی نەخشەکان

یەکتربڕینەکانی ئاسۆیی و ستوونی بۆ نەخشەی $f(x)$ دیاریبکە، و دەرئەنجامی یەکتربڕینەکانی ئاسۆیی و ستوونی بۆ نەخشەی $g(x)$ بەبێ وێنەکێشانی ڕوونکردنەوەیی دیاریبکە.

7 $f(x)=2x-2$ ، $g(x)=-f\left(\frac{1}{2}x\right)$

8 $f(x)=x^2-4$ ، $g(x)=2f(x)$

وێنەی ڕوونکردنەوەیی $g(x)$ بکێشە بە زانینی $f(x)$

9 $f(x)=|x|-3$ ، $g(x)=2f(x)+3$

10 $f(x)=x^2+1$ ، $g(x)=-3f(x)$

3-5 کردارەکان لەسەر نەخشەکان

Operations with Functions



ئامانجەکان

- کۆکردنەوە و لێدەرکردنی نەخشەکان و لێکدان و دابەشکردنیان.
- ئاوێتەکردنی نەخشەکان و هەژمارکردنی بەهای نەخشەی ئاوێتە.

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

کاڵاهێنەرەکان دەتوانن کردارەکان لەسەر نەخشە بەکاربهێنن بۆ دیاریکردنی تێچوونی ئەوەی بە دراوی بیانی دەیکڕن (نموونە 5)

دەتوانیت کردارەکان لەسەر نەخشەکان ئەنجامبدەیت، وەك چۆن کردارەکان لەسەر ژمارەکان و بڕەکان ئەنجام دەدەیت. دەتوانیت نەخشەکان کۆبکەیتەوە و لە یەکتریان دەربکەیت و لێکیان بدەیت. ئەو کردارانەش لەسەر ڕێساکانیان ئەنجامدەدرێت.

فێربە و بەسەرنج بدە

کردارەکان لەسەر نەخشەکان	
کردارەکە	نووسینەوە
کۆکردنەوە	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
لێدەرکردن	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$
لێکدان	$(fg)(x)=f(x)\times g(x)$
دابەشکردن	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ کاتێك $g(x)\neq 0$

نموونە 1 کۆکردنەوە و لێدەرکردنی نەخشەکان

$f(x)=2x^2+4x-6$ ؛ $g(x)=2x-2$ هەر نەخشەیەك بدۆزەوە.

أ $(f+g)(x)$

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

$=(2x^2+4x-6)+(2x-2)$ لەجیاتی هەرنەخشەیەك ڕیساکەی دابنێ.

$=2x^2+6x-8$ سادەبکە

ب $(f-g)(x)$

$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$

$=(2x^2+4x-6)-(2x-2)$ لەجیاتی هەر نەخشەیەك ڕێساکەی دابنێ

$=2x^2+4x-6-2x+2$ سیفەتی بەشینەوە بەکاربهێنە

$=2x^2+2x-4$ سادەبکە



1. $f(x)=5x-6$ ؛ $g(x)=x^2-5x+6$ ئەمانە بدۆزەوە.

أ $(f+g)(x)$ **ب** $(f-g)(x)$

کاتێك نەخشەیەك دابەشی نەخشەیەکی تر دەکەیت دڵنیابە لەهەر بوارێك لە ئەنجامی دابەشکردنەکە پەیدادەبێت.

نموونـــــه 2 لێكدان و دابەشكردنی نەخشەكان

$f(x)=2x^2+4x-6$ ؛ $g(x)=2x-2$ هەر نەخشەیەك بدۆزەوە.

أ $(gf)(x)$

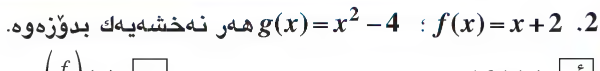
$$(gf)(x)=g(x)\times f(x)$$

$=(2x-2)(2x^2+4x-6)$	لەجیاتی هەرنەخشەیەك ڕێساكەی دابنێ
$=2x(2x^2+4x-6)-2(2x^2+4x-6)$	سیفەتی بەشینەوە بەكاربهێنە
$=4x^3+8x^2-12x-4x^2-8x+12$	لێكدانبكە
$=4x^3+4x^2-20x+12$	سادەبكە

ب $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

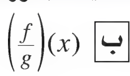
$=\frac{2x^2+4x-6}{2x-2}$	ئەنجامی دابەشكردنەكە بەشێوەی كەرت بنووسە
$=\frac{2(x-1)(x+3)}{2(x-1)}$	بەتەواوەتی شیتەڵبكە سەرنجبدە $x\neq1$
$=\frac{\cancel{2}\cancel{(x-1)}(x+3)}{\cancel{2}\cancel{(x-1)}}$	كورتبكەوە
$=x+3 \quad (x\neq1)$	سادەبكە





2. $f(x)=x+2$ ؛ $g(x)=x^2-4$ هەر نەخشەیەك بدۆزەوە.

أ $(fg)(x)$ **ب** $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$



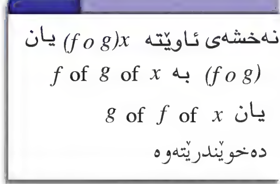


ئاوێتەكردنی نەخشەكان

ئاوێتەكردنی نەخشەی f لەگەڵ نەخشەی g ، بریتییە لەو نەخشەی یەكەم بەم شێوە دەنووسرێت

$$(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)$$

بواری نەخشەی ئاوێتە $(f\circ g)(x)$ بریتییە لە كۆمەڵە بەهای x لەبواری g دا. وادەكات لە $g(x)$ سەربە بواری f بێت.



بۆ هەژماركردنی $f\circ g\ (1)$ یەكەمجار هەژماری $g\ (1)$ بكە؛

$g(1)=4$

پاش ئەوە هەژماری $f\ (4)$ بكە

$f(4)=8$

كەواتە $(f\circ g)\ (1)=f(g\ (1))=f\ (4)=8$

$f\circ g$

	g		f	
1	→	4	→	8
3	→	6	→	12
5	→	8	→	16

ڕێسای ڕیزبەندی كردارەكان لەسەر نەخشە هەمان ڕێسای ڕیزبەندی كردارەكانە لەسەر ژمارەكان و برەكان بۆ هەژماری $(f\circ g)(3)$ یەكەمجار $g\ (3)$ هەژماربكە، پاشان هەژماری بەهای f بكە، كاتێك بەهای بۆ ناوی $g\ (3)$ بێت.

نموونـــــه 3 هەژمارکردنی بەهای نەخشە ئاوێتەکان

$f(x)=3x+1$ و $g(x)=x^3$ هەژماری هەر بەهایەك بکە.

أ $f(g(2))$

هەنگاوی 1 هەژماری $g(2)$ بکە

$g(x)=x^3$ $g(2)=2^3=8$

هەنگاوی 2 هەژماری $f(8)$ بکە

$f(x)=3x+1$ $f(8)=3\times 8+1=25$

کەواتە $f(g(2))=25$

ب $g(f(2))$

هەنگاوی 1 هەژماری $f(2)$ بکە

$f(x)=3x+1$ $f(2)=3\times 2+1=7$

هەنگاوی 2 هەژماری $g(7)$ بکە

$g(x)=x^3$ $g(7)=7^3=343$

کەواتە $g(f(2))=343$

ئاگاداربە!

هێمای ئاوێتەکردنی نەخشەی (o) و هێمای لێکدان (•) تێکەڵاو مەکە.



$(fg)(x) \neq f(g(x))$

خاڵی چاودێری

3. $f(x)=2x-3$ و $g(x)=x^2$ هەژماری هەر بەهایەك بکە.

أ $f(g(3))$ ب $g(f(3))$

دەتوانیت برە جەبریەکان وەك بەهای بۆناو نەخشە بەکاربهێنیت، وەك چۆن ژمارەکان بەکاردەهێنیت بۆ دۆزینەوەی ڕیسای نەخشەی ئاوێتە $f(g(x))$ لەنەخشەی $f(x)$ لەجیاتی x برەی $g(x)$ دابنێ. پاشان ئەو برەی دەردەچێت بەسادەترین شێوەی بنووسە.

نموونـــــه 4 نووسینی نەخشەی ئاوێتە

$f(x)=5x+2$ و $g(x)=\frac{2}{x-1}$ هەر نەخشەیەکی ئاوێتە بنووسە و بوارەکەی دیاریبکە.

أ $f(g(x))$

$f(g(x))=f\left(\frac{2}{x-1}\right)$ لەجیاتی x ڕێسای نەخشەی g دابنێ

$=5\left(\frac{2}{x-1}\right)+2$ ڕێسای f بەکاربهێنە. سەرنجبدە $x\neq 1$

$=\frac{10}{x-1}+2 \quad ; \quad x\neq 1$ سادەبکە

بواری نەخشەی $f(g(x))$ بریتییە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان جگەلە 1 یان $\{x|x\neq 1\}$

چونکە $g(1)$ پێناسە نەکراوە.

ب $g(f(x))$

$g(f(x))=g(5x+2)$ لەجیاتی x ڕێسای نەخشەی f دابنێ

$=\frac{2}{(5x+2)-1}$ ڕێسای نەخشەی g بەکاربهێنە، سەرنجبدە $x\neq 1$

$=\frac{2}{5x+1} \quad , \quad x\neq -\frac{1}{5}$ سادەبکە

بواری نەخشەی $g(f(x))$ بریتییە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان جگەلە $-\frac{1}{5}$ یان $\{x|x\neq -\frac{1}{5}\}$

چونکە $f\left(-\frac{1}{5}\right)=1$ و $g(1)$ پێناسە نەکراوە.



خاڵی چاودێری

4. $f(x)=3x-4$ و $g(x)=\sqrt{x}+2$ نەخشەی ئاوێتە بنووسە و بوارەکەی دیاریبکە.

أ $f(g(x))$ ب $g(f(x))$

دەتوانیت ئاوێتەکردنی نەخشەکان بەکاربهێنیت بۆ سادەکردنی زنجیرەیەك لە نەخشەکان.

نموونـــە 5 جیێبەجیکردن لەسەر کارگێڕی کار

دڵسۆز ماتۆڕسکیلێکی (سکوتر) کەنرخی بەیۆڕۆ بۆ دانراوە لە ئیتالیاوە دەهێنێت. تێچوونی گشتی هەر ماتۆڕسکیلێک 10% باجی گومرگی و 75 یۆڕۆ بارکردنی دەچێتەسەر.

أ نەخشەیەکی ئاوێتە بنووسە، نموونەیەك بنوێنێت، بۆ تێچوونی هەر ماتۆڕسکیلێك بەدینار بەپێی نرخەکەی یۆڕۆ (c) هەژماربکات.

هەنگاوی 1 نەخشەیەك بۆهەژمارکردنی تێچونی ماتۆڕسکیلێك بەیۆڕۆ بنوسە

$$E(c) = c + 0.1c + 75$$
$$= 1.1c + 75$$

هەنگاوی 2 نەخشەیەك بۆهەژمارکردنی تێچونی بە دینار بەپێی تێچونی بەیۆڕۆ بنووسە $R(c) = 1920c$

1 یۆڕۆ = 1920 دینار بەکاربهێنە

هەنگاوی 3 نەخشەی ئاوێتەی $R(E(c))$ بدۆزەوە

نرخی دراوەکان
بۆهەر 1000 دیناری عیراقی
0.84 دۆلاری ئەمریکی
3.09 ریالی سعودی
1260 لیرەی لوبنانی
0.52 یۆرۆی ئەوروپی

$$R(E(c)) = 1920E(c) = 1920(1.1c + 75) = 2112c + 144\ 000$$ لەجیاتی دابنێ

ب هەژماری تێچونی ماتۆڕسکیلێك بەدینار بکە نرخەکەی **1200** یۆڕۆ بێت.

هەژماری بەهای نەخشەی ئاوێتەی $R(E(c))$ بکە کاتێك $c = 1200$

$$R(E(1200)) = 2112 \times 1200 + 144\ 000 = 2\ 678\ 000$$

تێچونی گشتی ئەم ماتۆڕسکیلە 2 678 000 دینارە

خاڵی چاودێری

5. یەکێك لە دوکانەکانی ئامێری مۆسیقی ئاشکرایکرد ئامێری عود بە ڕێژەی 20% دادەشکێنێت بۆئەو کڕیارانەی بەرگی عود دەکڕن لە دوکانەکەدا، داشکانێکی تری بۆ زیادکرا ڕێژەکەی 15% بۆهەر ئامێرێکی عود کە دەیکڕن.

أ نەخشەیەکی ئاوێتە بنووسە بۆهەژمارکردنی نرخی کۆتایی بۆئەو کڕیارەی بەرگی عود دەکڕێت لەکاتی کڕینی ئامێرێکی عود دا نرخەکەی x دینارە.

ب ئالان یەکێکە لەو کڕیارانەی لەدوکانەکە زۆرترین شت دەکڕێت. عودێکی کڕی نرخەکەی 248 000 دیناربوو، ئالان ئەو بەرگەی لەو دوکانە بەچەند کڕیوە؟

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. ئەو هۆیەی وادەکات لە $(f+g)(x) = (g+f)(x)$ ڕوونبکەوە.

2. هەردوو نەخشەی $f(x)$ و $g(x)$ بدۆزەوە بەجۆرێك کە $f(g(x)) = g(f(x))$



3. ڕێکخەربە ئەم خشتەیە دروستبکەوە و تەواوبکە، پاشان هەرکردارێك لەسەر دوو نەخشەکە بەڕێگای ڕاست بنووسە.

کردار	نووسین
کۆکردنەوەی دوو نەخشە	
لێدەکردنی دوو نەخشە	
لێکدانی دوو نەخشە	
دابەشکردنی دوو نەخشە	
ئاوێتەکردنی دوو نەخشە	

3–5 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** ئاوێتەکردنی نەخشەکان بەچی لە کردارەکانی تر جیاوازە؟

بڕوانە نموونە 1

$f(x)=8x+13$ ؛ $g(x)=x^2-5x$ هەر نەخشەیەك بدۆزەوە.

2 $(f+g)(x)$ **3** $(f-g)(x)$ **4** $(g-f)(x)$

بڕوانە نموونە 2

$f(x)=2x^2+2x$ ؛ $g(x)=x+1$ هەر نەخشەیەك بدۆزەوە.

5 $(fg)(x)$ **6** $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ **7** $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$

بڕوانە نموونە 3

$f(x)=3x^2$ ؛ $g(x)=7-x$ هەر بەهایەك بدۆزەوە.

8 $f(g(5))$ **9** $g(f(5))$ **10** $f(g(-2))$

بڕوانە نموونە 4

$f(x)=x^2$ ؛ $g(x)=2x-3$ ؛ $h(x)=\sqrt{x+1}$ هەر نەخشەیەك بدۆزەوە و بوارەکەی دیاریبکە.

11 $f(g(x))$ **12** $g(f(x))$ **13** $f(h(x))$

بڕوانە نموونە 5

14 **ئابووری بەکاربەر** بۆ خوێندن لە زانکۆ، کرێکار ئەو پارەی وەریدەگرێت 10%ی پاشەکەوت دەکات و 50 000 دیناری تری دەخاتەسەر، پوختەی مانگانەی کرێکار وەریدەگرت لە پاش داشکانی باج و سەرانە 80% ی موچە بنەڕەتی یەکەی پێکدەهێنێت.

أ نەخشەیەکی ئاوێتە بنووسە بۆ هەژمارکردنی ئەوەی کرێکار مانگانە پاشەکەوتی دەکات بەپێی مووچە بنەڕەتیەکی g .

ب ئەوەی کرێکار پاشەکەوتی دەکات هەژماربکە، ئەگەر بزانی مووچەی بنەڕەتی مانگانە 2 400 000 دینارە.

ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

ڕاهێنانی ئازاد	
شیکارکردنی پرسیارەکان	تەماشای نموونە بکە
18-15	1
23-19	2
29-24	3
32-30	4
33	5

$f(x)=2x^2-8$ ؛ $g(x)=x^2+5x+6$ ؛ $h(x)=2x+4$ هەر نەخشەیەك بدۆزەوە.

15 $(f+g)(x)$ **16** $(f-g)(x)$ **17** $(f+h)(x)$ **18** $(g-h)(x)$

19 $(fg)(x)$ **20** $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ **21** $\left(\frac{h}{f}\right)(x)$ **22** $(gh)(x)$ **23** $\left(\frac{g}{h}\right)(x)$

$f(x)=2\sqrt{x+3}$ ؛ $g(x)=-3x+1$ هەر بەهایەك بدۆزەوە.

24 $f(g(1))$ **25** $g(f(1))$ **26** $f(g(4))$

27 $g(f(6))$ **28** $f\left(g\left(\frac{4}{3}\right)\right)$ **29** $g(f(97))$

$f(x)=4x+3$ ؛ $g(x)=\frac{x}{x+3}$ ؛ $h(x)=x^2-2$ هەر نەخشەیەکی ئاوێتە بدۆزەوە و بوارەکەی دیاریبکە.

30 $f(g(x))$ **31** $g(f(x))$ **32** $f(h(x))$

33 **کارەکان** بڕی تێچوونی کاشی کردنی ژورێك 100 000 دینارە، بۆهەریەك یاردی دووجا 4000 دینار زیاد دەدات، بزانە (یارد یەکەیەکی ئینگلیزیە بۆ پێوانی درێژی و هەر یاردەیەك یەکسانە بە 3 پێ و پێ یەکەیەکی تری ئینگلیزیە بۆ پێوانی درێژی بەکاردێت دەکاتە 30.48 cm

أ نەخشەیەکی ئاوێتە بنووسە بۆ هەژمارکردنی تێچوونی کاشی کردنی ژوورێك ڕووبەرەکەی x پێ چوارگۆشە بێت.

ب ڕووبەری ژوورەکە بە پێ دووجا بدۆزەوە ئەگەر زانیت تێچوونی کاشی کردنەکە 380 000 دینارە.

34 لەکاتی گەرمکردنی هەوای ناو بالۆن؛ تا 83^{o} بۆهەریەك پێ سێجا لەهەوا توانای بەرزکردنەوەی $25\ ^{o}g$ بەنزیکی هەیە

أ نەخشەیەك بنووسە بۆ بالۆنێك و ژمارەی ئەو گرامانەی کە دەتوانێت هەڵیبگرێت کاتێك xm^{3} هەوای گەرمی تێدابێت.

ب چەند مەتر سێجا لە هەوای گەرم پێویستە بۆ هەڵگرتنی کەسێکە بارستەکەی 75kg بێت.

ج نەخشەی $g(x)=\frac{x}{453.6}$ ڕێسایەکە بۆ گۆڕینی گرام بۆ (پاوەند لە یەکەیەکی ئینگلیزیە بۆ پێوانی بارستایی)، نەخشەیەك بنوسە ژمارەی ئەو پاوەندانەی بالۆنەکە دەتوانێت هەڵیبگرێت کاتێك x پێ سێجا هەوای گەرمی تێدابێت، بنوێنێت.

د ژمارەی پێ سێجاکان لەهەوای گەرم بۆ بەرزکردنەوەی 1000 پاوەند بخەملێنە.

35 **ئابوری بەکاربەر** کۆژین دوو بلیتی کڕینی پێیە، دەتوانێ بۆکڕینی پێڵاو لەدوکانێکی پێڵاو بەکاریبهێنێت. بلیتی یەکەم داشکانی 10 000 دینار بۆ دابین دەکات بەڵام بلیتی دووەم داشکانی ڕێژەی15%دابین دەکات.

أ نەخشەی $f(p)$ بنووسە، بۆئەو پارانەی کۆژین بۆ کڕینی پێڵاو دەیدات نرخەکەی p دینار بێت، ئەگەر تەنها بلیتی یەکەم بەکاربهێنێت.

ب نەخشەی $g(p)$بنووسە، بۆئەو پارەی کۆژین بۆ کڕینی پێڵاو دەیدات نرخەکەی p دینار بێت، ئەگەر تەنها بلیتی دووەم بەکاربهێنێت.

ج $f(g(p))$ و $g(f(p))$ بدۆزەوە.

د ئامۆژگاری کۆژین دەکەیت، کام بلیتیان یەکەم جار بەکاربهێنێت؟ ئەمە ڕوونبکەوە.

هـ کەمترین نرخ کۆژین دەیدات بۆ کڕینی جووتە پێڵاوێك نرخەکەی 49 000 دینار بێت بدۆزەوە.

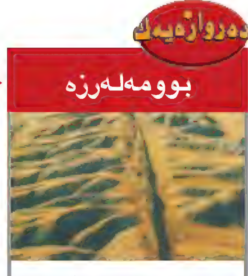
36 **بوومەلەرزە** ئەو شەپۆلەی بوومەلەرزە دروستی دەکات بەخێرایی 9km/s بڵاودەبێتەوە، زیانەکانی زۆر زۆردەبێت لەو ناوچانەی دەوری شوێنی بومەلەرزەکەیان داوە.

أ نەخشەیەك بۆ هەژمارکردنی ڕووبەری ناوچەیەكkm^2 بومەلەرزە کاریتێدەکات پاش t چرکە بدۆزەوە.

ب زەویناسان خەملاندیان کاریگەری بوومەلەرزە کۆتایی دێت پاش ئەوەی ڕووبەری ناوچەی کارتێکراو دەگاتە $35000\ km^2$، کاریگەری بوومەلەرزەکە چەند دەخایەنێت.

دەروازەیەك

بوومەلەرزە



بوومەلەرزە لە ئەنجامی جووڵەی چینەکانی زەوی نزیك شوێنی قڵیشبردوو پەیدادەبێت. قڵیشەکان شکانی توێکڵی زەویە و دەکەوێتە سنووری چینە تەکتۆنیەکان.

37 **دانیشتوان** نەخشەی $p(t)=160\ 000\times1.05^{t}$ ڕێسایەکە بۆ دیاریکردنی ژمارەی دانیشتوانی یەکێك لە شارەکان، کاتێك t ژمارەی ساڵەکان بێت، کە لە ساڵی 1980 دا ئەنجامدراوە. و نەخشەی $d(p)=0.0044\,p$ ژمارەی پزیشکەکانی ئەم شارە بەپێی ژمارەی دانیشتوان بێت کاتێك p ژمارەی دانیشتوانی شارەکە بێت.

أ نەخشەییەك بنووسە بۆهەژمارکردنی ژمارەی پزیشکەکانی ئەم شارە بەپێی ژمارەی ساڵەکان، لە ساڵی 1980 وە.

ب **خەملاندن** ژمارەی پزیشکەکانی ئەم شارە بۆ ساڵی 2010 بخەملێنە.

ج کەی ژمارەی پزیشکەکانی ئەم شارە لە 5000 پزیشك زیاتر دەبێت؟

38 **بیری ڕەخنەگر** ئەگەر$f(x)=x$ئایا هەموو کات نەخشەی$f(g(x))$ یەکسانە بە نەخشەی $g(f(x))$ ڕوونبکەوە

ئەم دوو خشتەی بەرامبەر بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی هەر بەهایەك.

39 $g(f(5))$ **40** $f(g(3))$ **41** $g(f(4))$ **42** $f(g(2))$

x	2	3	4	5
$f(x)$	0	1	2	3

x	1	2	3	4
$g(x)$	1	2	4	8

43 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** ئایا دەتوانیت ئەم دوو خشتە بەکاربهێنیت بۆ دۆزینەوەی $f(g(4))$ ؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

44 **بنووسە** ئایا سەرجەمی دوو نەخشەی هێڵی دەبێتە نەخشەی هێڵی؟ ئایا ئەنجامی لێکدانی دوو نەخشەی هێڵی دەبێتە نەخشەی هێڵی؟ ئەمە ڕوونبکەوە.

45 كام لەم دوو نەخشە خوارەوە پاسەدانی ئەمە دەكەن، $f(x)$ و $g(x)$ كاتێك $(f \circ g)(x)=(3x+4)^2$

ⓐ $f(x)=3x+4$ ؛ $g(x)=x^2$ ⓙ $f(x)=(3x)^2$ ؛ $g(x)=4^2$

ⓑ $f(x)=x^2$ ؛ $g(x)=3x+4$ ⓓ $f(x)=3x+4$ ؛ $g(x)=\sqrt{x}$

46 كام نەخشە بریتییە لە $(fg)(5)$ ئەگەر $f(x)=2x+1$ و $g(x)=5x-2$

ⓐ 253   ⓑ 53   ⓙ 47   ⓓ 13

47 كام لەمانەی خوارەوە نەخشەی $(f \circ g)(x)$ كاتێك $f(x)=4-x^2$ ، $g(x)=\frac{1}{2}x-2$ ؟

ⓐ $(f \circ g)(x)=-\frac{1}{2}x^2$ ⓙ $(f \circ g)(x)=-\frac{1}{2}x^3+2x^2+2x-8$

ⓑ $(f \circ g)(x)=-\frac{1}{4}x^2+2x$ ⓓ $(f \circ g)(x)=-x^2+\frac{1}{2}x+2$

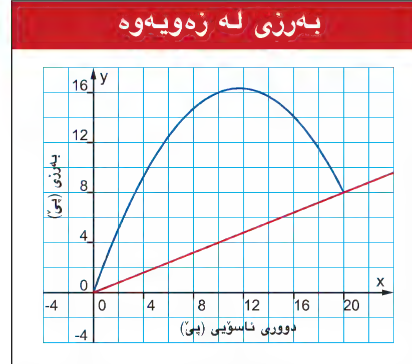
48 **تەنها وەڵام** $(f+g)(2)$ بدۆزەوە كاتێك $f(x)=(x+1)^2$ و $g(x)=3x$

بەرەنگاری و فراوانكردن

49 $g(x)$ بدۆزەوە ئەگەر بزانیت $f(x)=2x-6$ و $f(g(x))=3x^2+4$

50 $g(f(x))$ بدۆزەوە كاتێك $f(x)=3x+8$ و $g(x)=\begin{cases} x^2 & x<0 \\ 5x+2 & x\geq 0 \end{cases}$

51 **فیزیا** نەخشەی $y=-0.12x^2+2.8x$ ڕێسایەكە بۆ هەژماركردنی بەرزی تۆپی پێ y دەنوێنێت. كە بە ئاراستەی گردەكە لێدەدرێت، بەپێی دووری ئاسۆیی x لەخاڵی لێدانەوە. هەروەها نەخشەی $y=\frac{2}{5}x$ دۆزینەوەی بەرزی خاڵێك لەسەر گردەكە بەپێی دووری لە خاڵی لێدانی تۆپەكە دەنوێنێت.



أ بەرزی لە ئاستی خاڵی لێدان بۆ بەرزترین خاڵ تۆپەكە دەیگاتێ بدۆزەوە.

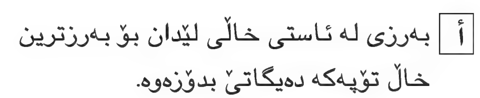
ب بەرزی لە ئاستی خاڵی لێدان بۆ خاڵی كەوتنە خوارەوەی تۆپەكە لەسەر گردەكە بدۆزەوە.

پێداچوونەوەی لووپێچی

52 **كار** ساڵانە بەهای بزمێرێك نرخەكەی 2 500 000 دینارە بە ڕێژەی 20% دادەبەزێت. (وانەی 4-1)

أ نەخشەیەك بۆ دۆزینەوەی بەهای بزمێر پاش t ساڵ بنووسە.

ب بەهای بزمێر پاش 10 ساڵ دەبێتە چەند؟



بنووسە ئەگەر زانیت $f(x)=\begin{cases} 8x & x\geq 0 \\ x-9 & x<0 \end{cases}$ **ڕێسایەك بۆ هەر نەخشەیەك بنووسە.** (وانەی 5-2)

53 $g(x)$ بریتییە لە نەخشەی پەیدابوو لە جێگۆڕكێی نەخشەی $f(x)$ بە ڕاكێشانی 5 یەكە بۆلای چەپ.

54 $h(x)$ بریتییە لە نەخشەی پەیدابوو لە جێگۆڕكێی نەخشەی $f(x)$ بە كشانی ئاسۆیی هاوكۆلكەی 3 بێت.

4–5 نموونە بیرکارییەکان

Mathematical Models



کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

دەتوانیت نموونە بیرکارییەکان بۆ شیکردنەوە و پێشبینی کردنی ژمارەی ئامێرەکانی پارەپێدان (صرف الآلي) کە ئیش دەکەن بەکاربێنێت. (نموونە 3)



ئامانجەکان

بۆ نواندنی باری ژیانی ڕۆژانە بەهۆی نەخشەکان نموونەی بیرکاری بەکاردەهێنرێت بۆ بەجێهێنانی پێشبینییەکان.

زۆر لەو پێدراوانەی لەسەربارەکانی ژیان کۆدەکرێنەوە شێوەیەك پێکدەهێنێت دەتوانیت بە بەکارهێنانی نەخشەیەك لەو نەخشانەی خوێندوتە بنوێنیت ئەو کاتە دەتوانیت ئەم نەخشانە بۆ شیکردنەوە و داڕشتنی پێشبینییەکان بەکاربهێنیت. هەندێك لەو نەخشە بنەڕەتیانەی تا ئێستا خوێندوتە وەبیر خۆت بێنەوە.



نەخشە بنەڕەتییەکان				
جۆر	هێڵی	دووجا	توانی	ڕەگی
هاوکێشە	$f(x)=x$	$f(x)=x^2$	$f(x)=b^x, b>0$	$f(x)=\sqrt{x}$
ڕوونکردنەوە				
نەگۆڕی جیاوازییەکان یان ڕێژەکان	نەگۆڕی جیاوازییەکانی یەکەم بۆ بەهایەکانی y کە بە بەهایەکانی x وە بەستراوە لە دووریدا یەکسانن	نەگۆڕی جیاوازییەکانی دووەم بۆ بەهایەکانی y کە بە بەهایەکانی x وە بەستراوە لەدووریدا یەکسانن	نەگۆڕی ڕێژەی بەهایەکانی y کە بە بەهایەکانی x وە بەستراوە لە دووریدا یەکسانن	نەگۆڕی جیاوازییەکانی دووەم بۆ بەهایەکانی x کە بە بەهایەکانی y بەستراوە لەدووریدا یەکسانن

یارمەتی

لەبەرئەوەی نەخشەی ڕەگی دووجای نەخشەی هەڵگەڕاوەیە بۆ نەخشەی دووجا ئەوا بەهای x و بەهای y ئاڵوگۆڕ دەبن.

نموونە 1 جیاکردنەوەی نموونەکان بە بەکارهێنانی نەگۆڕی جیاوازییەکان یان ڕێژەکان

نەگۆڕی جیاوازییەکان یان ڕێژەکان بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی نەخشەی بنەڕەتی گونجاوتر بۆ نواندنی ئەم کۆمەڵە پێدراوانە.

أ درێژی سپرینگەکە پشت بەو بارستاییە دەبەستێت کە پێوەی هەڵواسراوە

بارستایی (kg)	4	5	6	7	8	9	10
درێژی (cm)	30.6	32	33.4	34.8	36.2	37.6	39

سەرنجبدە جیاوازی نێوان هەردوو بەهای هاوسێ بۆ بارستاییەکە نەگۆڕە. ساغبکەوە ئەگەر جیاوازی نێوان هەردوو بەهای هاوسێ بۆ درێژی نەگۆڕە.

درێژی (cm)	30.6	32	33.4	34.8	36.2	37.6	39
جیاوازییەکانی یەکەم	1.4	1.4	1.4	1.4	1.4	1.4	

لەبەرئەوەی جیاوازی یەکەم نەگۆڕە ئەوا نەخشەی هێڵی گونجاوترە بۆ نواندنی پێدراوەکانی خشتەکە.

ب تەمەنی دار بە تیرەکەی دیاری دەکرێت.

تیرەکەی (cm)	1.6	3.6	6.4	10.0	14.4	19.6	25.6
تەمەن (ساڵ)	2	3	4	5	6	7	8

سەرنجبدە جیاوازی نێوان هەردوو بەهای هاوسێ لە خشتەکەدا بۆ تەمەن نەگۆڕە.
ساغبکەوە ئەگەر جیاوازی نێوان دوو بەهای تەنیشت بۆ تیرە نەگۆڕ بێت.

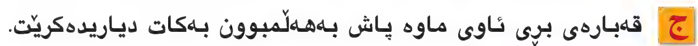
تیرەکەی (cm)	1.6	3.6	6.4	10.0	14.4	19.6	25.6

جیاوازییەکانی یەکەم 2.0 2.8 3.6 4.4 5.2 6.0

جیاوازییەکانی دووەم 0.8 0.8 0.8 0.8 0.8

لەبەرئەوەی جیاوازییەکانی دووەم بۆ گۆڕاوی ئازاد x نەگۆڕن، کە بە بەهاکانی گۆڕاوی بەستراو y ەوە بەستراوە لەدووریدا یەکسانن.

ئەوا نەخشەی ڕەگی دووجا گونجاوترین نموونەیە بۆ نواندنی ئەم پێدراوانە پاسەدان خاڵەکانی خشتەکە ئەوە دەردەخەن گونجاوترین نەخشە بریتییە لە $f(x)=\sqrt{x}$



ج قەبارەی بڕی ئاوی ماوە پاش بەهەڵمبوون بەکات دیاریدەکرێت.

کات (کاتژمێر)	1	2	3	4	5	6
قەبارە (mL)	512	384	288	216	162	121.5

لەبەرئەوەی جیاوازییەکانی نێوان دوو بەهای هاوسێ لەخشتەکەدا بۆ کات نەگۆڕە. تۆش ئەوە پاسەدان بکە جیاوازییەکانی نێوان دوو بەهای هاوسێ بۆ قەبارە نەگۆڕە.

قەبارە (mL)	512	384	288	216	162	121.5

جیاوازییەکانی یەکەم -128 -96 -72 -54 -40.5

جیاوازییەکانی دووەم 32 24 18 13.5

جیاوازییەکانی یەکەم نەگۆڕ نییە. هەروەها جیاوازییەکانی دووەم. ساغبکەوە ئایا ڕێژەی هەر بەهایەك لە قەبارە بۆ بەهای پێش خۆی نەگۆڕە یان نا.

$\frac{384}{512}=0.75$ $\frac{288}{384}=0.75$ $\frac{216}{288}=0.75$ $\frac{162}{216}=0.75$ $\frac{121.5}{162}=0.75$

لەبەرئەوەی ڕێژەی هەربەهایەکی قەبارە بۆ بەهای پێش خۆی نەگۆڕە. ئەوا نەخشەی توانی گونجاوترە بۆ نواندنی پێدراوەکانی خشتەکە.

ساغبکەوە لەم خاڵە ڕوونکردنەوەییانەدا دیارە کە پێدراوەکانی خشتەکە دەنوێنێت کە نەخشەی گونجاو بۆ نواندنی ئەم پێدراوانە بریتییە لە نەخشەی کەمبووە توانی (دالة تراجع أسّي)



1. نەگۆڕی جیاوازییەکان یان ڕێژەکان بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی نەخشەی بنەڕەتی گونجاو کە کۆمەڵە پێدراوەکان بنوێنێت.

أ

x	12	48	108	192	300
y	10	20	30	40	50

ب

x	21	22	23	24
y	243	324	432	576

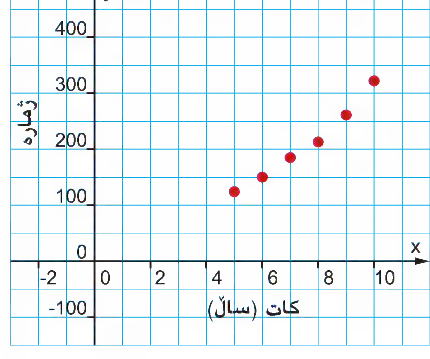
دەگمەنە جیاوازی نێوان پێدراوە ڕاستییەکان یان ڕێژەکەیان نەگۆڕبێت بەواتای بیرکارییانە، بەڵام دەتوانیت جیاوازییەکان یان ڕێژەکانیان شیبکەیتەوە بۆ ئەوەی بزانیت نزیکە لەوەی ببێتە نەگۆڕ. هەروەها دەتوانیت پێدراوە ڕاستییەکان بەخاڵی ڕوونکردنەوەیی بنوێنێت، جۆری نەخشەی گونجاو بۆ نواندنی بناسیتەوە پاشان فەرمانی لێژبوونەوە Regression لە بژمێری ڕونکردنەوەیی بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی ئەو نەخشەی پێدراوەکان بە باشترین شێوە دەنوێنێت.

نموونــــە 2 جێبەجێکردن لەسەر پارێزگاریکردنی ڕەگەز

یەکێك لە زانایەکانی بواری ئاژەڵ پێدراوەکانی لەسەر پەرەپێدانی ژمارەیەك لە گامێشی بوفالو کۆکردەوە لە گەڵە گامێشێك کە لە کێڵگەیەکی سرۆشتی بەرەڵاکرابوون نەخشەیەك بنووسە ئەم کۆمەڵە پێدراوانە بنوێنێت.

کات (ساڵ)	5	6	7	8	9	10
ژمارە	124	150	185	213	261	322

هەنگاوی 1 خاڵی ڕوونکردنەوەیی دروستبکە کە پێدراوەکانی ناو خشتەکە بنوێنێت خاڵە ڕوونکردنەوەییەکان دەریدەخات کە شێوەیەکی دووجا یان شێوەیەکی توانی هەیە



هەنگاوی 2 لە جیاوازییەکان بکۆڵەوە.

ژمارە	124	150	185	213	261	322
جیاوازی یەکەم	26	35	28	48	61	
جیاوازی دووەم	9	−7	20	13		

وادیارە نە جیاوازییەکانی یەکەم و نە جیاوازییەکانی دووەم نەگۆڕنییە.

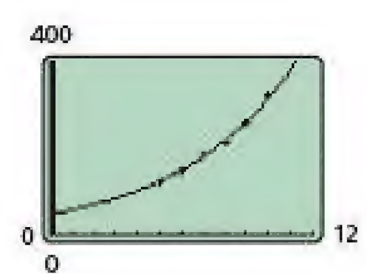
هەنگاوی 3 لە ڕێژەکان بکۆڵەوە.

$\frac{150}{124}=1.210$ $\frac{185}{150}=1.233$ $\frac{213}{185}=1.151$ $\frac{261}{213}=1.225$ $\frac{322}{261}=1.234$

هەموو ڕێژەکان نزیکە لە 1.2، ئەمەش هانمان دەدات لەدوای نموونەیەکی توانی بگەڕێین.

هەنگاوی 4 بژمێری ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی نموونەی توانی





نەخشەی توانی $f(x)=48.581(1.207^x)$ ڕێسایەکە بۆ پێدراوەکانی خشتەکە.

یارمەتی

بۆئەوەی هاوکۆلکەی پەیوەستی r لە شاشەکە دەرکەوێ دوگمەی CATALOG 2nd پاشان 0 دابگرە پاشان **Diagnostic On** هەڵبژێرە.

خاڵی چاودێری

2. نەخشەیەك بنوسە پێدراوەکانی خشتەی خوارەوە بنوێنێت.

x	12	14	16	18	20	22	24
y	110	141	176	215	258	305	356

کاتێك پێدراوەکان ڕیزنەکرابن یان جیاوازی نێوانیان نەگۆڕنەبێت. پێویستە چەند نموونەیەك تاقیبکەیتەوە بۆ دۆزینەوەی ئەوەی باشتر پێدراوەکان دەنوێنێت. لە بژمێری ڕونکردنەوەییدا بەهایەك دەردەکەوێت پێیدەوترێت هاوکۆلکەی دیاریکردن «معامل التحديد» بە r^2هێما کراوە یان هێمای R^2 بۆ دانراوە. هەتاکو هاوکۆلکەکە لە 1 نزیکبێتەوە، ئەوا نموونەی باشترین نواندنی کۆمەڵە پێدراوەکان.

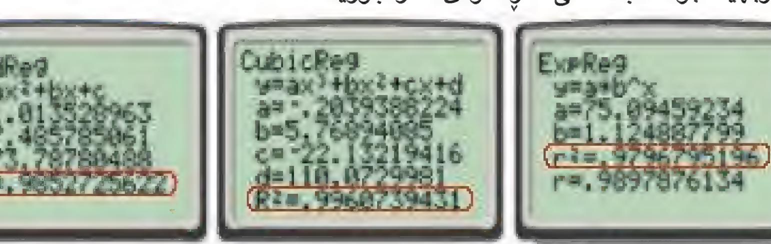
نموونــــــه 3 جێبەجێکردن لەسەر کردارەکانی بانك

لە پێدراوەکانی بەرامبەرت ژمارەکانی ئامێری پارەپێدان (صراف الالي) لە یەکێك لە وولاتەکان ساڵ بەدوای ساڵ پیشاندەدات. نەخشەیەك بنووسە ئەم کۆمەڵە پێدراوانە بنوێنێت بە پشتبەستن بە ساڵی 1990 ساڵی سفر بێت.

لە ژێر بەکارهێناندایە

ساڵ	ژمارەی ئامێر
1999	90
1993	98
1997	159
1999	227
2000	270
2004	370

لەبەرئەوەی جیاوازییەکانی بەهای گۆڕاوی ئازاد نەگۆڕنییە و هەروەها جیاوازییەکانی بەهای گۆڕاوی پەیوەست نەگۆڕنییە، ئەوا ناتوانیت لێکۆڵینەوەی جیاوازییەکان بکەیت. خاڵی ڕوونکردنەوەیی دروستبکە بۆ نواندنی پێدراوەکان بە پشتبەستن بە 1990 بە ساڵی سفرە. لە خاڵە ڕونکردنەوەییەکانەوە دەردەکەوێت کە شێوەیەکی دووجا یان سێجا و یان توانی هەیە. بژمێری ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنە بۆ ئەنجامدانی گەڕانەوەی هەر جۆرێك.



بەراوردبکە لەنێوان بەهاکانی r^2. دیارە نموونەی سێجا باشترینە. دەتوانیت ئەم نەخشە بەکاربهێنیت.

$$f(x)=0.2x^3+5.44x^2-22.13x+110.07$$

نموونەیەکە بۆ دیاریکردنی ژمارەی ئامێرەکان بەپێی ساڵەکانی پاش ساڵی 1990



3. ئەو نەخشە بنووسە کە پێدراوەکانی ئەم نەخشەی خوارەوە دەنوێنێت.

x	11	14	25	31	40	50
y	245	302	480	557	645	705

بیریکەوە و تاوتوێبکە

1. بۆچی بەکارهێنانی جیاوازییەکان و ڕێژەکان لەکاتی ئیش کردن بە پێدراوە راستیەکان بەسنووردار دادەنرێن.

2. ڕێکخەربە ئەم خشتەی خوارەوە دروستبکە و تەواویبکە. ڕوونیبکەوە چۆن هەر ڕێگایەك یارمەتیت دەدات نموونەی گونجاو بۆ نواندنی پێدراوەکان دیاریبکەیت.

فێربە سەرنج بدە

دیاریکردنی نموونە

- جیاوازی و ڕێژە
- خاڵی ڕوونکردنەوە
- هاوکۆلکەی دیارکردن

4-5 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

بڕوانە نموونە 1

جیاوازییەکان و ڕێژەکان بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی ئەو نەخشە بنەڕەتییەی کە باشترین نموونە بۆ ناوئدنی پێدراوەکان پێکدەهێنێت

1

x	y
6	69.6
13	51.4
20	33.2
27	15
34	−3.2
41	−21.4

2

x	y
11	2
47	6
99	10
167	14
251	18
351	22

3

x	y
0	125
1	150
2	180
3	216
4	259.2
5	311.04

بڕوانە نموونە 2

4 خشتەی خوارەوە ڕوونیدەکاتەوە کە بڕی ماوە ماددەی ئایۆدین – 131 بەگرام پاش t ڕۆژ لەدەستکردن بە تاقیکردنەوە.

کات t بەڕۆژەکان	0	1	2	3	4	5	6
بڕکە m بەگرام	1000	917.40	841.62	772.10	708.33	649.82	596.14

أ نەخشەیەك بنووسە پێدراوەکانی خشتەکە بنوێنێت.

ب نەخشەکە بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی ژمارەی ڕۆژەکان بۆ ئەوەی بڕی ئایۆدینی – 131 ماوە لە 50 g کەمترە.

بڕوانە نموونە 3

5 لەم خشتەی خوارەوە ژمارەی پاسکیلەکان لە شوێنی فرۆشتنی پاسکیل لە بیست و چوار مانگی پێشوو دەردەکەوێت.

کات t بەمانگەکان	0	4	9	12	15	20	24
ژمارە	62	54	45	48	55	53	60

أ نەخشەیەك بنووسە پێدراوەکانی خشتەکە بنوێنێت.

ب نەخشەکە بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی ژمارەی پاسکیلەکان لە مانگی شەشەم.

ج ئایا ئامۆژگاری خاوەن دوکانەکە دەکەیت پشت بەم نەخشەیە ببەستێت بۆ پێشبینی کردنی ژمارەی پاسکیلەکانی ناو دوکانەکە پاش ساڵێك لە ئیستاوە؟

ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

ڕاهێنانی ئازاد

شیکارکردنی ڕاهێنان	تەماشای نموونەکە
8-6	1
9	2
10	3

جیاوازییەکان و ڕێژەکان بەکاربهێنە بۆدیاریکردنی نەخشەی بنەڕەتی کە باشترین نموونە بۆ پێدراوەکان پێکدەهێنێت.

6

x	y
1	380
3	343
5	310
7	279
9	252
11	228

7

x	y
2	97
8	202
14	253
20	250
26	193
32	82

8

x	y
4	4
9	6
16	8
25	10
36	12

9 **کشتوکاڵ** یەکێک لە جوتیارەکان تاقیکردنەوەیەکی ئەنجامدا لەسەر بڕی ئەو پەینەی پێویستە لە دۆنمە زەویەکدا بکرێت، بۆ دەستکەوتنی باشترین بەرهەم بۆ ئەم مەبەستە چەند کێڵگەیەکی بەکارهێنا، ئەنجامی تاقیکردنەوەکەی لەم خشتەی خوارەوە تۆمارکرد، نەخشەیەک بنووسە پێدراوەکانی ناو خشتەکە بنوێنێت.

بڕی پەین بۆیەک دۆنم (kg)	45	70	90	115	125	135	150
بڕی بەرهەم بۆیەک دۆنم (ڕیە)	29	60	70	88	84	86	76

10 **زیندەزانی** ئەم خشتەی خوارەوە ژمارەی خەمڵێنراوی جۆرێك لە بەکتریای (إبریشیا کولی) لە دەفرێکی تاقیکردنەوەدا دەنوێنێت پاش 6 خولەك لە دەستپێکردن بە تاقیکردنەوە.

کات t بەخولەك	0	10	20	30	40	50	60
ژمارەی بەکتریاکان	300	423	596	842	1188	1686	2354

أ ڕێسایەك بنووسە کە ژمارەی بەکتریاکان بەپێی کات بنوێنێت. باشترین نواندن بێت.

ب ڕێسایەکە بۆ دۆزینەوەی ژمارەی بەکتریاکان پاش 3 کاتژمێر بەکاربهێنە.

ج چەند کاتی دەوێت بۆئەوەی ژمارەی بەکتریاکان 3 ئەوەندەی ژمارەی سەرەتاکەی لێبێت؟

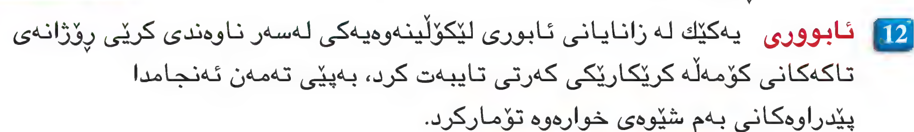
11 **موڵکایەتی** ئەم خشتەیە نرخەکانی ژمارەیەك خانووی فرۆشراو بەپێی ڕووبەرەکەی دەنوێنێت

ڕووبەر (m^2)	248	109	138	233	227	276
نرخ (ملیۆن دینار)	179	125.9	136.75	172.5	169.9	187

أ ڕێسایەك بۆ هەژمارکردنی نرخی خانوو بەپێی ڕووبەرەکەی بدۆزەوە. (ڕووبەر وەك گۆڕاوی ئازاد بەکاربهێنە)

ب ڕێسایەکە بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی ڕووبەری نزیکراوەی خانوویەك نرخەکەی 175 ملیۆن دینار بێت.

ج ئایا باوەڕدەکەیت وەڵامەکەت بۆ لقی (ب) ورد بێت؟ ئەمە ڕوونبکەوە.



12 **ئابووری** یەکێك لە زانایانی ئابوری لێکۆڵینەوەیەکی لەسەر ناوەندی کرێی ڕۆژانەی تاکەکانی کۆمەڵە کرێکارێکی کەرتی تایبەت کرد، بەپێی تەمەن ئەنجامدا پێدراوەکانی بەم شێوەی خوارەوە تۆمارکرد.

تەمەن (ساڵ)	18	28	38	48	58	68
ناوەندی کرێ (دینار)	17 480	30 650	37 440	41 230	37 570	21 390

أ نموونەیەکی گونجاو بۆ نواندنی پێدراوەکانی خشتەکە بدۆزەوە.

ب نموونەیەك بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی ناوەندی کرێی ڕۆژانەی کرێکارێك لەم چەشنە، تەمەنی 43 ساڵ بێت.

13 **تەندروستی** ئەم خشتەی خوارەوە تەمەنی ژنان لە یەکێك لە کۆمەڵگاکان دەنوێنێت کاتێك یەکەم منداڵیان دەبێت.

ساڵ	1980	1985	1990	1995	2000
ناوەندی تەمەنی ژن کاتێك منداڵی یەکەمی دەبێت	22.7	23.7	24.2	24.5	24.9

أ ساڵی 1980 بە ساڵی سفر دابنێ بژمێری ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی نموونەیەکی دووجا و یەکێکیتر سێجا بۆ نواندنی پێدراوەکانی خشتەکە.

ب هەردوو نموونەکە بەکاربێنە بۆ خەملاندنی تەمەنی یەکەم منداڵبوونی ژن لەم کۆمەڵگایەدا لە ساڵی 2010 بخەمڵێنێت.

ج کام خەملاندن بەلای تۆ لە ڕاست نزیکە؟ ئەمە ڕونبکەوە.

دەروازەیەك

مێژووی بیرکاری



زانای بیرکاری فرەنسی لۆجندەر Legendre (1752 – 1833) لە ساڵی 1806 ڕێڕەوی یەکێك لە کلکدارەکانی دۆزییەوە، بەڕێگای وێنە کێشانی چەماوەیەك بەنزیکترین شوێن لە تواناد بێت بڕوات، لە هەندێك لەو شوێنانەی کلکدارەکەی تێدابینراوە.

14 ئەم خشتەیە خوارەوە قەبارەی هەوای گەرم v لە باڵۆن بەپێی پلەی گەرمی بەرگە هەوا t دەنوێنێت.

پلەی گەرمی	37	41	44	47
قەبارە (m^3)	850	934	1027	1130

أ نەخشەیەکی توانی بدۆزەوە پێدراوەکانی خشتەکە بنوێنێت.

ب نەخشەیەك بۆ دیاریکردنی قەبارەی هەوای گەرم لەناو باڵۆنەکە بەکاربهێنە ئەگەر پلەی گەرمی بەرگەهەوا $42^{\circ}C$ بێت.

ج ئایا نەخشەکە گونجاو دەبێت کاتێك پلەی گەرمی لە 47 پلە زیاتربێت؟ هۆیەکەی بڵێ.

15 **کشتوکاڵ** ئەم خشتەی خوارەوە ژمارەی کێڵگەکان لە یەکێك لە وڵاتە گەورەکان و ناوەندە ڕوبەری کێڵگە کە لەسەدەی بیستەم دەنوێنێت.

ساڵ	1910	1930	1950	1969	1987	1997
ژمارەی کێڵگەکان	6.4	6.3	5.4	2.7	2.1	1.9
ناوەندە ڕووبەر (دۆنم)	139	157	216	390	462	487

أ ژمارەی کێڵگەکان وەك گۆڕاوی ئازاد بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی نەخشەیەك بۆ ناوەندە ڕووبەری کێڵگەکە

ب نەخشەکە بەکاربهێنە بۆ خەملاندنی ناوەندە ڕووبەری کێڵگەکە. کاتێك ژمارەی کێڵگەکان دەگاتە 1 ملیۆن

ج نەخشەکە بەکاربێنە بۆ خەملاندنی ناوەندە ڕووبەری کێڵگەکە. کاتێ ژمارەی کێڵگەکان دەبێتە4.5 ملیۆن

16 **بازاڕی دراو** ساڵی 1990 کۆمپانیای هەڵۆی پیشەسازی دامەزرا. ئەم خشتەی خوارەوە هەندێك لە نرخی پشکی (سهم) ئەم کۆمپانیایە دەنوێنێت.

ساڵ	1991	1994	1997	2000	2003
نرخی پشك بە دینار	79 410	96 410	107 260	132 440	151 190

أ نەخشەیەك بۆ نواندنی پێدراوەکانی خشتەکە بدۆزەوە.

ب ڕێژەی سەدی نرخی بەرزبوونەی پشکی کۆمپانیای هەڵۆ لە ساڵێکدا چەندە؟

ج ئەگەر پشکی کۆمپانیای هەڵۆ لە ساڵی 2004 ، 155 520 دینار بێت. ئایا ئەم نرخە دەگونجێت لەگەڵ ئەو نرخەی نەخشەکە دیاردەکات؟ ئەمە ڕوونبکەوە.

د نەخشەکە کە بۆ خەملاندنی ئەو ساڵەی نرخی پشکی کۆمپانیای هەڵۆ دەگاتە 200 000 بەکاربهێنە.

هـ بەهۆی هەڵئاوسان ساڵی 1991 ئەوەی نرخی یەك دیناربوو 1.34بەرز بوو ساڵی 2003 بەراورد بکە لەنێوان بەرزبونەوەی نرخی پشکی کۆمپانیای هەڵۆ و ڕێژەی هەڵئاوسان.

17 **زیندەزانی** ئەم خشتەی خوارەوە ژمارەی جۆرەکانی خشۆکە، لەهەندێك لە دوورگەکانی کاریبی و ڕووبەری ئەو دوورگانە بە میل دووجایە.

ژمارە	11	16	53	45	108	100
ڕووبەر	5	32	3 435	4 244	29 371	44 218



أ نموونەیەك بۆ نواندنی پێدراوەکانی خشتەکە بدۆزەوە، دوای ئەوەی ژمارە بەگۆڕاوی سەربەست دابنرێت

ب هەمان نموونە بەکاربهێنە بۆ خەملاندنی ڕووبەری دوورگەیەك کە 75 جۆر خشۆکی تێدابێت.

ج وردی خەملاندنەکە لە لقی (ب)دا چۆن دەبینیت؟ ئەمە ڕوونبکەوە.

18 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** هەندێك جار وادەردەکەوێت نەخشەی دووجا باشترە لە نەخشەی هێڵی بۆ پێدراوەکان، دەربارەی هاوکۆلکەی a لەڕێسا دووجاکەدا چی دەڵێیت؟

19 **بنووسە** وا دابنێ ڕێسایەکی گونجاوت دۆزییەوە پێدراوەکانی دوو گۆڕاو بنوێنێت. ئایا گەیشتیتە ئەو ئەنجامەی کە پەیوەندییەکی هۆکاری باش هەیە لەنێوان دوو گۆڕاوەکە؟ پشتگیری وەڵامەکەت بەنموونە بکە.

ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە

20 کام لەمانەی خوارەوە لەسەر پێدراوەکانی خشتەی بەرامبەر جێبەجێ دەبێت؟

x	y
3	2
4	23
5	50
6	93
7	122
8	167

(أ) جیاوازییەکانی یەکەم بۆ گۆڕاوی بەستراو نەگۆڕە.
(ب) جیاوازییەکانی دووەم بۆ گۆڕاوی بەستراو نەگۆڕە.
(ج) ڕێژەی بەهای گۆڕاوی پەیوەست نەگۆڕە
(د) ڕێژەی گۆڕاوی ئازاد نەگۆڕە

21 بەهای n چەندە کە ڕێگە بەنواندنی پێدراوەکانی خشتەی بەرامبەر بە ڕێسایەکی توانی ورد دەبێت؟

x	5	6	7
y	16	28	n

(أ) 40
(ب) 49
(ج) 45
(د) 52

22 بەهای n چەندە کە ڕێگە بەنواندنی پێدراوەکانی خشتەی بەرامبەر بە ڕێسایەکی دووجای ورد دەبێت؟

x	5	6	7	8
y	12	32	58	n

(أ) 60
(ب) 70
(ج) 80
(د) 90

بەرەنگاری و فراوانکردن

23 نەخشەی $p(t)=\dfrac{a}{1+be^{-kt}}$ پێی دەوترێت نەخشەی بازاڕی (دالة السوق) لەو بارانەی تێیدا خۆراك یان ڕووبەری زەوی لە بەرامبەر گەشەی کۆمەڵەکان ڕێگرە. دەتوانیت نەخشەی $F(t)=\dfrac{4000}{1+5.7e^{-0.2t}}$ بەکاربهێنیت بۆ دیاریکردنی ژمارەی ماسییەکان لە کێڵگەیەکی بەخێوکردنی ماسی بەپێی ژمارەی ئەو مانگانەی بەسەرچاندنی هێلکە ماسییەکاندا تێدەپەڕێت، کاتێك t ژمارەی مانگەکان بێت.

أ) ژمارەی ماسییەکانی ناوکێڵگە کە پاش 10 مانگ لە چاندنی بخەمڵێنە.
ب) بۆئەوەی ژمارەی ماسییەکان بگاتە 3000 ماسی چەند مانگ دەخایەنێت؟
ج) زۆرترین ژمارەی ماسییەکانی کێڵگەکە بدۆزەوە، ئەگەر نەخشەکە گونجاوبێت بۆ بەکارهێنان.

24 **بژمێری ڕوونکردنەوەیی** دەتوانیت جۆرێکی تر لە شێوەکانی لێژبوونەوە، بە بەکارهێنانی بژمێری ڕوونکردنەوەیی بدۆزیتەوە، ئەویش لێژبوونەوەی هێزە Power Regression. فەرمانی PwrReg لە بژمێری ڕوونکردنەوەییدا بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی نموونەی هێز کە پێدراوەکانی خشتەی بەرامبەر بنوێنێت.

x	1	24	41	74
y	1	4.9	6.4	8.6

پێداچوونەوەی لووپێچی

هەر سستەمێك لەم لاسەنگانە بەشێوەی ڕوونکردنەوەیی بنوێنە (وانەی 3-2)

25 $\begin{cases} y \geq 3x+1 \\ y \leq x-3 \end{cases}$

26 $\begin{cases} y \geq x-8 \\ y \leq -\frac{4}{3}x+\frac{1}{3} \end{cases}$

27 $\begin{cases} y \leq 5x \\ y \geq x+2 \end{cases}$

28 **کار** نەخشەی $p(x)=-x^3+12x^2-12x-80$ ڕێسایەکە، قازانجی یەکێك لە کۆمپانیاکانی بە ملیۆنەها دینار پێ هەژماردەکرێت، کاتێك x ژمارەی یەکە بەرهەمهێنراوەکان بێت (پۆلەکانی پێشوو)

أ سفرەکانی ئەم نەخشەیە بدۆزەوە.

ب کام لە سفرەکانی نەخشەکە ژمارەی یەکە بەرهەمهێنراوەکان دەنوێنێت، کە وا لە کۆمپانیاکە بکات لە زەرەرەوە بۆ قازانج بچێت.

ئاوێتەکردنی نەخشەکان بەکاربهێنە بۆ بڕیاردان لەسەرئەوەی نەخشەی g پێچەوانەی نەخشەی f دەبێت. (وانەی 5-4)

29 $f(x)=x^2+1$ ؛ $g(x)=\sqrt{x}+1$

30 $f(x)=-4+5x$ ؛ $g(x)=\frac{1}{5}x+\frac{4}{5}$

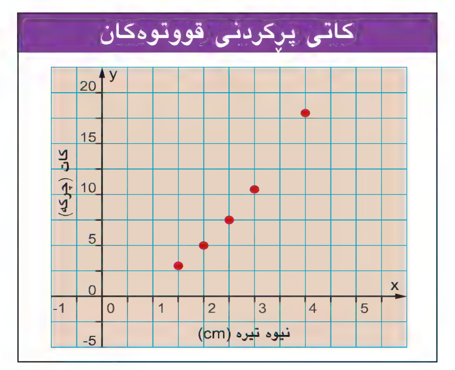
بەشی 5
ڕێبەری خوێندن: پێداچوونەوە

1 سەرۆکی شارەوانی پاش بارینی بەفرێکی زۆر گرنگی بە پاککردنەوەی شەقامەکان دەدات. ئەم خشتە تێچوونی پاککردنەوە ڕووبەری جیاوازی شەقامەکان دەنوێنێت. وێنەی ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنە و هاوکێشەیەك بنووسە بۆ هەژمارکردنی تێچوونی پاککردنەوەی شەقامێك درێژییەکەی 2400 m بێت.

درێژی شەقام بەمەتر	تێچوون بەدینار
300	6950
600	8900
900	10 850
1200	12 800

2 یانەی ڕۆشنبیری سلێمانی نەخشە دادەڕێژێت ئاهەنگی ڕێزلێنان بۆ دامەزرێنەرانی ئەنجام بدات ڕێکخەری ئاهەنگەکە بڕیاریدا بۆ میوانەکان بە 4 دەفر پێشکەش بکات و هەریەکەیان 30 پارچە شیرینی تێدابوو، دوای ئەوە 4 پارچە شیرینی بۆ هەر میوانێك زیادکرا، خشتەیەك دروستبکە و وێنەی ڕوونکردنەوەیی بکێشە و هاوکێشەیەك بۆ نواندنی ئەم بارە بنووسە ژمارەی میوانەکان بە گۆڕاوی ئازاد دابنێ.

3 ئەم خاڵە ڕوونکردنەوەییانە پێدراوەکانی کاتی پێویست بۆ پڕکردنی ژمارەیەك قووتو لوولەکی بەپێی نیوە تیرەی بنکەکە بوێنێت.



أ خشتەیەك دروستبکە و هاوکێشەیەك بنووسە پێدراوەکان بنوێنێت.

ب ئەو هاوکێشەی پێشوو بۆ خەمڵاندنی کات بەکاربهێنە، کە پێویستە بۆ پڕکردنی قووتویەك نیوە تیرەی بنکەکەی $12cm$ بێت.

4 بەهای نەخشەکە بدۆزەوە $f(x)=\begin{cases}5x+2 & x\le 1\\ x^2-6 & x>1\end{cases}$ کاتێك $x=-2$ و $x=5$

5 وێنەی ڕوونکردنەوەی ئەم نەخشە بکێشە.

$$f(x)=\begin{cases}2x+4 & x<-2\\ -3x+2 & x\ge -2\end{cases}$$

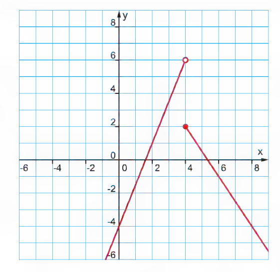
6 بەهای نەخشەکە بدۆزەوە $f(x)=\begin{cases}\sqrt{5x+9} & x\ge 4\\ 9-7x & x<4\end{cases}$ کاتێك $x=-6$ و $x=10$

وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە.

7 $f(x)=\begin{cases}2x-4 & x<0\\ 5 & x\ge 0\end{cases}$

8 $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x-1 & x\le 2\\ \sqrt{x+2} & x>2\end{cases}$

9 نەخشەیەکی پەلدار بۆئەم ڕوونکردنەوە بنووسە.



10 کۆمپانیایەکی پۆست و گواستنەوە 6000 دینار بۆهەر نێرراوێك وەردەگرێت کە بارستایی لە $8\ kg$ زیاتر نەبێت، و بۆهەر کیلۆگرامێکی زیادە 1500 دینار وەردەگرێت. نەخشەیەکی پەلدار بنووسە بۆ ئەو پارەی وەریدەگرێت بۆ نێرراوێك بارستایی لە $18\ kg$ زیاتر نەبێت.

11 $g(x)$ نەخشەی پەیدابوو لە جیگۆڕکێی نەخشەی $f(x)=\begin{cases}2x-2 & x\le 3\\ -4x+16 & x>3\end{cases}$ بە ڕاکێشانی دوو یەکە بۆلای چەپ. هاوکێشەی نەخشەی $g(x)$ بنووسە.

12 نەخشەی $h(x)$ بنووسە کە پەیدابووە لە ڕاکێشانی $f(x)=\begin{cases}2x-2 & x\le 3\\ -4x+16 & x>3\end{cases}$ دوو یەکە بۆ سەرەوە

13 نەخشەی $g(x)$ بنووسە پەیدابووە لە ڕاکێشانی $f(x)=\begin{cases}3x+2 & x\le 0\\ x^2 & x>0\end{cases}$ 7 یەکە بۆ لای ڕاست.

14 وێنەی ڕوونکردنەوەیی $g(x)=f\left(\frac{1}{2}x\right)+1$ بکێشە ئەگەر بزانیت $f(x)=2x^2+1$

15 $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$ بدۆزەوە، ئەگەر زانیت $f(x)=x+3$ و $g(x)=x^2-9$

16 $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$ بدۆزەوە، ئەگەر زانیت $f(x)=x+6$ و $g(x)=\frac{18}{x+4}$ بواری $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$ دیاربیکە.

نەخشەیەك بنووسە كاتێك $f(x)=x^2-5x-14$ ، $g(x)=x-7$

17 $(f+g)(x)$

18 $(f-g)(x)$

19 $(g-f)(x)$

20 $(f\,g)(x)$

21 $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

22 $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$

هەریەکە لەمانەی خوارەوە بدۆزەوە ئەگەر زانیت $f(x)=x-2$ و $g(x)=\frac{8}{x+1}$

23 $f(g(-2))$ و $g(f(-2))$

24 $f(g(1))$ و $g(f(1))$

25 $g(f(x))$ و بوارەکەی

26 $f(g(x))$ و بوارەکەی

27 یەكێك لە كۆمپانیاكانی فڕۆكەوانی بڕیاری زیادكردنی 30 000 دیناریدا، بۆنرخی هەربلیتێك بە لەبەرچاوگرتنی بەرزبوونەوەی نرخی سووتەمەنییەكان لەسەر كۆمپانیاكە پێویستە 9% باجی فڕۆكەخانە بخاتە سەر نرخی بلیتەكە، نەخشەیەكی ئاوێتە بنووسە، نرخی نوێ بۆ بلیتێك بنوێنێت، كاتێك نرخەكەی x دینار بێت، پێش ئەوەی نرخی سووتەمەنی و باج زیادبكرێت.

28 ئەم خشتەیە زیادبوونی نرخی بلیتی چوونە ژوورەوەی باخچەی ئاژەڵان و پەیوەندی لەگەڵ ساڵانی پێشوو لە دامەزراندنیەوە دەنوێنێت. لە جیاوازییەكان و ڕێژەكان بكۆڵەوە بۆ دیاریكردنی كام پەیوەندی گونجاوترە بۆ نواندنی پێدراوەكانی خشتەكە. بژمێرە ڕوونكردنەوەیی بۆ دۆزینەوەی پەیوەندییەكە بەكاربهێنە.

نرخی بلیتی باخچەی ئاژەڵان	
ژمارەی ساڵەكان	نرخ (بەدینار)
1	9500
2	10 250
3	11 100
4	12 000
5	12 920

29 ئەم خشتەیە بەكارهێنانی ئاو بۆ دانیشتوانی یەكێك لە شارەكان بەپێی پلەی گەرمی نیشان دەدات.

پلەی گەرمی (سەدی)	بەكارهێنانی ئاو (m^3)
12	269 899
15	297 912
18	328 952
21	363 110
24	401 122
27	442 893

أ پەیوەندییەك بدۆزەوە ئەم پێدراوانە بەنزیكەیی بنوێنێت

ب پەیوەندییەكە بۆ خەملاندنی بەكارهێنانی ئاو بەكاربهێنە، كاتێك پلەی گەرمی $30\ ^\circ C$ بێت.

ج ئەگەر بەكارهێنانی ئاو لە یەكێك لە ڕۆژەكاندا $189\ 270\ m^3$ بێت، پلەی گەرمی لەو ڕۆژەدا چەندە؟

بەشی 5



تاقیکردنەوەی بەش

1 ژیار لە یەکێك لە سوپەر مارکێتەکاندا بە فرۆشیار دامەزرا، مانگی 300 000 دینار وەردەگرێت، و 3% کۆی ئەو شتانەی دەیفرۆشێت دەخرێتە سەر مانگانەکەی، ئەوەی ژیار وەریدەگرێت بە خشتە و وێنەی ڕوونکردنەوەیی و هاوکێشە بنوێنە، ئەگەر بزانیت فرۆشراوەکانی لەنێوان 0 و 10 000 000 دینار بێت

2 زانا لەسەر تاشە بەردێکی بەرز ڕاوەستابوو، بەشەق لە بەردێکی هەڵدا بۆ خوارەوە. ئەم خشتە بێدراوەکانی بەرزی بەردەکە پاش چەند چرکەیەك لە هەڵدانی دەنوێنێت.

أ) وێنەی ڕوونکردنەوەیی و هاوکێشەکەی دروستبکە، بەرزی بەردەکە بەپێی کات وەك گۆڕاوێکی ئازاد بنوێنێت.

ب) بەرزی گاشەبەردەکە چەندە؟

ج) بەرزی بەردەکە پاش 10 چرکە چەندە؟

د) پاش چەند چرکە بەردەکە بەرزەوی دەکەوێت؟

کات (s)	بەرزی (m)
1	615.1
2	600.4
3	575.9
4	541.6
5	497.5
6	443.6

وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە.

3 $f(x)=\begin{cases}-x-3 & x<1\\ 2x-6 & x\geq 1\end{cases}$

4 $f(x)=\begin{cases}5 & x<-2\\ -x^2-4x & x\geq -2\end{cases}$

بە زانینی $f(x)$ وێنەی ڕوونکردنەوەیی $g(x)$ بکێشە.

5 $f(x)=2x-4$ و $g(x)=-\frac{1}{2}f(x)-1$

6 $f(x)=x^2-2$ و $g(x)=-f(x+2)$

هەر نەخشەیەك یان بەهایەك بدۆزەوە، ئەگەر بزانیت کە $f(x)=4x^2-9$ و $g(x)=2x+3$

7 $(f-g)(4)$

8 $g(f(3))$

9 $(fg)(5)$

10 $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$

11 زێڕینگەرێك 10% باجی هەر پارچە خشڵێك دەدات، وەك باجی زامنکردن و نرخی 150%ی تێچوونی گشتی دەیفرۆشێت. نەخشەیەکی ئاوێتە بنووسە نرخی تێچوونی بنەڕەتی بە c دینار بنوێنێت.

12 ئەم خشتەی خوارەوە پێدراوەکانی نرخی ژمارەیەك لە خانوو دوورییەکانیان لە ناوەڕاستی شارەوە دەنوێنێت.

أ) نەخشەیەك بدۆزەوە پەیوەندییەك بێت بۆ لێکۆڵینەوەی نرخی خانوو p بە پێی دووری d لە ناوەڕاستی شار بنوێنێت.

ب) ئەو نەخشەی دۆزیتەوە بەکاربیهێنە بۆ خەملاندنی تیێکڕای نرخی خانوویەك، کە $20\ km$ لە ناوەڕاستی شارەوە دوورە.

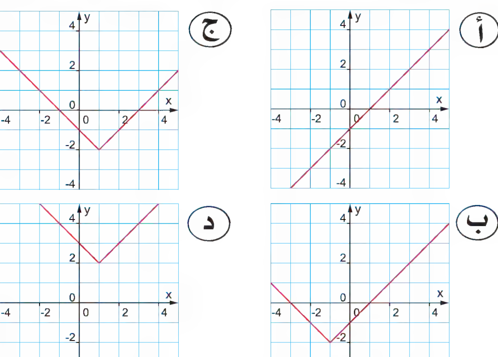
نرخی خانووەکان	
دووری لە ناوەڕاستی شار (km)	تێکڕای نرخ (دینار)
2	118 496 000
4	109 016 000
6	100 295 000
8	92 271 000
10	84 890 000
12	78 098 000

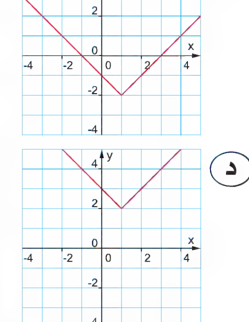
بەشی 5

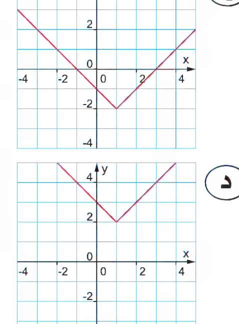
تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

هەڵبژاردن لە زۆر

1 کام ڕوونکردنەوە نەخشە $f(x)=|x+1|-2$ دەنوێنێت

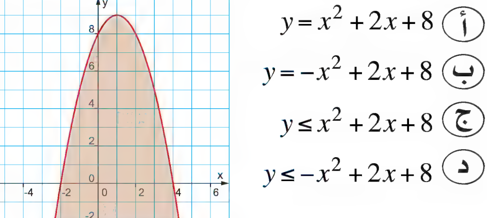






أ ب ج د

2 کام وێنە ڕوونکردنەوەییە بۆ کام نەخشە یان لاسەنگە لەمانەی خوارەوە باشترین نواندنە



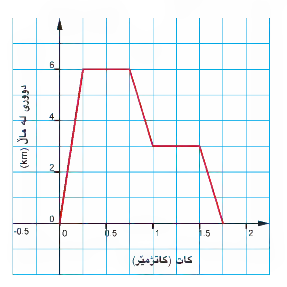
أ) $y=x^2+2x+8$

ب) $y=-x^2+2x+8$

ج) $y\le x^2+2x+8$

د) $y\le -x^2+2x+8$

3 ئەم وینە ڕوونکردنەوەییە بۆ کام لەمانەی خوارەوە باشترین نواندنە.



أ) شێرکۆ بەسواری پاسکیل تا گەیشتە کتێبخانە 6 km ی بڕی، کاتژمێرێکی لە کتێبخانە بەسەر برد، پاشان بۆ ماڵ گەڕایەوە.

ب) شێرکۆ بە سواری پاسکیل تا گەیشتە کتێبخانە 6 km بڕی، نیو کاتژمێر لە کتێبخانە مایەوە، پاش ئەوە بۆ دوکانی فرۆشتنی کاسێتی ڤیدیۆ چوو و نیو کاتژمێری پێچوو، پاش ئەوە بۆ ماڵ گەڕایەوە.

ج) شێرکۆ بە سواری پاسکیل تا گەیشتە کتێبخانە 3 km ی بڕی، لەوێ نیوکاتژمێری خایاند، پاش ئەوە 3 km بڕی بۆ چوونی بۆ دوکانی فرۆشتنی کاسێتی ڤیدیۆ، دوای ئەوە گەڕایەوە ماڵ.

د) شێرکۆ بە سواری باسکیل تا گەیشتە کتێبخانە 6 km ی بڕی، لەوێ نیوکاتژمێری خایاند، پاش ئەوە 3 km ی بڕی بۆ چوونی بۆ دوکانی فرۆشتنی کاسێتی ڤیدیۆ لەوێ کاتژمێرێکی خایاند.

4 بەهای $f(x)=\begin{cases}x^2+4x-8 & x<-1\\ x^3-x^2+5 & x\ge -1\end{cases}$ چەندە؟ کاتێك $x=-1$

أ) -13 ب) -11 ج) 3 د) 5

5 کام لەمانە کۆمەڵە شیکاری $\sqrt{2x-4}=x-6$ ـە؟

أ) $\{10\}$ ج) $\{2, 20\}$

ب) $\{4, 10\}$ د) $\{2, 12\}$

6 کام لەمانە بریتییە لە نەخشەی $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ کاتێك $f(x)=2x^2-7x-30$ و $g(x)=x-6$ ؟

أ) $2x-5$ ج) $\frac{(2x-5)(x+6)}{x-6}$

ب) $2x+5$ د) $\frac{(2x-10)(9x+3)}{x-6}$

7 کام جێگۆڕکێ لەمانە وێنەیە بۆ سێگۆشەیەك یەکێك لە سەرەکانی $(-2, 1)$ بێت؟

أ) وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری یەکەم

ب) وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری دووەم

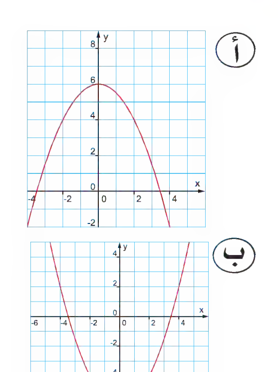
ج) ڕاکێشانی 3 یەکە بۆلای چەپ، 3 یەکە بۆ سەرەوە.

د) خولانەوە بەدەوری خاڵی بنەڕەت بە گۆشەی 180°

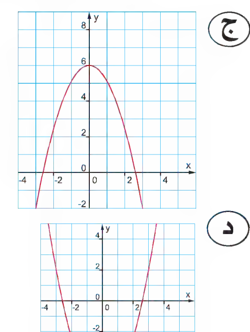
8 کام لەمانە هێلکاری ڕوونکردنەوەی نەخشەی

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6$

أ



ج



ب

د

کورتە وەڵام

9 بەهای بڕی $\log_4 256^3$ چەندە؟

10 بەهای c لە $4(5i-2)+3=2(10i+c)-7$ چەندە؟

11 بەهای بدۆزەوە کاتێك $x = 5$

$$\left(\frac{x^2+5x-36}{2x^2-10x+8}\right)\left(\frac{x^2+x-2}{x^2+11x+18}\right)$$

کورتە وەڵام

12 $f(x)=x^2+1$

أ پێچەوانەی نەخشەکە بدۆزەوە.

ب وێنەی ڕوونکردنەوەیی $f(x)=x^2+1$ و پێچەوانەکەی بکێشە.

ج ڕوونبکەوە ئایا پێچەوانەی نەخشەکە، نەخشەیە یان نا.

13 ئەم خاڵانە بەکاربهێنە $(0, 6)$، $(2, 2)$، $(5, 11)$.

أ نەخشەیەکی دووجا بنووسە کە ڕونکردنەوەکەی بەو سێ خاڵەدا بڕوات.

ب بەشێوەی جەبری ساغبکەوە کە ڕوونکردنەوەیی نەخشەی نووسیوتە بەهەریەکە لەو خاڵانەدا دەڕوات.

ج وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە.

د $f(7)$ و $f(-7)$ بدۆزەوە.

14 $f(x)=x^2-4$

أ دوو جیگۆڕکیٚ بدۆزەوە، نەخشەکە دەگۆڕن بە شێوەیەك سەری نەخشەی $(1, 4)$ دابێت.

ب دوو جیگۆڕکیٚ بدۆزەوە نەخشەکە دەگۆڕن بە شێوەیەك وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی پەیدابوو بە $(0, 2)$ و $(-4, 2)$ دا دەڕوات.

درێژە وەڵام

15 ئاوات تانکی ئۆتۆمبیلەکەی بەسوتەمەنی پڕکرد بۆ گەشتێك ڕۆیشت. ئەم خشتە پێدراوەکانی بڕی سوتەمەنی ماوە لە تانکی ئۆتۆمبیلەکە بەپێی ئەو ماوەی ئۆتۆمبیلەکە دەیبڕێت دەردەخات.

دووری (بەمیل)	0	50	100	150	200
بڕی سوتەمەنی (بەگالۆن)	10	8	6	4	2

أ نەگۆڕی جیاوازییەکان یان ڕێژەکان بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی نەخشەی بنەڕەتی، بڕی سوتەمەنی ماوە لە تانکی ئۆتۆمبیلەکەدا.

ب نموونەیەکی بیرکای بنووسە کە پێدراوەکانی خشتەکە بنوێنێت.

ج دوای بڕینی 75 میل چەند گالۆن سوتەمەنی پیٚ ماوە؟

د ئایا ئۆتۆمبیلەکە دەتوانێت 300 میل بڕوات بەبیٚ وەرگرتنی سوتەمەنی نویٚ؟

هـ پێچەوانەی نەخشەکە بدۆزەوە. ڕونبکەوە چی دەنوێنێت.

بەشی

6

یەکبەدوای یەکەکان و زنجیرەکان
Sequences and Series

بەشی شەشەم

وانەکان

لاکێشەی زێرین

یەکبەدوای یەکی فیبوناتشی پەیوەندی بە ئەندازە و هونەر و تەلارسازییەوە هەیە ئەو پەیوەندییانە بە بەکارهێنانی لاکێشە زێرینەکان دۆزرایەوە.

ئایا تۆ ئامادەیت؟

زاراوەکان

زاراوەکە بەو پێناسەیەی لەلای چەپەوە هاتووە ببەستەوە.

1 نەخشەی توانی
2 نەخشە
3 نەخشەی هێڵی
4 نەخشەی دووجا

أ پەیوەندی نێوان دوو گۆڕاوە بە جۆرێك هەر بەهایەك لە گۆڕاوی یەکەم بەرامبەر تاکە بەهایەکی گۆڕاوی دووەمە.
ب نەخشەیەکە روونکردنەوەکەی ڕاستەهێڵە.
ج نەخشەیەکە ڕێسایەکەی ڕێژەی دوو ڕادەییە.
د نەخشەیەکە هاوکێشەکەی بریتییە $f(x)=ax^2+bx+c$ کاتێك $a\neq 0$
هـ نەخشەیەکە هاوکێشەکەی بریتییە لە $f(x)=ab^x$ و $a\neq 0$ و $b\neq 1$ و $b>0$

نووسینی برە ڕەگەکییەکان بەسادەترین شێوە.

برەکە بەسادەترین شێوە بنووسە.

5 $\sqrt{25}\times\sqrt{36}$
6 $\sqrt{121}-\sqrt{81}$
7 $\sqrt{\frac{1}{49}}$
8 $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{64}}$

هەژمارکردنی هێزەکان

بەهای هەر برێك هەژماربکە.

9 $(-3)^3$
10 $(-5)^4$
11 $1-(-2^3)^3$
12 $\frac{2^2\times 2^7}{(2^2)^5}$

شیکارکردنی هاوکێشە بەپێی گۆڕاوێك

x بەپێی گۆڕاوەکانی تر هەژماربکە.

13 $y=12x-5$
14 $y=-\frac{x}{3}+1$
15 $y=-9+x^2$
16 $y=-4(x^2-9)$

هەژمارکردنی بەهای برەکان

بەهای برەکە هەژماربکە کاتێك $x=2$ و $y=12$ و $z=24$

17 $\frac{y(y+1)}{3x}$
18 $z+(y-1)x$
19 $y\left(\frac{x+z}{2}\right)$
20 $z\left(\frac{1-y}{1-x}\right)$

دژە نموونەکان

دژە نموونەیەك بدۆزەوە کە ناڕاستی دەستەواژەکە پیشان بدات.

21 $n^2=n$ کاتێك n ژمارەیەکی ڕاستییە.
22 $n^3\geq n^2\geq n$، n ژمارەیەکی ڕاستییە.
23 $\frac{1}{n}>\frac{1}{n^2}$ کاتێك n ژمارەیەکی ڕاستییە.
24 $\frac{2}{n}\neq\frac{n}{2}$ کاتێك n ژمارەیەکی ڕاستییە.

بەشی 6

ڕێبەری خوێندن: تێڕوانین لەسەر بەشەکە

لە ڕابردوودا

خوێندووتە

- کۆمەڵەکانی ژمارەکان لەوانە ژمارە سروشتییەکان و ژمارە دووجاکان.
- بەکارهێنانی شێوازەکانی جیاوازی و ڕێژە بۆ پۆلێنکردنی پێدراوەکان.
- کێشانی وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشە هێڵییەکان و نەخشە توانییەکان و هەژمارکردنی بەهایەکانیان.

لەم بەشەدا

لەمەودوا فێردەبیت

- چەند شێوازێك لە ژمارەکان کە پێیان دەوترێت یەکبەدوای یەکەکان و سەرجەمەکانیان و پێیان دەگوترێت زنجیرەکان.
- جیاکردنەوەی یەکبەدوای یەك کە ژمارەییە یان ئەندازەییە.
- چۆنیەتی نووسین و هەژمارکردنی بەهایەکانی یەکبەدوای یەکەکان و زنجیرەکان.

لە داهاتوودا

دەتوانیت کارامەیییەکانی ئەم بەشە بەکاربێنیت

- لە قۆناغی بەرزتردا و لەکاتی خوێندنی جیاکاری و تەواوکارییدا.
- لە وانەکانی فیزیا. بۆ دۆزینەوەی ڕێسای وەك بەرزبوونەوە یەکبەدوای یەکەکانی تۆپێك کە بەر زەوی دەکەوێت.
- لەژیانی ڕۆژانەدا بۆ هەژمارکردنی بەکارخستنی گەشەی دارایی.

زاراوەکان — Vocabulary

زاراوەکان	Vocabulary
یەکبەدوای یەکەکان	Sequence (Progressions)
یەکبەدوای یەکی لێکنزیکبوو	Convergent sequence
یەکبەدوای یەکی لێك دوورکەوتوو	Divergent sequence
پێناسەی ڕاگەیەنراو	Explicit definition
یەکبەدوای یەکی دوا هاتوو	Finite sequence
یەکبەدوای یەکی دوا نەهاتوو	Infinite sequence
دووبارەبوونەوە	Iteration
ئامانج	Limit
پێناسەی نادیار	Recursive definition
زنجیرە	Series
ڕادەی زنجیرەکە	Term of a sequence

ڕۆشناییەك لەسەر زاراوەکان

بۆئەوەی لەگەڵ زاراوەکانی ئەم بەشەدا ڕابێی. ئەم هەنگاوانەی خوارەوە پەیرەو بکە:

1. لە ژیانی ڕۆژانەتدا وشەی **یەکبەدوای یەك** چی دەگەیەنێت؟ یەکبەدوای یەکی ژمارەیی چی دەگەیەنێت؟

2. وشەی دوا هاتوو مانای کۆتایی بوون دەگەیەنێت. چەند نموونەیەك بهێنەوە وشەی **دوا هاتووی** تێدا بەکارهاتبێت. یەکبەدوای یەکی دوا هاتوو چ مانایەك دەبەخشێت ڕونیبکەوە.

3. پاڵپشت بەمانای وشەی کۆتایی چەند نموونەیەك بێنەوە لە ڕستەدا کە وشەی دوانەهاتوو تێدا بەکارهاتبێت. ئەوەندەی لەتوانادایە **یەکبەدوای یەکی دوا نەهاتوو** ڕوونبکاتەوە.

4. وشەی زنجیرە لە تەلەفزیۆندا چی دەگەیەنێت؟ هەروەها وشەی **زنجیرە** لە بیرکاریدا چی دەگەیەنێت؟

5. ڕادە لە ڕادەدارەکاندا چی دەگەیەنێت پاشان باسی **ڕادەی یەکبەدوای یەك** بکە.





ستراتیژی خوێندنەوە: بەڵگەیەکی باوەڕپێکراو بەکاربهێنە

بۆئەوەی بتوانیت بەڵگەیەکی باوەڕپیکراو بنووسی پەیوەندی بە چەمکێك لە چەمکەکانی بیرکارییەوە هەبێت، واتە تۆ باش لەوە تێگەیشتوویت کە باسی دەکەیت. دەتوانیت بۆ نووسین ئەم بەڵگەیە ڕێگایەك لە چوار هەنگاو پێکهاتبێت بەکاربێنیت بۆ نووسینی ئەم بەڵگەیە. هەروەك لە شیکارکردنی نموونەکەی خوارەوەدا ڕوونکراوەتەوە.

لە کتێبی پۆلی دەیەمەوە

بنووسە جیاوازی نێوان ئەگەری تیۆری و ئەگەری پراکتیکی ڕوونبکەوە، نموونەیەك بینەوە کە تێیدا جیاوازبن.

هەنگاوی 1 ئامانجەکە دیاریبکە

ئامانج ڕوونکردنەوەی جیاوازییە لەنێوان ئەگەری تیۆری و ئەگەری پراکتیکیدا.

هەنگاوی 2 ڕستەیەك بنووسە پاسادانی ئامانجەکە بکات

ئەگەری تیۆری پشت بەبیرکاری دەبەستێت بەڵام پراکتیکی پشت بە ئەنجامی تاقیکردنەوە دەبەستێت

هەنگاوی 3 نموونە بهێنەوە پاڵپشتی وەڵامەکەت بکات

کاتێك پارچە پارەیەکی کانزایی هەڵدەدەیت ئەگەری دەستکەوتنی خەت دەکاتە (ژمارەی ئەو جارانەی پاسادانی ڕووداوەکە دەکەن) / (ژمارەی هەموو ئەنجامەکان) واتە $\frac{1}{2}$

بەڵام ئەگەری پراکتیکی بۆ دەستکەوتنی خەت دەکاتە (ژمارەی ئەو جارانەی خەتی تێدا دەرکەوتووە) / (ژمارەی ئەو جارانەی پارچە پارەکەی تێداهەڵدراوە)

ئەگەر تەنها یەکجار پارەیەکمان هەڵدا ئەوا شێر یان خەتمان دەستدەکەوێت. ئەگەری پراکتیکی بۆ دەستکەوتنی خەت دەکاتە 1 (کاتێك خەتمان دەستدەکەوێت) یان 0 (کاتێك شێرمان دەستدەکەوێت)، بەڵام ئەگەری تیۆری بۆ دەستکەوتنی خەت هەر $\frac{1}{2}$ دەمێنێتەوە.

هەنگاوی 4 بەڵگەکەت پوختەبکە

لەبەرئەوەی ئەگەری تیۆری تەنها پشت بە ژمارەی ئەنجامە تیۆرییەکان دەبەستێت. بۆیە هەرگیز ناگۆڕێت. بەڵام ئەگەری پراکتیکی پشت بە ئەنجامە تاقیکردنەوەییەکان دەبەستێت. ئەوەش وای لێدەکات لەهەر هەڵدانێکدا بگۆڕێت.

هەوڵبدە

بۆ وەڵامدانەوەی ئەم دوو پرسیارە چوار هەنگاوەکان بەکاربهێنە.

1. بەردە زارێك 20 جار هەڵدرا و ژمارە 3 دووجار دەرکەوت. دەبێت بەلایەنی کەمەوە چەندجار زارەکە هەڵبدرێت بۆئەوەی ئەگەری تیۆری و پراکتیکی یەکسانبن لە ڕووداوی دەستکەوتنی ژمارە 3 دا؟ ڕوونیبکەوە چۆن گەیشتیتە ئەو وەڵامە.
2. باوکی هۆشیار دەیەوێت کوڕەکەی بۆ خوێندنگایەکی نوێ ببات، 9 خوێندنگای دیاریکرد تا سەردانیان بکات بڕیاریدا لە هەفتەی داهاتوودا سەردانی 3 یان 4 خوێندنگا بکات. ژمارەی ڕێگاکانی سەردانی 4 خوێندنگاکە. چەندی زیاترە لە ژمارەی ڕێگاکانی سەردانی 3 خوێندنگاکە. وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

1–6 یەکبەدواییەکەکان و زنجیرەکان
Sequences and Series

ئامانجەکان

- ڕادەی n لەیەکبەدوای یەکدا دەدۆزێتەوە.
- ڕێسای یەکبەدوای یەك دەنووسێت.
- سەرجەم دەدۆزێتەوەو دەنووسێت بەبەکارهێنانی هێمای بەیەکتربەستن (التجميع)

زاراوەکان Vocabulary

یەکبەدوای یەك (متتالية) Sequence

ڕادەی یەکبەدوای یەك Term of a sequence

یەکبەدوای یەکی دوانەهاتوو Infinite sequence

یەکبەدوای یەکی دوا هاتوو Finite sequence

پێناسەی دیار Explicit definition

دووبارەبوونەوە Iteration

پێناسەی نادیار Recursive definition

زنجیرە Series

بەشە سەرجەمی partid sum

هێمای بەیەکبەستن Summation Symbol

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

یەکبەدوای یەکەکان بۆ دانانی ئەو نموونانەی ئامانجیان خوێندنی زۆربەی ڕووداوە سروشتییەکانە بەکاردێت. وەك گۆڕان لە ژمارەی کۆمەڵێك کەروێشك بە تێپەڕبوونی کات.

زانای بیرکاری ئیتاڵی لیۆناردۆ فیبۆناتشی ساڵی1201 ز، ئەو زاوزێ خێرایەی لە ژمارەیەك کەروێشکدا کە لە بارێکی نموونەییدا دەژیان باسکرد. فیبۆناتشی ژمارەی جووتە کەروێشکەکانی مانگ بە مانگ تۆمارکرد. بۆی دەرکەوت ئەو ژمارانە پەیڕەوی شێوازێك دەکەن لەدواییدا بە **یەکبەدوای یەکی فیبۆناتشی** ناونرا.

یەکبەدواییەك Sequence کۆمەڵە ژمارەیەکی ڕیزکراوە، هەریەکە لەو ژمارانە **ڕادەیەکە Term** لە ڕادەکانی یەکبەدوای یەکەکە. دەگونجێت یەکبەدوای یەکەکە **دوا نەهاتوو Infinite** بێت، واتە لە ژمارەیەکی دوا نەهاتوو ڕادە پێکبێت، هەروەك یەکبەدوای یەکی ژمارە سروشتییەکان. یان **یەکبەدوای یەکی دوا هاتوو Finite sequence** بێت، واتە لە ژمارەیەکی کۆتایی هاتوو ڕادە پێکبێت وەك 4، 3، 2، 1 . ئەمەش ئەوە دەردەخات کە یەکبەدوای یەك نەخشەیەکە بوارەکەی ژمارە سروشتییە یەك لەدوای یەکەکانە. و مەوداکەی بریتییە لە کۆمەڵەی ئەو ژمارانەی ڕادەکان پێکدەهێنێت.

بیرکاری زانەکان a_n لەجیاتی نووسینی شێوە نەخشەیی $a(n)$ بەکاردێنن ژمارەی سروشتی n پێی دەوترێت خانەی ڕادەکە، ڕادەی یەکەم بریتییە لە a_1 ڕادەی دووەم بریتییە لە a_2 بەڵام ئەو ڕادەیەی خانەکەی n بێت بریتییە لە a_n (ڕادەی n ی **nth term**). لەبەرئەوەی یەکبەدوای یەك نەخشەیەکە بۆیە هەرخانەیەکی n بەرامبەر تەنها ڕادەیەکە بریتییە لە a_n .

بوار	5	4	3	2	1	n	خانەی ڕادەکە
مەودا	5	3	2	1	1	a_n	ڕادەکە

لە یەکبەدوای یەکی فیبۆناتشیدا، هەریەکە لە ڕادەی یەکەم و دووەم یەکسانە بە 1 بەڵام هەر ڕادەیەك لە ڕادەکانی تر یەکسانە بەکۆی ئەو دوو ڕادەیەی کە ڕاستەوخۆ پێش ئەو هاتوون بە واتایەکی تر $a_1 = 1$ ،$a_2 = 1$ ،$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ کاتێك $n \ge 3$. بەم جۆرە پێناسەیە دەوترێت **پێناسەی نادیار** **Recursive definition** لە پێناسەی نادیاردا ڕادەیەك یان چەند ڕادەیەکی پێشوو بۆ دروستکردنی ڕادەیەکی دوای ئەو بەکاردێت.

نموونــــە 1 دۆزینەوەی ڕادەکانی یەکبەدوای یەك بەبەکارهێنانی نەخشەی نادیار. (شاراوە)

پێنج ڕادەی یەکەمی ئەو یەکبەدوای یەکە بدۆزەوە کە بەپێناسەی نادیار ناسێنراوە $a_1 = 5$ ، $a_n = 2a_{n-1} + 1$

ڕادەی یەکەم دراوە

بۆ دۆزینەوەی a_2 بەهای a_1 دابنێوە، بەهەمان شێوە بەردەوام بە لەدانانی بەهای هەر ڕادەیەك بۆ دۆزینەوەی ڕادەی دوای خۆی.

n	$2a_{n-1} + 1$	a_n
1	دراو	5
2	$2(5)+1$	11
3	$2(11)+1$	23
4	$2(23)+1$	47
5	$2(47)+1$	95

واتە پێنج ڕادەی یەکەمی یەکبەدوای یەکەکە بریتین لە 5, 11, 23, 47, 95



1. پێنج ڕادەی یەکەمی ئەم یەکبەدوای یەکانە بدۆزەوە.

أ $a_1 = -5$ ، $a_n = a_{n-1} - 8$ ب $a_1 = 2$ ، $a_n = -3a_{n-1}$

دەتوانیت پێناسەی هەندێك یەكبەدوای یەك بە **پێناسەیەكی دیار Explicit definition** پێناسە بكەیت. بە جۆرێك كە دەتوانیت بەهای هەر ڕادەیەك بە زانینی خانەكەی بدۆزیتەوە.

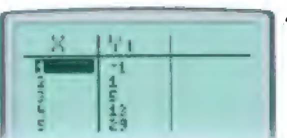
نموونــــە 2 دۆزینەوەی ڕادەكانی یەكبەدوای یەك بەبەكارهێنانی نەخشەی دیار (ئاشكەرا)

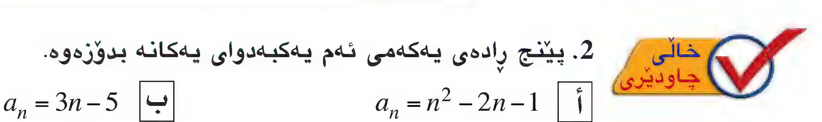
پێنج ڕادەی یەكەمی ئەو یەكبەدوای یەكە بدۆزەوە كە لە خوارەوە پێناسەكراوە. $a_n = 2^n - 3$

n	$2^n - 3$	a_n
1	$2^1 - 3$	−1
2	$2^2 - 3$	1
3	$2^3 - 3$	5
4	$2^4 - 3$	13
5	$2^5 - 3$	29

خشتەیەك دروستبكە و بەهای a_n هەژماربكە بەجۆرێك n بەهاكانی 1 تا 5 وەربگرێت. پێنج ڕادەی یەكەم بریتین لە $-1, 1, 5, 13, 29$

پاسادان بكە بژمێری ڕونكردنەوەیی بەكاربێنە، نەخشەی $y = 2^x - 3$ تۆماربكە پاشان خشتەی بەهایەكانی بۆ دروستبكە





خاڵی چاودێری

2. پێنج ڕادەی یەكەمی ئەم یەكبەدوای یەكانە بدۆزەوە.

أ $a_n = n^2 - 2n - 1$ ب $a_n = 3n - 5$

دەتوانیت زانیارییەكانت بەكاربێنیت بۆ نووسینی پێناسەی یەكبەدواییەك.

نموونــــە 3 نووسینی پێناسەی یەكبەدوای یەك

پێناسەی ڕادەی n ی بۆ هەر یەكبەدوای یەكێك بنووسە.

أ **3, 6, 12, 24, 48**

جیاوازی نێوان هەر ڕادەیەك و ڕادەكەی پێش خۆی و ڕێژەی هەر ڕادەیەك و ڕادەكەی پێش خۆی بپشكنە.

ڕێژەكان		2	2	2	2
ڕادەكان	3	6	12	24	48
جیاوازی یەكەم		3	6	12	24
جیاوازی دووەم			3	6	12

ڕێژەكان نەگۆڕن، واتە $\frac{a_n}{a_{n-1}} = 2$ یان $a_n = 2a_{n-1}$ یەكبەدوای یەكەكە یەكبەدوای یەكێكی توانیە. بنچینەكەی دەكاتە 2 . تەماشای شێوازی هێزەكانی ژمارە 2 بكە.

$$a_1 = 3 = 3 \times 2^0 \ ، \ a_2 = 6 = 3 \times 2^1 \ ، \ a_3 = 12 = 3 \times 2^2 \ ...$$

شێوازی $3(2^{n-1})$ پێناسەیەكی گونجاوە بۆ یەكبەدوای یەكەكە. كەواتە $a_n = 3 \times 2^{n-1}$

ب **2.5, 4, 5.5, 7, 8.5**

ڕادەكان	2.5	4	5.5	7	8.5
جیاوازی یەكەم		1.5	1.5	1.5	1.5

لەبەرئەوەی جیاوازییەكانی یەكەم نەگۆڕن، كەواتە یەكبەدوای یەكەكە هێڵییە. ڕادەی یەكەم بریتییە لە 2.5 هەر ڕادەیەك لە ڕادەكانی بەدوایدا دێت 1.5زیاد دەكات. یاساكە بریتییە لە $a_n = 1.5\ n+1$

لەبیرت بێت

جێگیربوونی جیاوازیەكانی یەكەم. نموونەیەكی هێڵی دەگەیەنێ هەروەها جیاوازیەكانی دووەم نموونەیەكی دووجا دەگەیەنێ هەروەها جێگیربوونی ڕێژەكان نموونەی توانی دەگەیەنێ.

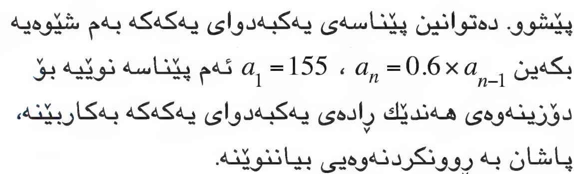
خاڵی چاودێری

3. پێناسەیەكی گونجاو بۆ ڕادەی n ی بۆهەریەكە لەمانە بنووسە.

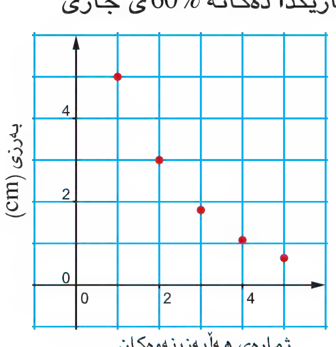
أ $7, 5, 3, 1, -1$ ب $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$

نموونـــــه 4 جێبەجێکردن لەسەر فیزیا

تۆپێك لە بەرزییەکەوە بەردرایە خوارەوە، پاشان تا بەرزایی 155cm بەرزبۆوە. پاشان چەند جارێك تا بەرزایی 60%ی پێش خۆی بەرزدەبێتەوە. بە ڕوونکرنەوەیی یەکبەدوای یەکەکە بنوێنە. باسی شێوازەکەی بکە. لەهەڵبەزینەوەی نۆیەمدا تۆپەکە چەند بەرز دەبێتەوە؟



بەرزبوونەوە لە جاری یەکەم 155cm بەرزبوونەوە لەهەر جارێکدا دەگاتە 60%ی جاری پێشوو. دەتوانین پێناسەی یەکبەدوای یەکەکە بەم شێوەیە بکەین $a_n = 0.6 \times a_{n-1}$ ، $a_1 = 155$ ئەم پێناسە نوێیە بۆ دۆزینەوەی هەندێك ڕادەی یەکبەدوای یەکەکە بەکاربێنە، پاشان بە ڕوونکردنەوەیی بیاننوێنە.



$$a_2 = 0.6 \times 155 = 93$$
$$a_3 = 0.6 \times 93 = 55.8$$
$$a_4 = 0.6 \times 55.8 = 33.48$$

وا دەردەکەوێت نواندنە ڕونکردنەوەییەکە توانی بێت. شێوازێك بۆ نووسینی پێناسەیەکی گونجاو بۆ یەکبەدوای یەکەکە بەکاربێنە. $a_n = 155 \times 0.6^{n-1}$ کاتێك n ژمارەی جارەکانی بەرزبوونەوەی تۆپەکە بێت. ئەم ڕێسایە بۆ هەژمارکردنی بەرزی تۆپەکە لەجاری نۆیەمدا بەکاربێنە $a_9 = 155 \times 0.6^{9-1} \approx 2.603$ تۆپەکە لەجاری نۆیەمدا 2.6cm بەنزیکەیی بەرز دەبێتەوە.

ئاگاداربە!

بە هێڵ نێوان خاڵەکان مەگەینە لەبەرئەوەی بواری نەخشەکە بەشێکە لە کۆمەڵەی ژمارە سروشتییەکان.



4. دەرماڵە گوڵێك لەهەر جارێکدا پێویستی بە 1.6 گالۆن ئاو هەیە. سەرجەمی ئەو گالۆنە ئاوانەی بۆ ئاودانی دەرماڵە گوڵەکە لەهەر ئاودانێك بەکارهاتووە بە ڕوونکردنەوەیی بنوێنە. باسی ئەو شێوازە بکە کە دەستتکەوتووە، سەرجەمی ئەو گالۆنە ئاوانەی لەپاش 10 جار ئاودان بەکارتهێناوە چەندە؟

فراکتال Fractals وێنەیەکە بە دووبارەبوونەوەی شێوە لێکچووەکانی هاوشێوەی شێوە بنەڕەتییەکە دەستدەکەوێت

نموونـــــه 5 سێگۆشەی سیرپنسکی Sierpinski

سێگۆشەیەکە بریتییە لە فراکتالێك لە سێگۆشەیەکی لایەکسان دەستت دەکەوێت، بەبڕینی سێگۆشەیەکی لایەکسان لە ناوەڕاستی سێگۆشەی یەکەم. پاشان ئەمە لەسەر هەر سێگۆشەیەك دووبارەبکەوە. کە دەستت دەکەوێت. ژمارەی سێگۆشەکان لە پێنجەم جاردا چەندە؟

لەهەر دووبارەبوونەوەیەکدا ژمارەی سێگۆشەکان 3 ئەوەندە زیاددەکات هێمای N_n بۆ ژمارەی سێگۆشەکان لەجاری یەکەمدا بەکاربێنە. جاری یەکەم سێگۆشەیەکت هەیە. لە جاری دووەمدا 3 سێگۆشەت دەستت دەکەوێت، و هەروەها ...

$N_1 = 1$ ، $N_2 = 3$ ، $N_3 = 3^2$ دەتوانیت بنووسی $N_n = 3^{n-1}$

کەواتە $N_4 = 3^3 = 27$ ، $N_5 = 3^4 = 81$. لە جاری چوارەمدا ژمارەی سێگۆشەکان 81 سێگۆشە دەبێت.



5. کۆمەڵەی کانتۆر Cantor بریتییە لە شێوەیەکی فراکتال، بەلابردنی سێیەکی ناوەڕاستی پارچەڕاستەهێڵەکە، جێبەجێکردنی ئەم فەرمانە لەسەر هەر پارچە ڕاستەهێڵێکی ئەنجام دەستدەکەوێت. ژمارە ئەو پارچە ڕاستەهێڵانە لەدوای جێبەجێکردنی فەرمانەکە لەجاری پێنجەمدا چەندە؟

بیریکەوە و تاوتوێبکە

1. ڕوونبکەوە جیاوازی نێوان پێناسەی یەکبەدوای یەك بەشێوەی دیار و نادیار.
2. بدۆزەوە 3 ڕادە ئەم یەکبەدوای یەکە تەواوبکات ... ،4 ،2 ،1
3. باسییکە چۆن یەکبەدوای یەك وەك نەخشە دەبینیت؟ ئایا هەموو یەکبەدوای یەکەکان هەمان بواریان هەیە؟ ئەمە ڕوونبکەوە.
4. ڕێکخەریە وێنەی بەرامبەر دروستبکە و تەواوی بکە ئەوەی لە یەکبەدوای یەکدا فێری بوویت بەکورتی تێیدا بنووسە.

پێناسەی یەکبەدوای یەك	دووجۆری یەکبەدوای یەکەکە
نموونەکان	دوو ڕێسای گونجاوی پێناسە

(ناوەڕاست: یەکبەدوای یەکەکان)



1-6 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** پێناسەی ________ یەکبەدوای یەکێك پێناسەیەکە ڕێگا بە دروستبوونی ڕادەی n ی دەدات بە زانینی ڕادەی پێش خۆی یان ڕادەکانی پێش خۆی (نادیار یان دیار).

بروانە نموونە 1

پێنج ڕادەی یەکەم بۆهەریەك لەم یەکبەدوای یەکانە بدۆزەوە.

2 $a_n = 4a_{n-1} - 1 \,;\, a_1 = 1$ **3** $a_n = a_{n-1} + 11 \,;\, a_1 = 3$ **4** $a_n = \frac{a_{n-1}}{5} \,;\, a_1 = 500$

بروانە نموونە 2

5 $a_n = 12(n-2)$ **6** $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ **7** $a_n = -3n^2$

8 $a_n = n(n-1)$ **9** $a_n = 4^{n-1}$ **10** $a_n = (n+1)^2$

بروانە نموونە 3

لەهەریەك لەم یەکبەدوای یەکانەدا پێناسەیەکی گونجاو بۆ ڕادەی **n** بنووسە.

11 $6, 9, 12, 15, 18, \ldots$ **12** $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$ **13** $25, 15, 5, -5, -15, \ldots$

بروانە نموونە 4

14 **پاشەکەوت** داهاتی ئاوات لە ساڵی یەکەمدا 25 000 000 دیناربوو، لە ساڵەکانی دواییدا داهاتەکەی بەڕێژەی 5%ی ساڵی پێش خۆی زیاد دەکات. ئەم یەکبەدوای یەکە بە ڕونکردنەوەیی بنوێنە. باسی شێوازەکەی بکە. دوای 5 ساڵ داهاتەکەی چەند دەبێت؟ پاش 10 ساڵ چەند دەبێت؟

بروانە نموونە 5

15 **فراکتال** ژمارەی پارچە ڕاستەهێڵەکان لە دوو شێوەی چوارەم و پێنجەمدا چەند دەبێت؟

جێبەجێکردن

پێنج ڕادەی یەکەم بۆهەریەك لەم یەکبەدوای یەکانە بدۆزەوە.

16 $a_n = a_{n-1} - 3 \,;\, a_1 = 7$ **17** $a_n = \frac{1}{n^2}$ **18** $a_n = 1.5a_{n-1} - 2 \,;\, a_1 = 4$

19 $a_n = (2)^{n-1} + 8$ **20** $a_n = 2n^2 - 12$ **21** $a_n = -3a_{n-1} - 1 \,;\, a_1 = -2$

ڕاهێنانی ئازاد

بۆشیکارکردنی پرسیارەکان	تەماشای نموونەبکە
18-16	1
21-19	2
24-22	3
25	4
26	5

پێناسەیەکی گونجاو بۆ ڕادەی n ی هەریەك لەم یەکبەدوای یەکانە بدۆزەوە.

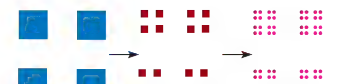
22 $2, 8, 18, 32, 50, \ldots$

23 $9, 5, 1, -3, -7, \ldots$

24 $5, 0.5, 0.05, 0.005, \ldots$

25 **نەخشەکێشان** کورسییەکانی ئەندامانی تیپی ئۆرکسترا لە هۆڵی میوزیکی کلاسیکی لەسەر شێوەی نیوە بازنەیەك ڕیکخرا، بەجۆرێك سەرۆکی ئۆرکستراکە لە چەقەکەیدا وەستابوو، ژمارەی کورسییەکانی ڕیزی یەکەم 16 کورسییە، ژمارەی کورسییەکانی ڕیزەکانی تر 4 کورسی لە ژمارەی کورسییەکانی ڕیزی پێش خۆی زیاتربوو. ئەم یەکبەدوای یەکە بە ڕوونکردنەوەیی بنوێنە، باسی شێوازەکەشی بکە، ژمارەی کورسییەکان لە ڕیزی شەشەم چەندە؟

26 **فراکتال** ژمارەی چوارگۆشەکان لەدوو شێوەی چوارەم و پێنجەمدا بدۆزەوە.



پێنج ڕادەی یەکەم لەهەر یەکبەدوای یەکێکدا بدۆزەوە.

27 $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + 2$ ، $a_1 = 12$

28 $a_n = \frac{2}{a_{n-1}}$ ، $a_1 = 1$

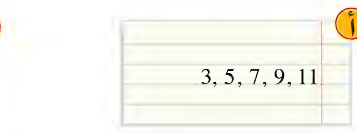
29 $a_n = -a_{n-1} + 10$ ، $a_1 = -10$

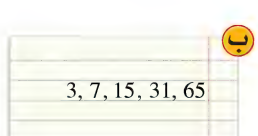
30 $a_n = 2n^2 - 12$

31 $a_n = 8 - \frac{1}{10}n$

32 $a_n = 5(-1)^{n+1} \times 3^{n-1}$

33 **هەڵە لە شیکردنەوە** لە خوارەوە بە دوو شێوە پێنج ڕادەی یەکەمی ئەم یەکبەدوای یەکە نووسراوە $a_1 = 3$ ، $a_n = 2n + 1$ کامیان هەڵەیە، هەڵەکە دیاربکە.

أ


ب


پێناسەیەکی گونجاو بۆ ڕادەی n ی بۆهەریەك لەم یەکبەدوای یەکانە بنووسە. پاشان ڕادەی دەیەمی بدۆزەوە.

34 $16, 4, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \ldots$

35 $\frac{15}{9}, \frac{14}{9}, \frac{13}{9}, \frac{12}{9}, \frac{11}{9}, \ldots$

36 $-5.0, -2.5, 0, 2.5, 5.0, \ldots$

37 $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

38 $0.04, 0.4, 4, 40, 400, \ldots$

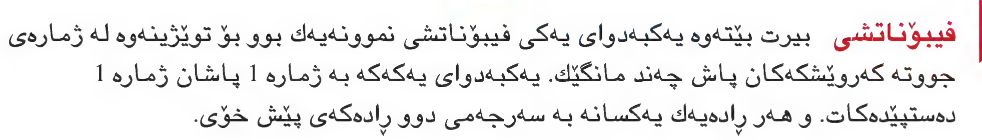
39 $24, 21, 16, 9, 0, \ldots$

دەروازەیەك

لەسەر مێژووی بیرکاری



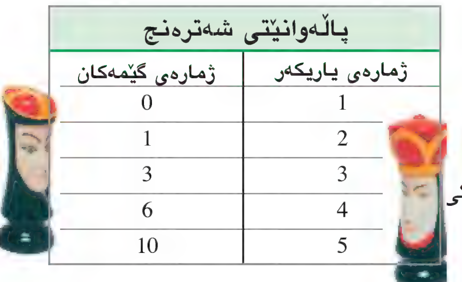
یەکبەدوای یەکی فیبۆناتشی بۆ دەرخستنی ڕێژەی زێڕین بەکاردێت. ڕێژەی هەر ڕادەیەك بۆ ڕادەکەی پێش خۆی لەڕێژەی زێڕینی $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ نزیکدەبێتەوە هەتاخانەی ڕادەکە زیاد بکات.



40 **فیبۆناتشی** بیرت بێتەوە یەکبەدوای یەکی فیبۆناتشی نموونەیەك بوو بۆ توێژینەوە لە ژمارەی جووتە کەروێشکەکان پاش چەند مانگێك. یەکبەدوای یەکەکە بە ژمارە 1 پاشان ژمارە 1 دەستپێدەکات. و هەر ڕادەیەك یەکسانە بە سەرجەمی دوو ڕادەکەی پێش خۆی.

أ دوازدە ڕادەی یەکەمی یەکبەدوای یەکەکە بدۆزەوە.

ب ژمارەی جووتە کەروێشکەکان لەکۆتایی ساڵێکی تەواو چەندە؟



پاڵەوانێتی شەترەنج	
ژمارەی یاریکەر	ژمارەی گێمەکان
1	0
2	1
3	3
4	6
5	10

41 **شەترەنج** سەنگەر قارەمانێتیەکی شەترەنجی ڕیکخست بەجۆرێك هەریاریکەرێك یەکجار لەگەڵ هەموو یاریکەرەکان یاری دەکات. خشتەیەکی دروستکرد و بۆی دەرکەوت کە زیادکردنی هەر یاریکەرێکی نوێ دەبێتە هۆی ئەوەی ژمارەی یارییەکان لەیەك یاری زیاتربێت.

أ یەکبەدوای یەکەکە بە ڕوونکردنەوەیی بنوێنە و شێوازەکەی باسبکە، ڕادەکانی دواتر چین؟

ب لادانی هێڵی بۆ دۆزینەوەی ڕێسایەك بۆئەو یەکبە دوای یەکە بەکاربێنە

ج **چی دەبێت ئەگەر...؟** خشتەکە چۆن دەگۆڕێت ئەگەر هەر یاریکەرێك دووجار لەگەڵ هەریەکێك لەیاریکەرەکانی تر یاریبکات؟ خشتەیەك دروستبکە. ڕوونبکەوە یەکبەدوای یەکەکە چۆن دەگۆڕێت؟

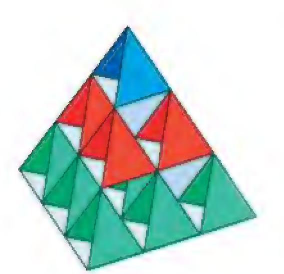
ژمارەی خاڵەکان لەدوو وێنەی خوارەوە، لەهەر یەکبەدوای یەکێکدا بدۆزەوە.

42

a_1 a_2 a_3 a_4

43

a_1 a_2 a_3 a_4



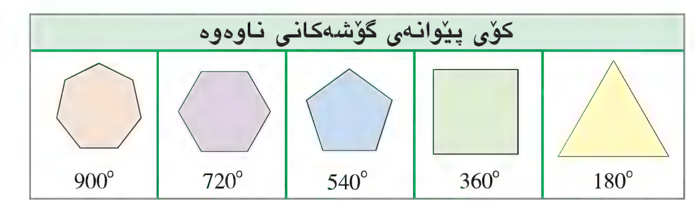
44 تەنی بەرامبەرت لە شێوەیەکی ئەندازەیی پێکدێت، هەریەکەیان لە 6 دنکە شقارتەی درێژی یەکسان دروستکراوە. شێوەیەك لە بەشی سەرەوەدا هەیە و 3 شێوە لە چینی دووەم و 6 شێوە لەچینی سێیەم و هەروەها ...

أ ڕێسای $a_n = a_{n-1} + 6n$ نموونەیەکە بۆ هەژمارکردنی ژمارەی دەنکە شقارتەکان لە چینی n دا. .پێنج ڕادەی یەکەمی یەکبەدوای یەکەکە بدۆزەوە کاتێك $a_1 = 6$.

ب لێژی هێڵی بۆ دۆزینەوەی ڕێسای ئەو یەکبەدوای یەکە بەکاربهێنە.

ج چەند دەنکە شقارتە بۆ دروستکردنی چینی دووەم پێویستە.

45 **ئەندازە** خشتەی خوارەوە کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی پێنج چەندلا ڕێکەی یەکەم دەنوێنێت



کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوە				
180°	360°	540°	720°	900°

أ پێناسەیەکی دیار بۆئەم یەکبەدوای یەکە بنووسە، کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلا ڕێکەیەك ژمارەی لایەکانی 12 بێت بدۆزەوە.

ب لەبیرت بێت گۆشەکانی ناوەوەی چەندلایەکی ڕێك هەمان پێوانەیان هەیە. خشتەیەك دروستبکە پێوانەی گۆشەی ناوەوەی هەرچەندلایەکی ڕێك دیاریبکات. پێدراوەکانی خشتەکە بەوێنەی ڕوونکردنەوەیی بنوێنە، باسی شێوازەکەی بکە.

ج پێناسەیەکی دیار بۆ یەکبەدوای یەکی لقی ب بنووسە.

د پێوانەی گۆشەیەکی ناوەوەی دەلایەکی ڕێك بدۆزەوە.

46 **خەملاندن** بەهای ڕادەی بیستەم لەم یەکبەدوای یەکە دیاریبکە... ,7.94, 8.935, 9.93, 10.925, 11.92

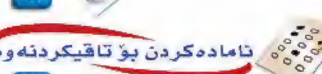
47 **میوزیك** وێنەکەی خوارەوە کاتی نۆتەی میوزیکە جیاوازەکان نیشان دەدات.



أ یەکبەودای یەکێکی ژمارەیی بنووسە بەرەو پێشچوونی نۆتەی میوزیکەکان نیشانبدات. پێناسەیەکی دیار و یەکێکی نادیار بۆ ئەو یەکبەدوای یەکە بنووسە.

ب نۆتەیەکی تەواو 4 بیتە (Beats) و نیونۆتە 2 بیتە و چارەکە نۆتەیەك 1 بیتە و هەروەها ... یەکبەدوای یەکێك بنووسە. ژمارەی پیتەکانی نۆتەیەك لەدوای یەکەکانی سەرەوە بنوێنێت. پێناسەیەکی نادیار و پێناسەیەکی دیار لەسەر ئەم یەکبەدوای یەکە بنووسە. پەیوەندی نێوان ئەم یەکبەدوای یەکە و یەکبەدوای یەکی لقی أ چییە؟

48 **بنووسە** جیاوازی نێوان یەکبەدوای یەکی دوا هاتوو و دوا نەهاتوو ڕوونبکەوە.



49 کام لەمانەی دێت ڕادەی داهاتووی ئەم یەکبەدوای یەکەیە. ... $-9, -6, -3, 0,$

(أ) -3 (ب) 0 (ج) 3 (د) 6

50 کام لەمانەی خوارەوە ڕێسای ئەم یەکبەدوای یەکەیە ... $4, 12, 36, 108,$

(أ) $a_n = 4 + 3n$ (ج) $a_1 = 4$ ؛ $a_n = 3a_{n-1}$ کاتێك $n \geq 2$

(ب) $a_n = 3 + 4n$ (د) $a_1 = 3$ ؛ $a_n = 4a_{n-1}$ کاتێك $n \geq 2$

51 کام لەم یەکبەدوای یەکانە ڕێساکەی بریتییە لە $a_n = \frac{2n}{n+1}$

(أ) $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \frac{10}{11}, \dots$ (ج) $1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{5}{3}, \dots$

(ب) $0, 1, 2, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \dots$ (د) $2, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{5}{3}, \frac{12}{7}, \dots$

52 کام یەکبەوداى یەکە ڕێساکەی بریتییە لە $a_1 = 6$ ؛ $a_n = 12 - 2a_{n-1}$ کاتێك $n \geq 2$

(أ) $6, 4, 2, 0, -2, -4, \dots$ (ج) $0, 12, -12, 36, -60, \dots$

(ب) $6, 0, 12, -12, 36, \dots$ (د) $6, 0, -6, -12, -18, \dots$

53 **کورتە وەڵام** ڕادەی داهاتوو لەم یەکبەدوای یەکە بدۆزەوە. $-32, 16, -8, 4, -2,$

بەرەنگاری و فراوانکردن

پێناسەی دیار بۆئەم یەکبەدوای یەکانە بنووسە، پاشان ڕادەی دەیەم بدۆزەوە.

54 $-\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 8, \frac{61}{3}, \frac{122}{3}, \dots$ **55** $-2, 6, -12, 20, -30, \dots$

56 $0.9, 0.8, 0.6, 0.3, -0.1, \dots$

57 **ئەندازە** 5 بازنە بکێشە، خاڵێك لەسەر بازنەی یەکەم دابنێ و 2 خاڵ لەسەر بازنەی دووەم و 3 خاڵ لەسەر بازنەی سێیەم دابنێ و هەروەها ... پاشان هەموو دوو خاڵێك لە خاڵەکانی بازنەکان بگەیەنە، زۆرترین ناوچەی یەکتر نەبڕیوەکانی هەر بازنەیەك لەخۆ دەگرێت بژمێرە.

أ ئەو یەکبەدوای یەکە بنووسە. کە دەستتکەوتووە.

ب وا دەردەکەوێت هەر ڕادەیەك یەکسانە بە دووئەوەندەی ڕادەکەی پێش خۆی بەڵام وا دەردەکەوێت ڕادەی شەشەم لە 32 کەمترە. هەوڵبدە ئەم ناوچانە لەبازنەی شەشەمدا بە وردی دیارییکەیت بە دروستکردنی وێنەیەکی ڕێکوپێك.

پێداچوونەوەی لوولپێچی

بڕەکە بە سادەترین شێوە بنووسە. وا دابنێ پێناسەکراوە (پۆلەکانی پێشوو)

58 $\frac{x^2-9}{x^2+5x+6}$ **59** $\frac{4x^2-5x}{8x^2+18x-35}$

60 $\frac{4x-12}{x^2-25} \div \frac{8x-24}{2x-10}$ **61** $\frac{x^2-5x-6}{x^2-3x-18} \times \frac{x^2+x-6}{x^2-x-2}$

کۆبکەوە یان لێدەربکە (پۆلەکانی پێشوو)

62 $\frac{2x-3}{x+1} + \frac{4x-9}{x-1}$ **63** $\frac{9x}{8x-4} - \frac{10x+3}{12x-6}$ **64** $\frac{x^2}{2x+7} - \frac{x}{x+2}$

65 **وێژە** کرمانج کتێبێك کە 854 لاپەڕەیە بەتیکڕای لاپەڕە و نیوێك لە خولەکێکدا دەخوێنێتەوە خشتەیەك دروستبکە و نەخشەیەك بنووسە ژمارەی ئەو لاپەڕانە بنوێنێت کە ماونەتەوە p بەپێی کات t . وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە.



2-6 زنجیرەکان
Series

ئامانجەکان

• هەژمارکردنی سەرجەمی یەکبەدوای یەك و نووسینی بە بەکارهێنانی هێمای سەرجەم

زاراوەکان
Vocabulary

زنجیرە (متسلسلة)
Series

سەرجەمی بەش
Partial sum

هێمای کۆکردنەوە
Summation symbol

بۆچی ئەمە فێردەبین؟

دەتوانیت سەرجەمەکانی یەکبەدوای یەکەکان بەکاربێنیت بۆ دۆزینەوەی پێوانەکانی خانوویەك لە کارت دروستکرابێت (نموونە 4)

لە وانەی پێشوودا فێری دۆزینەوەی ڕادەی n ی یەکبەدوای یەك بوویت. هەندێك جار دەتوانیت سەرجەمی چەند ڕادەیەك لە یەکبەدوای یەکێکدا هەژماربکەیت بۆ دەربڕینی ئەو سەرجەمە **زنجیرە Series** بەکاردێت. خشتەکەی خوارەوە نموونە لەسەر ئەمە پیشان دەدات.

یەکبەدوای یەك	$1, 2, 3, 4$	$2, 4, 6, 8, \ldots$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$
زنجیرە	$1+2+3+4$	$2+4+6+8+\ldots$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$

لەبەرئەوەی زۆربەی یەکبەدوای یەکەکان ناکۆتان. بە زۆری سەرجەمە بەشییەکان بەکاردەهێنرێت. **سەرجەمی بەشی** هێمای S_n ی بۆ دادەنرێت. بریتییە لە سەرجەمی n ڕادەی یەکەمی یەکبەدوای یەکەکە

$S_1 = 2$ سەرجەمی ڕادەی یەکەم

$S_2 = 2 + 4 = 6$ سەرجەمی دوو ڕادەی یەکەمین

$S_3 = 2 + 4 + 6 = 12$ سەرجەمی سێ ڕادەی یەکەمین

$S_4 = 2 + 4 + 6 + 8 = 20$ سەرجەمی چوار ڕادەی یەکەمین

دەتوانیت هێمای سەرجەم Σ بۆ دەربڕینی زنجیرە بەم شێوەیە بەکاربێنیت.



نموونــــە 1 بەکارهێنانی هێمای سەرجەم

بە بەکارهێنانی هێمای سەرجەم ئەم زنجیرانە بنووسە.

أ $3 + 6 + 9 + 12 + 15$

پێناسەی دیار بۆ یەکبەدوای یەکەکە بدۆزەوە

$a_k = 3k$ پێناسەی دیار

سەرجەمی پێنج ڕادەی یەکەم بنووسە

$\sum_{k=1}^{k=5} 3k$ هێمای سەرجەم بەکاربهێنە

ب $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64}$

پێناسەی دیار بۆ یەکبەدوای یەکەکە بدۆزەوە

$a_k = (-1)^{k+1}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ پێناسەی دیار

سەرجەمی پێنج ڕادەی یەکەم بنووسە

$\sum_{k=1}^{k=6} (-1)^{k+1}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ هێمای سەرجەم بەکاربهێنە

ئاگاداربە!

بۆ ئەو یەکبەدوای یەکانەی نیشانەی ڕادەکانی یەکبەدوای یەك دەگۆڕێن $(-1)^{k+1}$ بەکاربێنە ئەگەر نیشانەی a_1ی $(+)$ بێت و $(-1)^k$بەکاربێنە ئەگەر نیشانەی a_1 $(-)$ بێت.

خاڵی چاودێری

1. بە بەکارهێنانی یاسای سەرجەم ئەم زنجیرانە بنووسە.

أ $\frac{2}{4} + \frac{2}{9} + \frac{2}{16} + \frac{2}{25} + \frac{2}{36}$

ب $-2 + 4 - 6 + 8 - 10 + 12$

نموونــــــە 2 هەژمارکردنی بەهای زنجیرەکان

زنجیرەکە بکەوە و بەهاکەی هەژماربکە.

أ $\sum_{k=3}^{k=6}\frac{1}{2^k}$

$$\sum_{k=3}^{k=6}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}$$ بە دانانەوەی بەهاکانی k زنجیرەکە بکەوە

$$=\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}$$ هێزەکان هەژماربکە

$$=\frac{8}{64}+\frac{4}{64}+\frac{2}{64}+\frac{1}{64}=\frac{15}{64}$$ سادەبکە

ب $\sum_{k=1}^{k=4}\left(10-k^2\right)$

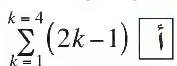
$$\sum_{k=1}^{k=4}\left(10-k^2\right)=\left(10-1^2\right)+\left(10-2^2\right)+\left(10-3^2\right)+\left(10-4^2\right)=10$$ بکەوە

ئاگاداربە!

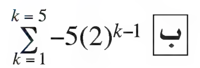
هەندێك لە یەکبەدوای یەکەکان بەڕادەی a_k دەستپێدەکات کاتێك $k\neq1$ هەروەك نموونەی 2 – أ



2. زنجیرەکە بکەوە و بەهاکەی هەژماربکە.



أ $\sum_{k=1}^{k=4}(2k-1)$



ب $\sum_{k=1}^{k=5}-5(2)^{k-1}$

دۆزینەوەی سەرجەمی ژمارەی ڕادەکانی یەکبەدوای یەك هەموو کاتێك ئاسان نییە. بەڵام دەتوانرێت ڕێسایەك بۆ هەژمارکردنی سەرجەمی ڕادەکانی یەکەم لەهەندێك لە یەکبەدوای یەکە تایبەتییەکاندا بدۆزیتەوە. **زنجیرەی نەگۆڕ** زنجیرەیەکە هەموو ڕادەکانی یەکسانن $3+3+3+3+3$

$$\sum_{k=1}^{k=5}3=\underbrace{3+3+3+3+3}_{\text{ژمارەی ڕادەکان 5}}=5\text{x}3=15$$

سەرجەمی ڕادەکانی یەکەمی زنجیرەی نەگۆڕ بریتییە لە $\sum_{k=1}^{k=n}c=nc$

$$\sum_{k=1}^{k=n}a=\underbrace{c+c+\ldots+c}_{\text{ژمارەی ڕادەکانی } n}=c\text{ x } n$$

زنجیرەی هێڵی زنجیرەیەکە بۆ ژماردن. وەك سەرجەمی ژمارە سروشتییەکانی یەکەم تا خانەیەکی دیاریکراو. سەرجەمی 10 ژمارەی سروشتی یەکەم (جگەلە سفر) بریتییە لە

$$\sum_{k=1}^{10}k=1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$$

ڕیزکردنی ژمارەکان دووبارەبکەوە.

$$=(1+10)+(2+9)+(3+8)+(4+7)+(5+6)$$

$$=11+11+11+11+11=5\times11=55$$

سەرنجبدە نیوەی ژمارەی ڕادەکان = 5 و $11=1+10$ بریتییە لە سەرجەمی ڕادەی یەکەم و دواڕادە. ئەم تێبینیەش وادەکات پێشبینی ئەوە بکەین سەرجەمی ژمارە سروشتییەکان تا خانەی n (جگەلە سفر) بریتییە لە $\sum_{k=1}^{k=n}k=\frac{n}{2}(n+1)$ یان $\sum_{k=1}^{k=n}k=\frac{n(n+1)}{2}$



یاساکانی سەرجەمی هەندێك لە زنجیرەکان

زنجیرەی نەگۆڕ	زنجیرەی هێڵی	زنجیرەی دووجا
$\sum_{k=1}^{k=n}a=na$	$\sum_{k=1}^{k=n}k=\frac{n(n+1)}{2}$	$\sum_{k=1}^{k=n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

نموونــــە 3 بەكارهێنانی یاساكانی سەرجەمی هەندێك لە زنجیرەكان

بەهای زنجیرەكە هەژماربكە.

أ $\sum_{k=1}^{k=6} 8$ زنجیرەیەكی نەگۆڕە

ڕێگای یەكەم یاسای سەرجەم

بەكاربێنە، زنجیرەكە 6 ڕادەی تێدایە.

$$\sum_{k=1}^{k=6} 8 = na = 6 \times 8 = 48$$

ڕێگای دووەم بكەوە سەرجەم هەژمارەكە.

$$\sum_{k=1}^{k=6} 8 = \underbrace{8+8+8+8+8+8}_{6 \text{ ڕادە}} = 48$$

ب $\sum_{k=1}^{k=5} k$ زنجیرەیەكی هێڵییە

ڕێگای یەكەم یاسای سەرجەم بەكاربێنە

$$\sum_{k=1}^{k=5} k = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{5 \times 6}{2} = 15$$

ڕێگای دووەم بكەوە سەرجەم هەژماربكە.

$$\sum_{k=1}^{k=5} k = 1+2+3+4+5 = 15$$

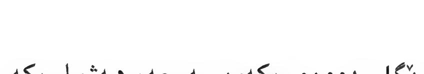
ج $\sum_{k=1}^{k=7} k^2$ زنجیرەیەكی دووجایە

ڕێگای یەكەم یاسای سەرجەم بەكاربێنە

$$\sum_{k=1}^{k=7} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$= \frac{7(7+1)(2 \times 7+1)}{6}$$
$$= \frac{56(15)}{6}$$
$$= 140$$

ڕێگای دووەم بكەوە سەرجەم هەژمار بكە.

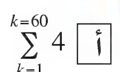
بژمێری ڕوونكردنەوەیی بەكاربێنە



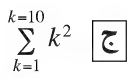
ئاگاداربە!

كاتێك ڕادەكانی زنجیرەیەك دەژمێری، پێویستە ژماردنەكە ڕادەی یەكەم و كۆتایی تێدابێت ژمارەی ڕادەكانی زنجیرەی $\sum_{k=5}^{k=10} 8$ دەكاتە 6 نەك 5 چونكە بەهاكانی k بریتین لە $k = 5,6,7,8,9,10$

خاڵی چاودێری **3.** بەهای زنجیرەكە هەژماربكە.



أ $\sum_{k=1}^{k=60} 4$ ب $\sum_{k=1}^{k=15} k$ ج $\sum_{k=1}^{k=10} k^2$



نموونــــە 4 جێبەجێكردن لەسەر شیكاركردنی پرسیارەكان



سیڤان دەیەوێت خانوویەك لەكارتی یاریكردن دروست بكات كە ژمارەیان 52 دانەیە. هەروەك لە وێنەكەدا دیارە و دەیەوێت زۆرترین نهۆمی دەستبكەوێت. چەند نهۆم دەتوانێت دروستبكات.

1 پرسیارەكە تێبگە

داواكراو زانینی ژمارەی نهۆمەكانە

زانیارییە گرنگەكان دیاربكە:

- ژمارەی كارتەكان 52 دانەیە
- داواكراو زۆرترین نهۆم درست بكرێت.

2 پلاندانی

هێڵكارییەك بۆ خانووەكە بكێشە بۆ باشتر تێگەیشتنی پرسیارەكە شێوازێك بۆ ژمارەی كارتەكان لەهەر نهۆمێك بدۆزەوە، زنجیرەكە بنووسە و بەهاكەی هەژماربكە.

3 شیکاربکە

خشتەکە و وێنەکە دروستبکە.

نهۆم	1	2	3	4
وێنە	/\	/▽\	/▽▽\	/▽▽▽\
ژمارەی کارتەکان	2	5	8	11

ژمارەی کارتەکان لە نهۆمێکەوە بۆ نهۆمێکی تر 3 کارت زیاد دەکات، زنجیرەیەك بنووسە. ژمارەی کارتەکان لە n نهۆمدا نیشان بدات.

$\sum_{k=1}^{k=n}(3k-1)$ کاتێك k هێمای خانەی نهۆمەکە بێت و n ژمارەی نهۆمەکان بێت.

$$\sum_{k=1}^{k=4}(3k-1)=(3\times1-1)+(3\times2-1)+(3\times3-1)+(3\times4-1)=26$$

$$\sum_{k=1}^{k=5}(3k-1)=(3\times1-1)+(3\times2-1)+(3\times3-1)+(3\times4-1)+(3\times5-1)=40$$

$$\sum_{k=1}^{k=6}(3k-1)=(3\times1-1)+(3\times2-1)+(3\times3-1)+(3\times4-1)+(3\times5-1)+(3\times6-1)=57$$

لەبەرئەوەی ژمارەی کارتەکان 52 کارتە، بۆیە زۆرترین ژمارەی ئەو نهۆمانەی سیڤان دەستی دەکەوێت بریتییە لە 5 نهۆم.

4 ساغبکەوە

خشتەکە بەکاربهێنە بۆ تەواوکردنی شێوازەکە. نهۆمی پێنجەم 14 کارتی تێدا بەکاردێت $S_5=2+5+8+11+14=40$ ئەگەر سیڤان بیەوێت نهۆمێکی تر زیاد بکات ئەوا پێویستی بە ژمارەیەکی زیاتر لەو کارتانە دەبێت کە ماونەتەوە ژمارەیان 12 کارتە.



4. دوای تەواوبوونی ئاودانی باخەکەی هیوا سۆندەی ئاوەکەی پێچایەوە و لوولی کرد تا لە شوێنێکی باشدا دایبنێ. درێژی هەر پێچێك 6cm لە پێچەکەی پێش خۆی زیاتربوو ئەگەر درێژی پێچی یەکەم 34 cm بێت. ئایا درێژی سۆندەکە چەندە ئەگەر زانێت ژمارەی پێچەکان 12 پێچە.

بیربکەوەو وتووێژبکە

1. جیاوازی نێوان یەکبەودای یەك و زنجیرە ڕوونبکەوە.

2. هێمای هەر گۆڕاوێك چییە لە $\sum_{k=1}^{k=n} k$

3. ڕێکخەریە خشتە دروستبکە و پاشان تەواوی بکە. شێوەیەکی گشتی بۆهەر زاراوەیەك بنووسە، نموونەیەکی بۆ بێنەوە.



	یەکبەودای یەك	زنجیرە
شێوگی گشتی		
نموونە		

2-6 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** نموونەیەك بۆ بەکارهێنانی هێمای سەرجەم بنووسە.

پڕوانە نموونە 1

بە بەکارهێنانی هێمای سەرجەم زنجیرەکە بنووسە.

2 $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}$

3 $-3+6-9+12-15$

4 $1+10+100+1000+10\ 000$

5 $100+95+90+85+80$

پڕوانە نموونە 2

زنجیرەکە بکەوە و بەهاکەی هەژماربکە.

6 $\sum_{k=1}^{k=5} k^3$

7 $\sum_{k=1}^{k=4} (-1)^{k+1}\frac{12}{k^2}$

8 $\sum_{k=5}^{k=10} -5k$

پڕوانە نموونە 3

بەهای زنجیرەکە هەژماربکە.

9 $\sum_{k=1}^{k=21} k$

10 $\sum_{k=1}^{k=20} k^2$

11 $\sum_{k=15}^{k=35} 6$

پڕوانە نموونە 4

12 **پارەدان** کارزان مانگانە بڕی 500 142 دینار قیست دەدات لەبری نرخی ئەو ئۆتۆمبیلەی کرێیەتی پاش دوو ساڵ چەند پارەی داوە؟ ئەی پاش 5 ساڵ چەند دەدات؟

جێبەجێکردن

ڕاهێنانی ئازاد	
بۆشیکارکردنی پرسیارەکان	تەماشای نموونە بکە
16-13	1
19-17	2
22-20	3
23	4

بە بەکارهێنانی هێمای سەرجەم زنجیرەکە بنووسە.

13 $1.1+2.2+3.3+4.4+5.5$

14 $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}$

15 $11-12+13-14+15-16$

16 $1+2+4+8+16+32$

زنجیرەکە بکەوە و هێماکەی هەژماربکە.

17 $\sum_{k=1}^{k=5} 8(k+1)$

18 $\sum_{k=2}^{k=7} (-2)^k$

19 $\sum_{k=1}^{k=4} \frac{k-1}{k+1}$

بەهای زنجیرەکە هەژماربکە.

20 $\sum_{k=1}^{k=99} k$

21 $\sum_{k=11}^{k=88} 2.5$

22 $\sum_{k=1}^{k=25} k^2$

23 کۆگایەکی گەورە قووتوە پەنیری بەچەند چینێك لەسەر یەك لە شوشە بەندەکەیدا داناوە، بەجۆرێك لەچینی سەرەوەیدا یەك قووتو دانراوە، هەر چینێك قووتویەکی لە چینەکەی ژێر خۆی زیاترە چەند قووتوی داناوە ئەگەر بزانیت ژمارەی چینەکان 20 چینە.

بە بەکارهێنانی هێمای سەرجەم یەکبەدوای یەکەکە بنووسە.

24 $-1+4-9+16-25+36$

25 $25+24+23+...+2+1$

26 $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}$

27 $-800-80-8-0.8-0.08$

28 $10.8+10.5+10.2+9.9$

29 $9-16+25-36+49-64$

30 $-3.9+4.4-4.9+5.4-5.9$

31 $0+3.4+6.8+10.2+13.6$

32 $3+\frac{3}{2}+1+\frac{3}{4}+\frac{3}{5}$

33 $1000+100+10+1+\frac{1}{10}$

34 **گەشت** دووری نێوان بەغداد و ئەو شارەی هاوكاری لێیە 596 km. هاوكار بڕیاریدا لە ڕۆژی یەكەم نیوەی ڕێگایەكە ببڕێت. نیوەی ماوەكە لە ڕۆژی دووەمدا و نیوەی ماوەكەی تر لەڕۆژی سێیەمدا و ... بەو شێوەیە. بە بەكارهێنانی هێمای سەرجەم زنجیرەیەك بنووسە كە سەرجەمەكەی ئەو دووریە بێت لە 5 ڕۆژدا بڕیویەتی. لەو پێنج ڕۆژەدا چەند كیلۆمەتر دەبڕێت؟

35 **دڵنیایی** بەڕێوەبەری گەنجینەیەك ڕێگای درەختی بەكاردێنێ بۆ ئاگادار كردنەوەی كارمەندەكانی تا لە باری كتوپڕدا بڕیار لەسەر داخستنی گەنجینەكەیان بدەن. ئەو ڕێگایەش بە ئاگادار كردنەوەی سێ كارمەند لە لایەن بەڕێوەبەرەوە تا بڕیار لەسەر داخستنی قفڵەكان بدەن. و هەریەكێكیان 3 كارمەندی تر ئاگادار دەكات و هەروەها ...

أ هێڵكارییەكی درەختی لە 3 ئاستدا دروستبكە ئەم ڕێگایە بنوێنێت.

ب زنجیرەیەك بنووسە بەهایەكەی ژمارەی ئەو كارمەندانە بێت كە ئاگادار كراونەتەوە لە 5 ئاستدا و بەهای زنجیرەكە بدۆزەوە.

ج **چی دەبێت ئەگەر؟** وایدابنێ بەڕێوەبەرەكە لەجیاتی 3 كارمەند لەهەر ئاستێكدا 5 كارمەند ئاگادار دەكاتەوە. ئایا ژمارەی ئەو كارمەندە زیادانەی لە 5 ئاستدا ئاگادار كراونەتەوە چەندە؟

زنجیرەكە بكەوە و هێماكەی هەژماربكە.

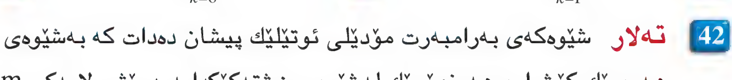
36 $\sum_{k=1}^{k=6}(k^2+1)$ **37** $\sum_{k=1}^{k=6}(-1)^k(5k)$ **38** $\sum_{k=3}^{k=6}\frac{1}{2k}$

39 $\sum_{k=1}^{k=6}(3k-2)$ **40** $\sum_{k=6}^{k=11}12(k-2)$ **41** $\sum_{k=1}^{k=5}\frac{k^2}{5k}$

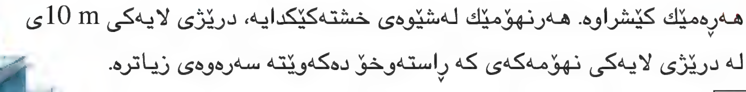
دەروازەیەك

لەسەر مێژووی بیركاری

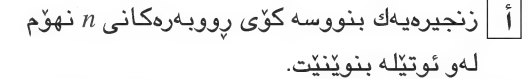
بیركاری زانی ئەڵمانی فروریك گاوس، لە تەمەنی دەساڵیدا ڕێگایەكی خێرای بۆ هەژماركردنی سەرجەمی ژمارە سروشتیەكانی لە 1 تا 100 دۆزیەوە ئەم ڕێگایەك بووە هۆی دۆزینەوەی یاسای هەژماركردنی سەرجەمی ژمارە سروشتیەكان لە 1 تا n كاتێك n هەر ژمارەیەكی سروشتی بێت.



42 **تەلار** شێوەكەی بەرامبەرت مۆدێلی ئوتێلێك پیشان دەدات كە بەشێوەی



هەرەمێك كێشراوە. هەرنهۆمێك لەشێوەی خشتەكێكدایە، درێژی لایەكی 10 m ی لە درێژی لایەكی نهۆمەكەی كە ڕاستەوخۆ دەكەوێتە سەرەوەی زیاترە.



أ زنجیرەیەك بنووسە كۆی ڕووبەرەكانی n نهۆم لەو ئوتێلە بنوێنێت.



ب كەمترین ژمارەی نهۆمەكان چەند بێت تا سەرجەمی ڕووبەری هەموو نهۆمەكان لە $50000\ m^2$ كەمتر نەبێت.



خەمڵاندن **هەر سەرجەمێك بەهزری بخەمڵێنە پاشان بەراورد لەنێوان خەمڵاندنەكەت و ئەو سەرجەمەی كە بە بەكارهێنانی بژمێر دەستت دەكەوێت بكە.**

43 $10+11+12+...+29+30$ **44** $1+3+5+...+97+99$

45 $(-2)+(-4)+(-6)+...+(-98)+(-100)$

46 **فیزیا** خشتەی بەرامبەر ئەو دووریانە پیشان دەدات كە تەنێك دەیبڕێت كاتێك بەسەربەستی دەكەوێتە خوارەوە لەهەر ماوەیەك لەماوە یەكسانەكان (یەكەكانی دووری و كات فەرامۆش كراوە لەبەرئەوەی كاریگەری نابێت).

دووری كەوتنەخوارەوەی سەربەست لەهەر كاتێكی خایەنراو

ماوەكان	نموونەی لیۆناردۆ	نموونەی گالیلۆ
1	1	1
2	2	3
3	3	5
4	4	7
5	5	9

أ زنجیرەیەك لە 5 ماوەدا بۆهەر نموونەیەك بنووسە و بەهاكەی هەژماربكە. هەر سەرجەمێك چی دەنوێنێت.

ب هەر زنجیرەیەك بە بەكارهێنانی هێمای سەرجەم بنووسە. سەرجەمی دە ڕادەی یەكەم لەهەر یەكێكیاندا هەژماربكە.

ج ئەو دووریانەی تەنێك لە كەوتنە خوارەوەی سەربەستدا دەیبڕێت بەپێی ئەو نموونەی كە ئێستا كاری پێدەكەیت بریتییە لە .. ,1, 4, 9, 16, 25 بەراورد لەنێوان نموونەكەی لیۆناردۆ و گالیلۆ لەگەڵ ئەو نموونەیەی ئێستا كاری پێكراوە بكە.

47 **بیرکردنەوەی رەخنەگرانە** دەگونجێت هەندێك تایبەتمەندی بیرکاری بەسەر زنجیرەکاندا جێبەجێبکرێت.

أ سەرجەمی هەریەك لە $\sum_{k=1}^{k=10} 3k$ و $3\sum_{k=1}^{10} k$ هەژمار بکە دەستەواژەیەك بنووسە پاڵپشت لەوە بکات کە پێیگەیشتووی.

ب هەریەکە لە $\sum_{k=1}^{k=10} (k+2)$ و $\sum_{k=1}^{k=10} k + \sum_{k=1}^{k=10} 2$ هەژماربکە. دەستەواژەیەك بنووسە پاڵپشت لەوە بکات کە پێی گەیشتووی .

48 زنجیرەی $\sum_{k=1}^{k=n}\left(3k^2+3k\right)$ بۆ دۆزینەوەی ژمارەی ئەو دەنکە شقارتە پێویستانەی لە دروستکردنی هەر ڕەفێك لە nچین پێکهاتبێت، هاوشێوەی ئەو هەرەمەی لە وێنەکەدا دیارە بەکاربێنە.

أ ئەو زنجیرەیەی سەربە هەرەمەکەیە و لە 5 چین پێکهاتووە بکەوە و هەژماری باهاکەی بکە تا بزانێت ژمارە دەنکە شقارتەکان چەندە؟

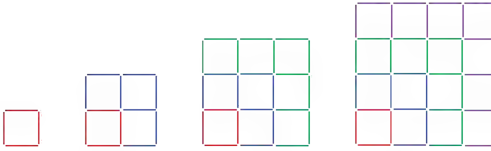
ب ئەم ڕێسایە

$$\sum_{k=1}^{k=n}\left(a_k+b_k\right)=\sum_{k=1}^{k=n}a_k+\sum_{k=1}^{k=n}b_k$$ و ڕیسای $$\sum_{k=1}^{k=n}ax_k=a\sum_{k=1}^{k=n}x_k$$ بەکاربێنە

بۆ نووسینی زنجیرەی$\sum_{k=1}^{k=n}\left(3k^2+3k\right)$ وەك سەرجەمی ئەنجامی لێکدانی زنجیرەیەکی دووجا لە ژمارەیەك، ئەنجامی لێکدانی زنجیرەیەکی هێڵی لە ژمارەیەك بەکاربێنە.

ج یاساکانی سەرجەمی زنجیرە هێڵییەکان و دووجاکان و ئەوەی لە لقی (ب) دا دەستت کەوتووە بۆ دۆزینەوەی ژمارەی ئەو دەنکە شقارتانەی پێویستە لە دروستکردنی هەرەمێك لە 17 چین پێکهاتبێت بەکاربێنە.

49 **فرە هەنگاو** شێوازەکەی خوارەوە بپشکنە تیایدا دەنکە شقارتە بۆ دروستکردنی چوارگۆشە بەکارهاتووە کەدرێژی لایەکانی لەهەر جارێکدا یەك زیاددەکات.



أ یەکبەدوای یەکێك بنووسە ژمارەی ئەو دەنکە شقارتە زیادکراوانە بنوێنێت کە بۆ دروستکردنی چوارگۆشەیەکی نوێ پێویستە.

ب بە بەکارهێنانی هێمای سەرجەم زنجیرەیەك بنووسە بۆنواندنی ژمارەی ئەودەنکە شقارتانەی بۆ دروست کردنی چوارگۆشەیەك درێژی لایەکی 6 دەنك بێت چەند دەنکت پێویستە بۆ دروستکردنی ئەو چوارگۆشە.

50 **بیرکردنەوەی رەخنەگرانە** ئایا سەرجەمی $1+3+5+7+9$ یەکسانە بە سەرجەمی $9+7+5+3+1$ ؟ ئایا ئەم زنجیرەیە بە بەکارهێنانی هێمای سەرجەم بەهەمان شێوە دەنووسرێت.

51 **بنووسە** ئەو هۆیە ڕوونبکەوە کەوا لە S_n دەکات بەشە سەرجەمێك بێت، نەك سەرجەمی گشتی هەموو ڕادەکانی یەکبەدوای یەکەکە.



52 کام لەمانەی خوارەوە کراوەیە بۆ زنجیرەی $\sum_{k=1}^{k=7}(-1)^k(3k)$ ؟

(أ) $3+6+9+12+15+18+21$

(ب) $-3+6-9+12-15+18-21$

(ج) $3-6+9-12+15-18+21$

(د) $-3-6-9-12-15-18-21$

53 کام لەمانەی خوارەوە نووسینی زنجیرەی $\frac{1}{8}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$ دەنوێنێت. بە بەکارهێنانی هێمای سەرجەم.

(أ) $\sum_{k=1}^{k=4}\frac{k}{2}$

(ب) $\sum_{k=1}^{k=4}\frac{1}{2^k}$

(ج) $\sum_{k=1}^{k=4}\frac{1}{2k}$

(د) $\sum_{k=1}^{k=4}\frac{1}{k+2}$

54 کام لەمانەی خوارەوە بەهای $\sum_{k=1}^{k=6} k^2$ پێکدەهێنێت.

أ) 36 ب) 55 ج) 91 د) 273

55 کام لەمانەی خوارەوە بەهای $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}$ پێکدەهێنێت.

أ) $\frac{1}{45}$ ب) $\frac{4}{45}$ ج) $\frac{7}{12}$ د) $\frac{5}{8}$

56 **کورتە وەڵام** سۆزان هەرەمێکی لە قوتوی شیرینی دروستکرد، بە جۆرێك لە چینی سەرەوەیدا یەك قوتو هەبێت چینەکەی دوای ئەو چینەی لە دوای دێت 4 قوتو بێت و چینی دوای ئەو 9 قوتو و چوارەمی 16 قوتو ... ئایا بۆ دۆزینەوەی ژمارەی قوتوەکانی چینی 20 یەکبەدوای یەك یان زنجیرە بەکاردەهێنرێت؟ ئەوە ڕونبکەوە.

بەرەنگاری و فراوانکردن

بە بەکارهێنانی هێمای سەرجەم زنجیرەیەك بنووسە پاشان بەهاکەی بدۆزەوە.

57 $1+2+3+...+1000$ **58** $1^2+2^2+3^2+...+25^2$

سیفەتەکانی یەکبەدوای یەك بسەلمێنە.

59 $\sum_{k=1}^{k=n} ax_k = a\sum_{k=1}^{k=n} x_k$ **60** $\sum_{k=1}^{k=n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{k=n} a_k+\sum_{k=1}^{k=n} b_k$

61 **بیری ڕەخنەگر** بەڕای تۆ بەهای زنجیرەی ... + $1-1+1-1+1-1+1-1$ چەندە؟ ئەگەر لەسەر ئەم شێوانە بەردەوام بوویت؟ ڕوونبکەوە.

پێداچوونەوەی لووپێچی

یەکتربڕینە ستوونی و ئاسۆییەکانی هەر ڕاستەهێڵێك بدۆزەوە پاشان وێنەکەی بکێشە (پۆلەکانی پێشوو)

62 $3x-4y=12$ **63** $-6x+3y=-18$ **64** $10x+15y=-5$

65 **تەلار** نەخشەی $h(t)=8|t-6|+10$ ڕێسایەك بۆ هەژمارکردنی بەرزی سەرخەرێك (مصعد) لە زەوییەوە بە (پێ) پێکدێنی بەپێی کات t بەچرکە کەمترین بەرزی سەرخەرەکە چەندە؟ (پۆلەکانی پێشوو)

پێنج ڕادەی یەکەمی هەریەك لەم یەکبەدوای یەکانە بدۆزەوە. (وانەی 6 - 1)

66 $a_n=\left(\frac{1}{2}n+2\right)^2$ **67** $a_n=\left(a_{n-1}\right)^2-1$ ؛ $a_1=2$ **68** $a_n=\frac{4^n}{2}$



3-6 یەکبەدوایی‌یەك و زنجیرە ژمارەییەکان Arithmetic Sequences and Series



ئامانجەکان

- دۆزینەوەی ڕادەیەکی داواکراو لە یەکبەدوای یەکی ژمارەییدا
- دۆزینەوەی بەهاکانی زنجیرە ژمارەییەکان.

زاراوەکان Vocabulary

یەکبەدوای یەکی ژمارەیی
Arithmetic Sequence (Progression)

زنجیرەی ژمارەیی
Arithmetic Series

چی ئەمە بەکاردەهێنیت؟

دەتوانیت یەکبەدوای یەکی ژمارەیی بۆ خەملاندنی کرێی تێچوونی پۆستە بەکاربێنیت.

نرخی ئۆتۆمبیل (ملیۆن دینار)

کات (ساڵ)

سمکۆ ئۆتۆمبیلێکی نوێی بە 000 750 16 دینار کڕی

بەڕێوەبەرایەتی باجی دەرامەت نرخی ئۆتۆمبیلەکەی ساڵ لەدوای ساڵ بەم شێوەیە خەملاند 000 750 17 ، 000 250 16 ، 000 750 14 ، 000 250 13 ، ... بەم یەکبەدوای یەکە دەوترێت **یەکبەدوای یەکی ژمارەیی Arithmetic sequence** چونکە جیاوازی d لەنێوان هەر ڕادەیەك و ڕادەکەی دوای خۆی نەگۆڕە ناکاتە سفر بەو جیاوازییە دەوترێت **بنچینە Common difference** بۆ یەکبەدوای یەکە ژمارەییەکەی سەرەوە دەکاتە 000 500 1 دینار.

ڕادە	a_1	a_2	a_3	a_4
بەها	17 750 000	16 250 000	14 750 000	13 250 000
جیاوازیەکان	−1500	−1500	−1500	

لەبیرت بێت جیاوازی نێوان ڕادە یەکەمەکان بۆ بەهاکانی نەخشەیەکی هێڵی جیاوازییەکی نەگۆڕە. سەرنجی ئەمە بدە: ئەگەر جووتە ڕێکخراوی (n,a_n) بە ڕوونکردنەوەیی نوێنرا چەند خاڵێکت دەست دەکەوێت. کە هەموویان دەکەونە سەریەك ڕاستەهێڵ. بەم جۆرە دەتوانیت تەماشای یەکبەدوای یەکی ژمارەیی بکەیت. نەخشەیەکی هێڵییە و بوارەکەی کۆمەڵەی ژمارە سروشتییەکانە.

نموونــــە 1 جیاکردنەوەی یەکبەدوای یەکە ژمارەییەکان

دیاریبکە ئایا یەکبەدوای یەکەکە ژمارەییە یان نا. ئەگەر ژمارەییە بنچینەکەی بدۆزەوە. ڕادەی دوای پاش ڕادەی دواپێدراو بدۆزەوە.

أ $-3, 2, 7, 12, 17, \ldots$

ڕادەکان	17	12	7	2	-3
جیاوازییەکان	5	5	5	5	

یەکبەدوای یەکەکە ژمارەییە، بنچینەکەی دەکاتە 5 ، ڕادەی دواتری پاش ڕادەی کۆتایی دراو $17 + 5 = 22$

ب $-4, -12, -24, -40, -60, \ldots$

ڕادەکان	−60	−40	−24	−12	−4
جیاوازییەکان	−20	−16	−12	−8	

یەکبەدوای یەکەکە ژمارەیی نییە، چونکە جیاوازی نێوان ڕادەکان یەکسان نییە.



1. دیاریبکە ئایا یەکبەدوای یەکەکە ژمارەییە یان نا. ئەگەر ژمارەییە بنچینەکە و ڕادەی دوای پاش ڕادەی کۆتایی دراو بدۆزەوە.

أ $1.9, 1.2, 0.5, -0.2, -0.9, \ldots$ ب $\frac{11}{2}, \frac{11}{3}, \frac{11}{4}, \frac{11}{5}, \frac{11}{6}, \ldots$

سەرنجی شێوازەکەی خشتەی بەرامبەر بدە هەر ڕادەیەك دەکاتە سەرجەمی ڕادەی یەکەم، چەندجارەی بنچینەکەی لەگەڵدا کۆکرابێتەوە.
دەتوانیت ئەم شێوازە بۆ دارشتنی یاسای یەکبەدوای یەکە ژمارەییەکان گشتگیر بکەیت.
ڕادەی دووەم = ڕادەی یەکەم + بنچینە
ڕادەی سێیەم = ڕادەی یەکەم + x2 بنچینە
وە هەروەها

بەهای ئۆتۆمبیل ساڵ لەدوای ساڵ	
n	a_n
1	$a_1 = 16\,750\,000 + 0(-1500\,000)$
2	$a_2 = 16\,750\,000 + 1(-1500\,000)$
3	$a_3 = 16\,750\,000 + 2(-1500\,000)$
4	$a_4 = 16\,750\,000 + 3(-1500\,000)$
5	$a_5 = 16\,750\,000 + 4(-1500\,000)$
n	a_n = 16 750 000 + (n-1)(-150 000)



یاسای ڕادەی گشتی یەکبەدوای یەکی ژمارەیی

ڕادەی nی بۆهەر یەکبەدوای یەکێکی ژمارەیی بەم شێوەیە دەدۆزیتەوە

$a_n = a_1 + (n-1)d$ کاتێك a_1 ڕادەی یەکەم و d بنچینە بێت.

نموونە 2 هەژمارکردنی ڕادەی nی یەکبەدوای یەکی ژمارەیی

ڕادەی دەیەم لەم یەکبەدوای یەکە ژمارەییە بدۆزەوە ... ,4 ,11 ,18 ,25 ,32

هەنگاوی 1 بنچینە بدۆزەوە $d = 25 - 32 = -7$

هەنگاوی 2 ڕادەی دەیەم بە بەکارهێنانی یاسایەکە بدۆزەوە

$a_n = a_1 + (n-1)d$ یاسا

$a_{10} = 32 + (10-1)(-7)$ لەجیاتی دابنێ

$= -31$ سادەبکە

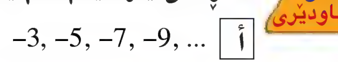
ڕادەی دەیەمی یەکبەدوای یەکەکە بریتییە لە -31

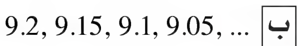
پاسادان بکە یەکبەدوای یەکەکە تەواوبکە.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	32	25	18	11	4	−3	−10	−17	−24	−31



2. ڕادەی یازدەیەم لەم یەکبەدوای یەکانەدا بدۆزەوە.


أ −3, −5, −7, −9, ...


ب 9.2, 9.15, 9.1, 9.05, ...

لە خوێندکارەوە بۆ خوێندکار

دەمەوێت پاسادانی بەهای هەر ڕادەیەك بە بەکارهێنانی بژمێری ڕوونکردنەوەیی بکەم. نەخشەی ڕادەی گشتی بخەرە ناو بژمێرەکەوە

(لە نموونە 2) $y = 32 + (x-1)(-7)$

پاشان ئەرکی خشتەکردنی بەکاربێنە بە 1 $(n=1)$ دەستپێبکە هەنگاوێك بەکاربێنە برەکەی 1 بێت، پاشان بەهای ئەو ڕادەیە بخوێنەوە کە دەتەوێت. ئەو بەهای y یە. کە بەرامبەر خانەی ڕادەکەیە.

نموونــــه 3 دۆزینەوەی ڕادە نادیارەکان

ڕادە نادیارەکان لەم یەکبەدوای یەکە ژمارەییە بدۆزەوە. $11, \blacksquare, \blacksquare, \blacksquare, -17$

هەنگاوی 1 بنچینە بدۆزەوە.

$a_n = a_1 + (n-1)d$	یاساکە
$-17 = 11 + (5-1)d$	لەجیاتی دابنێ
$-7 = d$	سادەبکە

هەنگاوی 2 ڕادە نادیارەکان بە بەکارهێنانی $a_1 = 11$ ، $d = -7$ بدۆزەوە.

$$a_2 = 11 + (2-1)(-7) = 4$$
$$a_3 = 11 + (3-1)(-7) = -3$$
$$a_4 = 11 + (4-1)(-7) = -10$$



.3 ڕادە نادیارەکانی یەکبەدوای یەکی ژمارەیی $0, \blacksquare, \blacksquare, \blacksquare, 2$ بدۆزەوە.

لەبەرئەوەی جیاوازی نێوان هەر ڕادەیەك و ڕادەکەی پێش خۆی لە یەکبەدوای یەکی ژمارەییدا جیاوازییەکی نەگۆڕ. بۆیە زانینی دوو ڕادە بەسە بۆ دۆزینەوەی بنچینە.

نموونــــه 4 دۆزینەوەی ڕادەی n ی لەیەکبەدوای یەکی ژمارەییدا کاتێك دووڕادە لە ڕادەکانی زانراوبێ

ڕادەی شەشەم لەم یەکبەدوای یەکە ژمارەییەدا بدۆزەوە ئەگەر بزانیت $a_9 = 120$ ، $a_{14} = 195$

هەنگاوی 1 بنچینە بدۆزەوە.

$a_n = a_1 + (n-1)d$	یاسا کە
$a_{14} = a_9 + (14-9)d$	وا دابنێ $a_n = a_{14}$ و $a_1 = a_9$ (لەجیاتی 1 ، 9 دابنێ)
$a_{14} = a_9 + 5d$	سادەبکە
$195 = 120 + 5d$	لەجیاتی دابنێ
$15 = d$	شیکاربکە

هەنگاوی 2 a_1 بدۆزەوە.

$a_n = a_1 + (n-1)d$	یاسا کە
$120 = a_1 + (9-1)(15)$	لەجیاتی دابنێ
$120 = a_1 + 120$	سادەبکە
$0 = a_1$	شیکاربکە

هەنگاوی 3 یاسای یەکبەدوای یەکەکە بنووسە و بەکاریبهێنە بۆ دۆزینەوەی a_6

$a_n = a_1 + (n-1)d$	یاسا
$a_n = 0 + (n-1)(15)$	لەجیاتی دابنێ
$a_6 = 0 + (6-1)15$	سادەبکە
$= 75$	

ڕادەی شەشەمی یەکبەدوای یەکەکە بریتییە لە 75



.4 ڕادەی یازدەیەمی ئەم یەکبەدوای یەکە ژمارەییانە بدۆزەوە.

أ $a_2 = -133$ و $a_3 = -121$ ب $a_3 = 20.5$ و $a_8 = 13$

لەوانەکانی پێشوودا زنجیرە ژمارەییەکانت نووسینەوەو هەژماری بەهاکانیت کردووە. **زنجیرەی ژمارەیی Arithmetic Series** زنجیرەیەکە یەکبەدوای یەکەکەی ژمارەییە. دەتوانیت بە ئاسانی یاسایەك بدۆزیتەوە بۆ هەژمارکردنی بەهای زنجیرە ژمارەییەکە هەتا ڕادەیەکی دیاریکراو. وەك ئەمەی خوارەوە:

$$\begin{array}{l} S_n = a_1 \quad +(a_1+d)+(a_1+2d)+\ldots+a_n \\ S_n + a_n \quad +(a_n-d)+(a_n-2d)+\ldots+a_1 \\ \hline 2S_n = \underbrace{(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)\ldots+(a_1+a_n)} \end{array}$$

سەرجەمی n بڕ کەهەریەکە یەکسانە بە $a_1 + a_n$

$$2S_n = n(a_1 + a_n)$$

$$S_n = n\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right) \text{ یان } S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$$

فێربە

سەرجەمی n ڕادەی یەکەم لە زنجیرە ژمارەییدا

بەنووسین	بەژمارە	بەجەبری
سەرجەمی n ڕادەی یەکەم لە زنجیرە ژمارەیی بریتییە لە ئەنجامی لێکدانی ژمارەی ڕادەکان لە ناوەندە ژمێرەیی ڕادەی یەکەم و دواڕادە.	سەرجەمی $2+4+6+8+10$ بریتییە لە $S_5 = 5\left(\frac{2+10}{2}\right) = 5(6) = 30$	$S_n = n\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)$ کاتێك n ژمارەی ڕادەکان و a_1 ڕادەی یەکەم و a_n دوا ڕادە بێت.



نموونـــــە 5 دۆزینەوەی بەهای زنجیرە ژمارەیی

سەرجەمی داواکراو لەهەریەکە لەم زنجیرە ژمارەییانەدا بدۆزەوە.

أ S_{15} لە زنجیرەی

$$25+12+(-1)+(-14)+\ldots$$

بنچینە بدۆزەوە.

$$d = 12 - 25 = -13$$

ڕادەی a_{15} بدۆزەوە.

$$a_{15} = 25 + (15-1)(-13)$$
$$= -157$$

S_{15} بدۆزەوە.

$$S_n = n\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)$$

$$S_{15} = 15\left(\frac{25+(-157)}{2}\right)$$

$$= 15(-66) = -990$$

بۆ پاسادان بژمێری ڕوونکردنەوە بەکاربێنە.

```
sum(seq(25+(X-1)
*(-13),X,1,15,1)
)
                -990
```

ب $\sum_{k=1}^{k=12}(3+4k)$

هەردوو ڕادەی a_1 و a_{12} بدۆزەوە.

$$a_1 = 3 + 4(1) = 7$$

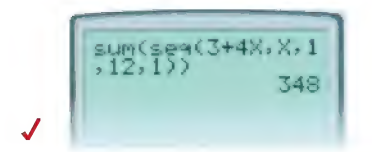
$$a_{12} = 3 + 4(12) = 51$$

S_{12} بدۆزەوە.

$$S_n = n\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)$$

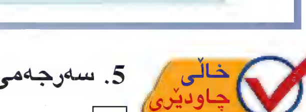
$$S_{12} = 12\left(\frac{7+51}{2}\right)$$
$$= 348$$

بۆ پاسادان بژمێری ڕوونکردنەوە بەکاربێنە.



ئاگاداربە!

ئەم سەرجەمە بەشیانە ناتوانێت سەرجەمی زنجیرە ژمارەیی کۆتایی نەهاتوو بدۆزیتەوە لەبەرئەوەی بەهای ڕادەکان تا ناکۆتا زیاددەکات یان تا ناکۆتا کەمدەکات.



5. سەرجەمی داواکراو لەم یەکبەدوای یەکە ژمارەییانەدا بدۆزەوە.

أ S_{16} لە زنجیرەی $12+7+2+(-3)+\ldots$ **ب** $\sum_{k=1}^{k=15}(50-20k)$

نموونــــه 6 جێبەجێکردن لەشانۆکاندا

ژمارەی کورسییەکانی چواردە ڕیزی یەکەم لە ناوەڕاستی یەکێك لە شانۆ جیهانەکان یەکبەدوای یەکێکی ژمارەیی پێکدەهێنێت.

ڕیزی 1

ڕیزی 2

ڕیزی 3

ڕیزی 4

أ ژمارەی کورسییەکان لە ڕیزی 14 دا چەندە؟

یاساکە بنووسە. $a_1 = 11$ و $d = 1$

$a_n = a_1 + (n-1)d$ — یاسای ڕادەی n بنووسە.

$a_{14} = 11 + (14-1)(1)$ — لە جیاتی دابنێ

$= 11 + 13$

$= 24$ — سادەبکە

ژمارەی کورسییەکانی ڕیزی چواردەهەم دەکاتە 24 کورسی

ب ژمارەی کورسییەکان لەهەر 14 ڕیزەکەدا چەندە؟

S_{14} بدۆزەوە بە بەکارهێنانی یاسای سەرجەمی ڕادەکانی یەکەم لە زنجیرەی ژمارەییدا.

$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$ — یاساکە

$S_{14} = 14\left(\frac{11+24}{2}\right)$ — لەجیاتی دابنێ

$= 14\left(\frac{35}{2}\right) = 245$ — سادەبکە

ژمارەی کورسییەکانی هەر 14 ڕیزەکە دەکاتە 245 کورسی.



چی دەبێت ئەگەر... ؟ وا دابنێ ژمارەی کورسییەکان لەهەر ڕیزێك لەڕیزی دووەمەوە دوو کورسی زیاترە لەوەی پێش خۆی.

أ ژمارەی کورسییەکانی ڕیزی 14 چەندە؟

ب ژمارەی کورسییەکان لەهەر 14 ڕیز چەندە؟

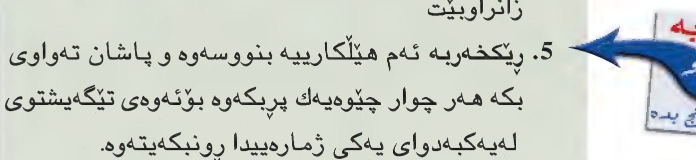
بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. بەراورد لەنێوان یەکبەدوای یەکی ژمارەیی و نەخشەی هێڵی بکە.

2. بنچینەی سالب چی دەگەیەنێت لەیەکبەدوای یەکی ژمارەییدا؟

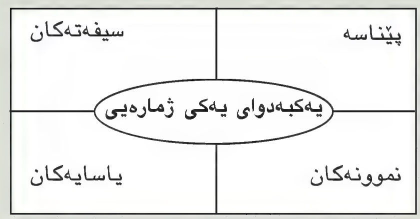
3. چۆن ڕادەی شەشەم دەدۆزیتەوە لە یەکبەدوای یەکی ژمارەیی ئەگەر ڕادەی سێیەم و چوارەمت زانی

4. چۆن بنچینە دەدۆزیتەوە لە یەکبەدوای یەکێکی ژمارەیی کاتێك ڕادەی حەوتەم و دوازدەیەم زانراوبێت



5. ڕێکخەربە ئەم هێڵکارییە بنووسەوە و پاشان تەواوی بکە هەر چوار چێوەیەك پربکەوە بۆئەوەی تێگەیشتوی لەیەکبەدوای یەکی ژمارەییدا ڕونبکەیتەوە.

فێربە



3-6 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** بڕەی $50+40+30+20+10$ بریتییە لە (یەکبەدوای یەکێکی ژمارەیی یان زنجیرە ژمارەیی)

بڕوانە نموونە 1

دیارییکە یەکبەدوای یەککە ژمارەییە یان نا، ئەگەر ژمارەییە بنچینە و ڕادەی دوای خۆی بدۆزەوە.

2 $46, 39, 32, 25, 18, \ldots$ **3** $28, 21, 15, 10, 6, \ldots$

4 $\frac{12}{3}, \frac{10}{3}, \frac{8}{3}, \frac{6}{3}, \frac{4}{3}, \ldots$

بڕوانە نموونە 2

ڕادەی هەشتەم لەهەریەك لەم یەکبەدوای یەکە ژمارەییانە بدۆزەوە.

5 $3, 8, 13, 18, \ldots$ **6** $10, 9\frac{3}{4}, 9\frac{1}{2}, 9\frac{1}{4}, \ldots$

7 $-3.2, -3.4, -3.6, -3.8, \ldots$

بڕوانە نموونە 3

ڕادەی نادیارەکان لەم یەکبەدوای یەکە ژمارەییانە بدۆزەوە.

8 13, ■ , ■ , 25, ... **9** 9, ■ , ■ , ■ , 37, ... **10** 1.4, ■ , ■ , ■ , −1, ...

بڕوانە نموونە 4

ڕادەی نۆیەم لەم یەکبەدوای یەکە ژمارەییانە بدۆزەوە.

11 $a_5=19$ ، $a_4=27$ **12** $a_4=12.6$ ، $a_3=12.2$ **13** $a_6=-11$ ، $a_3=-5$

14 $a_{20}=50$ ، $a_{10}=100$ **15** $a_{11}=-28$ ، $a_7=-42$ **16** $a_8=\frac{1}{2}$ ، $a_4=\frac{3}{4}$

بڕوانە نموونە 5

سەرجەمی داواکراو لەهەر زنجیرەیەك بدۆزەوە.

17 S_{15} لە زنجیرەی $5+9+13+17+\ldots$ **18** $\sum_{k=1}^{k=12}(-2+6k)$

19 S_{18} لە زنجیرەی $3.2+2.9+2.6+2.3+\ldots$

بڕوانە نموونە 6

20 **کرێ** بڵند پەیوەندی بە کۆمپانیایەکی زانیارییەوە کرد، تا بە موچەیەکی ساڵانە کە بڕەکەی 000 000 26 دینارە کاربکات. بە مەرجێك ساڵانە مووچەکەی 000 250 1 دینار زیادبکات.

أ لە ساڵی شەشەمدا مووچەکەی دەبێتە چەند؟

ب کۆی ئەو مووچەیەی لە شەش ساڵی یەکەمدا وەریدەگرێت چەندە؟

ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

ڕاهێنانی ئازاد	
بۆشیکارکردنی پرسیارەکان	تەماشای نموونەکە
23-21	1
26-24	2
29-27	3
32-30	4
35-33	5
36	6

دیارییکە یەکبەدوای یەککە ژمارەییە یان نا، ئەگەر ژمارەییە، بنچینەکەی و ڕادەی دواتری بدۆزەوە.

21 $288, 144, 72, 36, 18, \ldots$ **22** $-2, -12, -22, -32, -42, \ldots$

23 $0.99, 0.9, 0.81, 0.72, \ldots$

ڕادەی یازدەیەم لەهەر یەکبەدوای یەکێکی ژمارەییدا بدۆزەوە.

24 $12, 11.9, 11.8, 11.7, \ldots$ **25** $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, \ldots$

26 $-3.0, -2.5, -2.0, -1.5, \ldots$

ڕادەی نادیار لەهەریەك لەم یەکبەدوای یەکە ژمارەییە بدۆزەوە.

27 77, ■ , ■ , ■ , 33, ... **28** −29, ■ , ■ , −2, ...

29 2.3, ■ , ■ , ■ , 1.5, ...

ڕادەی دوازدەیەم لەهەر یەکبەدوای یەکێکی ژمارەیی بدۆزەوە.

30 $a_5=16.2$ ، $a_4=18.4$ **31** $a_8=46$ ، $a_4=-2$ **32** $a_{25}=-58$ ، $a_{22}=-49$

سەرجەمی داواکراو لەهەر زنجیرە ژمارەییەکدا بدۆزەوە.

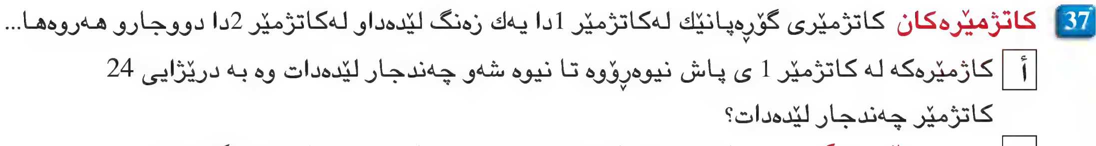
33 S_{15} لە زنجیرەی $-18+(-16)+(-14)+\ldots$ **34** $\sum_{k=1}^{k=20}(88-3k)$ **35** $\sum_{k=1}^{k=14}\left(14-\frac{1}{2}k\right)$

36 **بەکاربردن** کاژین پۆشاکێکی بەقیست کڕی، لە هەفتەی یەکەمدا 15000 دیناریدا بەفرۆشیارەکە. وا ڕێککەوتن هەفتانە 5000 دینار بۆ قیستەکانی تر زیادبکات.

أ لە هەفتەی نۆیەمدا دەبێت چەند پارەبدات؟

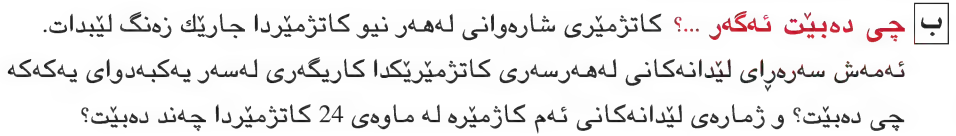
ب سەرجەمی ئەو پارەیەی لە کۆتایی هەفتەی نۆیەمدا داویەتی چەندە؟

37 **کاتژمێرەکان** کاتژمێری گۆڕەپانێك لەکاتژمێر 1دا یەك زەنگ لێدداو لەکاتژمێر 2دا دووجارو هەروەها...



أ کاژمێرەکە لە کاتژمێر 1 ی پاش نیوەڕۆوە تا نیوە شەو چەندجار لێدەدات وە بە درێژایی 24 کاتژمێر چەندجار لێدەدات؟

ب **چی دەبێت ئەگەر ...؟** کاتژمێری شارەوانی لەهەر نیو کاتژمێردا جارێك زەنگ لێبدات.



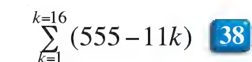
ئەمەش سەرەڕای لێدانەکانی لەهەرسەری کاتژمێرێکدا کاریگەری لەسەر یەکبەدوای یەکەکە چی دەبێت؟ و ژمارەی لێدانەکانی ئەم کاژمێرە لە ماوەی 24 کاتژمێردا چەند دەبێت؟

دەروازەیەك

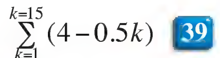
لەسەر کاتژمێر

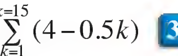
لە گرنگترین شتە دیارەکانی شاری لەندەنی پایتەختی بەریتانیا کاتژمێرە بەناوبانگەکەی بیگ بنە کە دەکەوێتە گۆڕەپانی پەرلەمانی بەریتانیاوە. ناوی ئەو کاتژمێرە Big Ben بۆ زەنگە زەبەلاحەکەی دەگەڕێتەوە کە بارستاییەکەی 13.8تەنە بۆ ئاگاداری لە کات لێدەدات.

سەرجەمی داواکراو بۆهەر زنجیرەیەك بدۆزەوە.

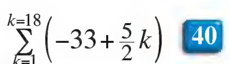


38 $\sum_{k=1}^{k=16}(555-11k)$





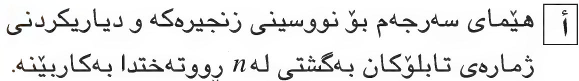
39 $\sum_{k=1}^{k=15}(4-0.5k)$



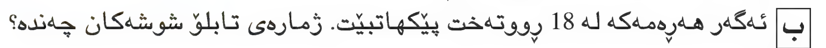
40 $\sum_{k=1}^{k=18}\left(-33+\frac{5}{2}k\right)$

41 S_{16} لە زنجیرەی $7.5+7+6.5+\ldots$ **42** S_{18} لە زنجیرەی $2+9+16+23+\ldots$

43 **تەلار** هەرەمی لۆڤەر لە پاریس لەبەردەم مۆزەخانەی لۆڤەر لە هەشتایەکانی سەدەی بیستەمدا دروستکراوە. ئەو هەرەمە بە تابلۆی شووشەبەندکراوە. هەرەمەکە لەچەند ڕووتەختێك پێکهاتووە ڕووتەختەکەی سەرەوە 4 تابلۆی تێدایە ژمارەی تابلۆکان تا بەرەو خواربێت 4 زیاددەکات.



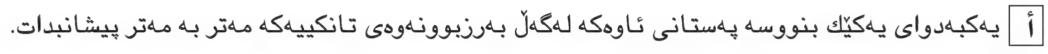
أ هێمای سەرجەم بۆ نووسینی زنجیرەکە و دیاریکردنی ژمارەی تابلۆکان بەگشتی لە n ڕووتەختدا بەکاربێنە.



ب ئەگەر هەرەمەکە لە 18 ڕووتەخت پێکهاتبێت. ژمارەی تابلۆ شوشەکان چەندە؟

ج لە ڕاستیدا ژمارەی تابلۆ بەکارهاتووەکان 11 تابلۆی کەمترە لەوەی هەژمارت کرد. ئەویش بۆ دروستکردنی دەروازەی هەرەمەکە. ژمارەی ئەو تابلۆیانەی لەهەرەمی لۆڤەردا هەیە چەندە؟

44 **فیزیا** تانکی ئاو لە بەرزیدا دادەنرێت تا بە ئاسانی ئاو بگاتە هەر ماڵێك، هەتا تانکی ئاوەکە مەترێك بەرزتر بێتەوە پەستانی ئاوەکە 9.73 کیلۆ باسکال زیاددەکات.

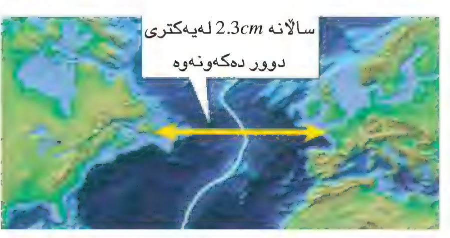


أ یەکبەدوای یەکێك بنووسە پەستانی ئاوەکە لەگەڵ بەرزبوونەوەی تانکییەکە مەتر بە مەتر پیشانبدات.

ب نزمترین بەرزی تانکییەکە چەندە تا پەستانی ئاوەکە دەکاتە 345 کیلۆ باسکال.

ج نزمترین بەرزی تانکییەکە چەندە تا پەستانی ئاوەکە دەکاتە 690 کیلۆ باسکال کە باشترین ئاستی ناسراوە بۆ پەستانی ئاو؟

د یەکبەدوای یەکەکە بە ڕوونکردنەوەیی بنوێنە. پەستانی ئاوەکە لەهەردوو لقی ب و ج شلۆڤە بکە.



45 **زەویناسی** كیشوەری ئەمریكای باكوور ساڵانە لە كیشوەری ئەوروپا دوور دەكەوێتەوە.

أ پاش 50 ساڵ كیشوەری ئەمریكای باكوور چەند لە ئەوروپا دوور دەكەوێتەوە.

ب پاش چەند ساڵ ئەو دوو كیشوەرە بە لایەنی كەم 1 كیلۆمەتر لە یەكتری دوور دەكەونەوە.

46 دەتوانیت نموونەی (سامپڵی) هەرەمی یەك سەر لەدوو چین پێكهاتبێت بە بەكارهێنانی 4 هەرەمی بنكە سێینە دروستبكەی بۆئەوەی سامپڵێكی چەند سەر لە دوو چین پێكهاتبێت دروستبكەیت پێویستە هەر جارێك 3 هەرەمی بۆ زیاد بكەیت، هەروەك لە وێنەی بەرامبەردا پیشاندراوە.

أ چەند هەرەمی بنكە سێینەت پێویستە بۆ دروستكردنی سامپڵێكی دوو چینی 20 سەری هەبێت؟

ب سۆلاڤ 20 سامپڵی لەدوو چین پێكهاتوو كە سەرەكانی لە 1 تا 20 سەر بوو یەك لەدوای یەك دروستكرد. چەند هەرەمی بنكە سێینەی بەكارهێناوە.

47 **كرێ** یانەیەكی تۆپی سەبەتە 395 000 دینار لەهەفتەی یەكەمدا دەدات بە ڕاهێنەرەكەی. و بۆ هاندانی ڕاهێنەرە باشەكان لەهەر هەفتەیەكدا 45 000 دیناری زیادكرد. ڕاهێنەرێك لەدوا هەفتەی وەرزەكەدا 755 000 دیناری وەرگرت. ئایا ئەم وەرزە چەند هەفتەی خایاندووە؟

48 **بیركردنەوەی ڕەخنەگرانە** بۆ نوسینی ڕێسای یەكبەدوای یەكی ژمارەیی، كەمترین ڕادەكە پێویستە بزانیت چەندە؟ بۆ نووسینی هاوكێشەی ڕاستەهێڵێك پێویستە چەند خاڵت هەبێت؟ ئایا پەیوەندی لەنێوان ئەو دوو وەڵامەدا هەیە؟ ڕوونیبكەوە.

49 **بنووسە** بنچینەی یەكبەدوای یەكێكی ژمارەیی، ژمارەیەكی موجەبە. ڕادەی a_n چی بەسەردێت ئەگەر بەهای n بەردەوام زیادبكات؟ چی بەسەردێت ئەگەر بنچینەكە سالب بێت.



50 كام لەمانە یەكبەدوای یەكی ژمارەییە؟

أ $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ ج $2, 4, 8, 16, \ldots$

ب $2.2, 4.4, 6.6, 8.8, \ldots$ د $2, 4, 7, 11, \ldots$

51 یەكێك لە ڕێكخەری ئاهەنگەكان 45 هەزار دینار وەردەگرێت. بۆ هەریەكێكی بەشدار بووی ئاهەنگەكە 12 هەزار دیناری بۆ زیاد دەكرێت. كام لەم یەكبەدوای یەكانەی خوارەوە بارەكە دەردەبڕێت؟

أ $a_n = 45 + 12(n-1)$ ج $a_n = 57 + 12n$

ب $45, 57, 69, 81, 93, \ldots$ د $57, 69, 81, 93, 105, \ldots$

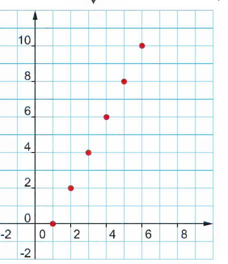
52 كام لەمانەی خوارەوە ڕادەی نادیاری یەكبەدوای یەكە ژمارەییەكەیە $4, ■, ■, ■, 40$

أ $11, 22, 33$ ج $14, 24, 34$

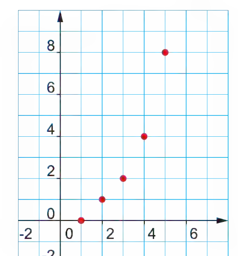
ب $13, 22, 31$ د $16, 24, 36$

53 کام لەم هێڵکارییە ڕوونکردنەوەییانە یەکبەدوای یەکی ژمارەیی دەنوێنێت؟

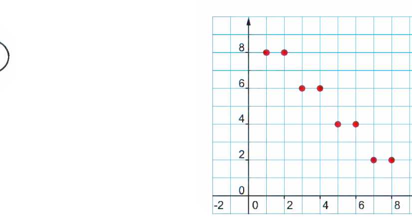
(أ)



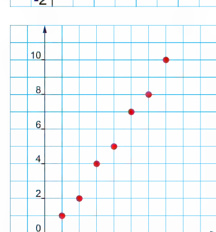
(ج)



(ب)



(د)



54 کام لەمانەی خوارەوە سەرجەمی زنجیرەی $4+7+10+13+16+19$ دەنوێنێت؟

أ $\sum_{k=1}^{k=6} 19-3k$ ب $\sum_{k=1}^{k=6} (22-3k)$

ج $\sum_{k=1}^{k=6} 19-4k$ د $\sum_{k=1}^{k=6} \left(22-3(k-1)\right)$

55 **کورتە وەڵام** ڕادەی سیزدەهەم لەیەکبەدوای یەکی ژمارەیی ... ,42 ,46 ,50 ,54 دا چەندە؟

بەرەنگاری و فراوانکردن

56 دوو ڕادەی a_n وa_m ت لە ڕادەکانی یەکبەدوای یەکی ژمارەییدا هەیە.

أ ڕوونیبکەوە بنچینەی ئەم یەکبەدوای یەکە ژمارەییە دەکاتە $d=\frac{a_n-a_m}{n-m}$.

ب ڕێسا نوێیەکە بۆ دۆزینەوەی بنچینە لەو یەکبەدوای یەکە ژمارەییە بەکاربێنە کە $a_{12}=88$ و $a_{36}=304$

57 ڕێسایەك بنووسە جگە لە ڕادەی یەکەم ڕادەی تری تێدانەبێت بۆ هەژمارکردنی سەرجەمی یەکبەدوای یەکی ژمارەیی، کەی بەکارهێنانی ئەو ڕێسایە گونجاو دەبێت؟

58 سەرجەمی 3 ڕادەی یەکەمی یەکبەدوای یەکی ژمارەیی یەکسانە بە 60 و ئەنجامی لێکدانیان یەکسانە بە 7 500 ئەو سێ ڕادەیە کامانەن.

59 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** مەبەست لە یەکسان بوونی$a_{2n}=2a_n$ چییە؟

پێداچوونەوەی لولپێچی

دیاریبکە ئایا ئەم نەخشە توانییانە نەخشەیەکی گەشەبوونە یان پووکانەوەیە. (وانەی 4 - 1)

60 $f(x)=1.25(0.75)^x$ **61** $f(x)=1.43(5.32)^x$ **62** $f(x)=0.92(0.64)^x$

63 **دەنگەکان** نەخشەی $L=10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ ڕێسایەکە بۆ پێوانی ئاستی توندی دەنگ بەکاردێت. کاتێك L ئاستی توندی دەنگە بە دیسبل و I توندی دەنگ وI_0 توندی بەرگوێ کەوتن بێت، ئاستی توندی دەنگێك بدۆزەوە. کە توندییەکەی $10^{9.2}I_0$ بێت.

هەر زنجیرەیەك بە بەکارهێنانی یاسای سەرجەم بنووسە. (وانەی 6 - 2)

64 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ **65** $\frac{4}{5}+\frac{8}{5}+\frac{12}{5}+\frac{16}{5}+4$

66 $-1+2+7+14+23$ **67** $-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}-1-\frac{4}{3}-\frac{5}{3}$

بەشی 6

تاقیکردنەوەی نیوەی بەش

1-6 دەروازەیەك بۆ یەکبەدوای یەکەکان

پێنج ڕادەی یەکەمی هەریەکە لەم یەکبەدوای یەکانە بدۆزەوە.

1. $a_n = \frac{2}{3}n$
2. $a_n = 4^{n-1}$
3. $a_1 = -1.3$ ، $a_n = 2a_{n-1} - 12$
4. $a_n = n^2 - 2n$

جۆری ئەم یەکبەدوای یەکانە دیاریبکە.

5. $8, 11, 14, 17, 20, \ldots$
6. $-2, -8, -18, -32, -50, \ldots$
7. $1\,000, 200, 40, \frac{8}{5}, \ldots$
8. $437, 393, 349, 305, 261, \ldots$
9. پاسێك بە خێرایی $55\ \text{km/h}$ دەڕوات. پاسەکە لە کیلۆمەتری 18 ەوە دەستی بە جووڵە کرد و پارێزگاری لە خێراییەکەی کرد. دوای 4 کاتژمێر پاسەکە لەکام کیلۆمەتری ڕێگاکەدا دەبێت؟ یەکبەدوای یەکەکە بە ڕوونکردنەوەیی لە n کاتژمێردا بنوێنە، شێوازەکە باسبکە.

2-6 زنجیرەکان و هێمای سەرجەم

زنجیرەکە بکەوە و بەهایەکەی هەژماربکە.

10. $\sum_{k=1}^{k=4} (-14 - 2k)$
11. $\sum_{k=1}^{k=4} \left(\frac{k}{k+2}\right)$
12. $\sum_{k=1}^{k=5} (-1)^k (k^2 - 2)$

بەهای زنجیرەکە بدۆزەوە.

13. $\sum_{k=1}^{k=5} \frac{1}{2}$
14. $\sum_{k=1}^{k=40} k^2$
15. $\sum_{k=1}^{k=15} k$
16. ژمارەی کورسییەکانی ڕیزی یەکەمی شانۆیەك 20 کورسییە، لە ڕیزێکەوە بۆ ئەو ڕیزەی لەدوای دێت ژمارەی کورسییەکان 3 کورسی زیاد دەکات. ژمارەی کورسییەکان لە شانۆکەدا چەندە؟ ئەگەر بزانیت ژمارەی ڕیزەکان 12 ڕیزبێت.

3-6 یەکبەدوای یەکەکان و زنجیرە ژمارەییەکان

ڕادەی هەشتەمی هەر یەکبەدوای یەکێکی ژمارەیی بدۆزەوە.

17. $10.00, 10.11, 10.22, 10.33, \ldots$
18. $-5, -13, -21, -29, \ldots$
19. $a_2 = 57.5$ و $a_5 = 80$
20. $a_{10} = 141$ و $a_{13} = 186$

ڕادەی نادیار لەهەر یەکبەدوای یەکێکی ژمارەیی بدۆزەوە.

21. $-23, \square, \square, -89, \ldots$
22. $31, \square, \square, \square, 79, \ldots$

سەرجەمی داواکراو لەهەر زنجیرە ژمارەییەك بدۆزەوە.

23. S_{10} لە زنجیرەی $40 + 30 + 20 + 10 + \ldots$
24. $\sum_{k=1}^{k=8} 4k$
25. $\sum_{k=1}^{k=11} (0.5k + 5.5)$
26. S_{14} لە زنجیرەی $-6 - 1 + 4 + 9 + \ldots$
27. پێشڕەو بڕیاریدا هەندێك لەو پارەیەی باوکی دەیداتێ لە دەخیلەیەکدا پاشەکەوتی بکات. بڕیاریدا لەهەفتەی یەکەمی ساڵەکەدا هەزار دینار بخاتە دەخیلەکەیەوە 1500 دینار لەهەفتەی دووەمدا و 2 هەزار دینار لە هەفتەی سێیەمدا و هەروەها ... لەدوای هەفتەی کۆتایی ساڵدا چەند پارە دەخاتە دەخیلەکەیەوە. لە کۆتایی ساڵدا دەخیلەکە چەندی تێدابێت؟ (ئەگەر بزانیت ساڵێك 52 هەفتەی تێدایە)

4-6 یەکبەدواییەك و زنجیرە ئەندازییەکان Geometric sequences and Series

ئامانجەکان

- دۆزینەوەی ڕادەکانی یەکبەدوای یەکە ئەندازەییەکان لەگەڵ دۆزینەوەی ناوەندی ئەندازەیی
- دۆزینەوەی بەهایەکانی زنجیرە ئەنازەییەکان.

زاراوەکان Vocabulary

یەکبەدوای یەکی ئەندازەیی Geometric Sequence

ناوەندی ئەندازەیی Geometric mean

زنجیرەی ئەندازەیی Geometric Series

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

پلاندانەرانی یارییە وەرزشییەکان یەکبەدوای یەك و زنجیرە ئەندازەییەکان بۆ دیاریکردنی ژمارەی یارییەکان لەهەر خولێکدا بەکاردێنن (نموونە 6)

سیرینا ولیامز لەنێوان 128 یاریکەردا لەتۆپی تێنسی قارەمانێتی کچان لە ویمبلدون ساڵی2003 دا پلەی یەکەمی بەدەستهێنا، لەکۆتایی هەر یارییەکی نێوان دوویاریکەردا براوە بەردەوام دەبێت بەڵام دۆڕاوەکە دەردەکرێت. ئەمەش ئەوە دەگەیەنێت کە ژمارەی یاریکەرەکان لە کۆتایی هەر خولێکدا بۆ نیوە کەمدەکات. دەکرێت ئەو یاریکەرانەی لە کۆتایی هەر خولێکدا دەمێنێتەوە بە بەکارهێنانی یەکبەدوای یەکی ئەندازەیی دیاریبکرێن. لە **یەکبەدوای یەکی ئەندازەییدا Geometric Sequence** ڕێژەی هەر ڕادەیەك بۆ ڕادەکەی پێش خۆی نەگۆڕە و جیاوازە لە 1 . بەو ڕێژەیە دەوترێت **بنچینە Common ratio** بنچینەی یەکبەدوای یەکە ئەندازەییەکەی سەرەوە بریتییە لە $\frac{1}{2}$.

خولەکە	1	2	3	4
ژمارە	128	64	32	16
ڕێژەکان		$\frac{64}{128}=\frac{1}{2}$	$\frac{32}{64}=\frac{1}{2}$	$\frac{16}{32}=\frac{1}{2}$

ژمارەی یاریکەران لەخولی ویمبلدون

بیرت بێتەوە نەخشە توانییەکان ڕێژەی هاوبەش (بنچینە)یان هەیە، کاتێك جووتە ڕێکخراوی (n,a_n)ی یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی بە ڕوونکردنەوەیی دەنوێنێت. ئەو خاڵانەی دیاریت کردووە. دەکەونە سەر چەماوەیەکی توانی بەو شێوەیە دەتوانێت سەیری یەکبەدوای یەکی ئەندازەیی بکەیت هەروەك نەخشەیەکی توانی بوارەکەی کۆمەڵەی ژمارە سروشتییەکانە.

نموونە 1 جیاکردنەوەی یەکبەدوای یەکە ئەندازەییەکان

دیاریبکە یەکبەدوای یەکەکە ئەندازەییە یان نا، ئەگەر ئەندازەییە بنچینەکەی و ڕادەی دوای ڕادە دراوەکە بدۆزەوە.

أ 8, 12, 18, 27, ...

8 12 18 27

جیاوازییەکان 4 6 9

ڕێژەکان $\frac{3}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{3}{2}$

یەکبەدوای یەکەکە ئەندازەییە بنچینەکەی $r=\frac{3}{2}$ هێمای r بۆ بنچینەی یەکبەدوای یەکی ئەندازەیی دادەنرێت

ب 8, 16, 24, 32, ...

8 16 24 32

جیاوازییەکان 8 8 8

ڕێژەکان 2 $\frac{3}{2}$ $\frac{4}{3}$

یەکبەدوای یەکەکە ژمارەییە بنچینە $d=8$ هێمای d بۆ بنچینەی یەکبەدوای یەکی ژمارەیی دادەنرێت

ج 6, 10, 15, 21, ...

6 10 15 21

جیاوازییەکان 4 5 6

ڕێژەکان $\frac{5}{3}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{7}{5}$

یەکبەدوای یەکەکە نە ژمارەییە و نە ئەندازەییشە



1. دیاریبکە یەکبەدوای یەکەکە ئەندازەییە یان نا ئەگەر ئەندازەییە بنچینەکەی و ڕادەی دوای ڕادە دراوەکە بدۆزەوە.

أ $\frac{1}{4}, \frac{1}{12}, \frac{1}{36}, \frac{1}{108}, ...$

ب 1.7, 1.3, 0.9, 0.5, ...

ج −50, −32, −18, −8, ...

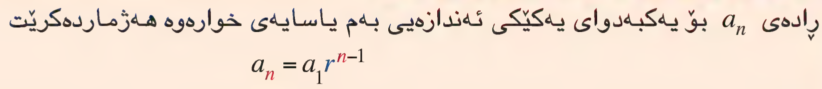
لە یەکبەدوای یەکی ئەندازەییدا هەر ڕادەیەك لە ڕادەکانی بریتییە لە ئەنجامی لێکدانی ئەو ڕادەیەی پێش خۆی هاتووە لە بنچینەکەی، ئەمەش پێناسەیەکی نادیاری ئەم یەکبەدوای یەکەت بەم شیوەیەی خوارەوە دەداتێ:

$$\underset{\text{ڕادەی } n}{a_n} = \underset{\text{ڕادەی پێش خۆی}}{a_{n-1}}\ \underset{\text{بنچینە}}{r}$$

هەروەها دەتوانیت پێناسەی دیار بۆ دۆزینەوەی ڕادەی nی یەکبەدوای یەکە ئەندازەییەکە بەکاربێنیت. هەر ڕادەیەك بریتییە لە ئەنجامی لێکدانی ڕادەی یەکەم لە هێزێك لە هێزەکانی بنچینەکە. هەروەك لە خشتەی خوارەوە پێشاندراوە.

ژمارەی یاریکەرەکان لەهەر خولێکی ویمبلدون					
خولەکە	1	2	3	4	n
ژمارەی یاریکەران	128	64	32	16	a_n
ڕێساکە	$a_1 = 128\left(\frac{1}{2}\right)^0$	$a_2 = 128\left(\frac{1}{2}\right)^1$	$a_3 = 128\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$a_4 = 128\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$a_n = 128\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$





یاسای گشتی یەکبەدوای یەکە ئەندازەییەکان

ڕادەی a_n بۆ یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی بەم یاسایەی خوارەوە هەژماردەکرێت

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

کاتێك a_1 ڕادەی یەکەمی و r بنچینەکەی یەکبەدوای یەکەکە بێت.

نموونـــــە 2

دۆزینەوەی ڕادەی n لە یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی

ڕادەی نۆیەم لە یەکبەدوای یەکی ئەندازەیی ... ,80–, 40, 20–, 10, 5– دا بدۆزەوە.

هەنگاوی 1 بە بەکارهێنانی یاساکە بنچینە بدۆزەوە. $r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{10}{-5} = -2$

هەنگاوی 2 ڕادەی نۆیەم هەژماربکە بە بەکارهێنانی یاسا

$a_n = a_1 r^{n-1}$	یاساکە
$a_9 = -5(-2)^{9-1}$	لە جیاتی دابنێ
$a_9 = -5(256) = -1280$	سادەبکە

ڕادەی نۆیەم لەم یەکبەدوای یەکە بریتییە لە -1280

ساغبکەوە یەکبەدوای یەکەکە تەواوبکە.

$a_5 = -80$

$a_6 = -80(-2) = 160$

$a_7 = 160(-2) = -320$

$a_8 = -320(-2) = 640$

$a_9 = 640(-2) = -1280$ ✓



2. ڕادەی نۆیەم لەهەریەکە لەم یەکبەدوای یەکە ئەندازەییانە بدۆزەوە.

أ $\frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{3}{16}, -\frac{3}{32}, \frac{3}{64}, \ldots$

ب $0.001, 0.01, 0.1, 1, 10, \ldots$

نموونـــــه 3 دۆزینەوەی ڕادەی n ی یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی بەزانینی دووڕادە لە ڕادەکانی

ڕادەی دەیەم لەو یەکبەدوای یەکە ئەندازەییەدا بدۆزەوەکە $a_5 = 96$ و $a_7 = 384$

هەنگاوی 1 بنچینەکە بدۆزەوە.

$a_7 = a_5 r^{7-5}$	یاساکە
$a_7 = a_5 r^2$	سادەبکە
$384 = 96r^2$	لەجیاتی دابنێ
$4 = r^2$	هەردوولا دابەشی 96 بکە
$\pm 2 = r$	ڕەگی دووجای هەردوولا وەربگرە

ئاگاداربە!

کاتێك دوو ڕادە لە ڕادەکانی یەکبەدوای یەکەکە دراو بێت. دڵنیابە لەوەی کە بەها موجەب و سالبەکانی r وەرگرتووە.

هەنگاوی 2 a_1 بدۆزەوە.

لەهەر بارێك لە بارەکانی r بە تەنها بکۆڵەوە.

$a_n = a_1 r^{n-1}$	$a_n = a_1 r^{n-1}$	یاساکە
$96 = a_1(2)^{5-1}$	$96 = 6(-2)^{5-1}$	لەجیاتی دابنێ
$6 = a_1$	$6 = a_1$	سادەبکە

هەنگاوی 3 یاسای یەکبەدوای یەکەکە بنووسە بۆ دۆزینەوەی a_{10} بەکاربهێنە.

$a_n = a_1 r^{n-1}$	$a_n = a_1 r^{n-1}$	یاساکە
$a_n = 6(2)^{n-1}$	$a_n = 6(-2)^{n-1}$	لەجیاتی دابنێ
$a_{10} = 6(2)^{10-1}$	$a_{10} = 6(-2)^{10-1}$	لەجیاتی n ، 10 دابنێ
$a_{10} = 3072$	$a_{10} = -3072$	سادەبکە

ڕادەی دەیەم لەم یەکبەدوای یەکە بریتییە لە 3072 یان 3072−



3. ڕادەی حەوتەم لەهەر یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی بدۆزەوە.

أ $a_4 = -8$ و $a_5 = -40$ ب $a_2 = 768$ و $a_4 = 48$

بۆیە ناوەندە ئەندازەیی بۆ دوو ژمارەی موجەبی وەك x ، y بەم شێوەی پێناسە دەکرێت ئەگەر $\sqrt{xy}$

a ، b ، c سێ ڕادەی موجەبی لەدوای یەکتر، لەیەکبەدوایەکی ئەندازەیی ئەوا $b = \sqrt{ac}$

ناوەندە ئەندازەییەکان لە یەکبەدوای یەکی ئەندازەییدا ئەو ڕادانەن دەکەونە نێوان دوو ڕادەوە کە بەدوای یەکدا نەهاتبن.



ناوەندە ئەندازەیی

لەهەر یەکبەدوای یەکی ئەندازەیی کە ڕادەکانی موجەبن هەر ڕادەیەك ناوەندی ئەندازەیی یە بۆ دوو ڕادەکەی پێش خۆی و پاش خۆی.

نموونـــــه 4 دۆزینەوەی ناوەندە ئەندازەیی

ناوەندە ئەندازەیی بۆهەردوو ژمارەی $\frac{1}{32}$ و $\frac{1}{2}$ بدۆزەوە.

$$\sqrt{ab} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{32}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{64}} = \frac{1}{8}$$



4. ناوەندە ئەندازەیی بۆ دوو ژمارەی 16 و 25 بدۆزەوە.

هەروەك زنجیرە ژمارەییەكان **زنجیرەی ئەندازەییش Geometric Series** بریتییە لە زنجیرەی یەكبەدوای یەكە ئەندازەییەكەی. دەتوانیت بە ئاسانی یاسایەك بۆ هەژماركردنی بەهای زنجیرە ئەندازەییەكە تا ڕادەیەكی دیاریكراو بەم شێوەیەی خوارەوە بدۆزیتەوە:

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \ldots + a_1 r^{n-1}$$

$$-rS_n = \quad -a_1 r - a_1 r^2 - \ldots - a_1 r^{n-1} - a_1 r^n$$

$$S_n - rS_n = a_1 - a_1 r^n$$

$$S_n(1-r) = a_1(1-r^n)$$

$$S_n = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$$

فێربە و سەرنج بدە

سەرجەمی ڕادە یەكەمەكان لە زنجیرەیەكی ئەندازەیی

سەرجەمی ڕادە یەكەمەكان (S_n) لە زنجیرە ئەندازەیی $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ دا بەم یاسایە هەژمار دەكرێت.

$$S_n = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right);\ r \neq 1$$

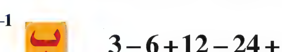
كاتێك a_1 ڕادەی یەكەمی یەكبەدوای یەكەكە و r بنچینەكەی بێت.



نموونە 5 دۆزینەوەی سەرجەمی زنجیرە ئەندازەیی

سەرجەمی داواكراو بۆهەر زنجیرە ئەندازەییەك بدۆزەوە.

أ S_7 لە زنجیرەی $3 - 6 + 12 - 24 + \ldots$



هەنگاوی 1 بنچینەكە بدۆزەوە

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-6}{3} = -2$$

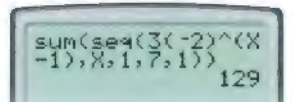
هەنگاوی 2 S_7 بدۆزەوە كاتێك $a_1 = 3$ و $r = -2$ و $n = 7$

$$S_n = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$$

$$S_7 = 3\left(\frac{1-(-2)^7}{1-(-2)}\right)$$

$$= 3\left(\frac{1-(-128)}{3}\right) = 129$$

بۆ پاساندان بژمێری ڕوونكردنەوەیی بەكاربهێنە.



```
sum(seq(3(-2)^(X
-1),X,1,7,1))
            129
```

ب $\sum_{k=1}^{k=5}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

هەنگاوی 1 ڕادەی a_1 بدۆزەوە.

$$a_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^{1-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$$

هەنگاوی 2 S_5 بدۆزەوە

$$S_n = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$$

$$S_5 = 1\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^5}{1-\left(\frac{1}{3}\right)}\right)$$

$$= \frac{1-\frac{1}{243}}{\frac{2}{3}} \approx 1.49$$

بۆ پاساندان بژمێری ڕوونكردنەوەیی بەكاربهێنە.

```
sum(seq((1/3)^(X
-1),X,1,5,1))
      1.49382716
```

لەبیرت بێت

ئەم كۆمەڵانە بەشە كۆمەڵەن لەبەرئەوەی هەریەكەیان لە كۆمەڵە ڕادەیەكی كۆتایی هاتوو پێكهاتووە، لە وانەی 5-6 دا فێردەبیت چۆن سەرجەمی هەندێك لە زنجیرە دوا نەهاتووەكان بدۆزیتەوە.



5. سەرجەمی داواكراو لەهەر زنجیرە ئەندازەییەكدا بدۆزەوە.

أ S_8 لە زنجیرە $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$ ب $\sum_{k=1}^{k=6} -3(2)^{k-1}$

نموونـــــه 6



جیبەجیکردن لە وەرزشدا



لە خولی ویمبلدون بۆ تۆپی تێنسی سەرزەوی 128 یاریکەر بەشداریان کرد. قارەمانەتییەکە بەردەوام بوو تا یەك براوە مایەوە. چەند یاری لە قارەمانێتییەکە ئەنجامدرا.

هەنگاوی 1 یەکبەدوای یەکەکە بنووسە.

بنووسە n = ژمارەی خولەکان

a_k = ژمارەی یارییەکانی خولی k

S_n = کۆی ژمارەی یارییەکان لە n خولدا

$$a_n = 64\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

خولی یەکەم 64 یاریە، بۆیە $a_1 = 64$، لەبەرئەوەی ژمارەی یارییەکان لەهەر خولێکدا نیوەی ژمارەی یارییەکانی خولی پێشوو دەبێت. بۆیە $r = \frac{1}{2}$

هەنگاوی 2 ژمارەی خولەکان بدۆزەوە

$1 = 64\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ خولی کۆتایی یەك یاری ئەنجام دەدرێت.

$\frac{1}{64} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ بەشی توانی لە برەکە جیابکەوە، بە دابەشکردن بەسەر 64 دا.

$\left(\frac{1}{2}\right)^{6} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $\frac{1}{64}$ بەشێوەی توانێك لە توانەکانی $\frac{1}{2}$ بنووسە.

$6 = n - 1$ توانەکان یەکسان بکە

$7 = n$ سادەبکە

هەنگاوی 3 کۆی گشتی یارییەکان بدۆزەوە.

$$S_7 = 64\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^7}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}\right) = 127$$

یاسای سەرجەمی زنجیرە ئەندازەیی بەکاربهێنە

خولەکە 127 یاری ئەنجامداوە.



خاڵی چاودێری

کۆمپانیایەکی گەورە ساڵانە 84 000 000 دینار کرێی بارەگاکەی دەدات، ئەو برە ساڵانە 8% زیاد دەکات لە ماوەی 6 ساڵدا کۆمپانیاکە چەند پارە دەدات؟

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. سێ ڕادەی دوای ڕادەی یەکەمی یەکبەدوای یەکی ئەندازەیی... ,6 ,3 بدۆزەوە، پاشان سێ ڕادەی دوای دوو ڕادەی یەکەمی یەکبەدوای یەکی ژمارەیی... ,6 ,3 بدۆزەوە.
2. بەراورد لەنێوان ناوەندی ژمێرەیی و ناوەندە ئەندازەیی دوو ژمارەی 4 و 10 دا بکە.
3. ڕێکخەرە هێڵکارییەکەی بەرامبەر دروستبکەوە و پاشان تەواوی بکە. هەر چوارچێوەیەك پربکەوە بەجۆرێك ئەوەی لە یەکبەدوای یەکە ئەندازەییەکان تێگەیشتووی نیشانیبدات.

سیفەتەکان	پێناسە
یەکبەدوای یەکە ئەندازەییەکان	
یاسایەکان	نموونە



4-6 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** لە یەکبەدوای یەکی ئەندازەییدا ئەو ڕادەیەی دەکەوێتە نێوان دوو ڕادەوە کە دوای یەك نەهاتبن بریتییە لە ـــــ؟ـــــ (ناوەندی ژمێرەیی یان ناوەندی ئەندازەیی).

بڕوانە نموونە 1

دیاریبکە هەریەکە لەم یەکبەدوای یەکانە ئەندازەیین یان ژمارەیین یان هیچیان نیین، ئەگەر ئەندازەییە بنچینەکەی و ڕادەی داهاتووی بدۆزەوە.

2 $-10, -12, -14, -16, \ldots$

3 $\frac{1}{2}, 1, 2, 3, \ldots$

4 $-320, -80, -20, -5, \ldots$

بڕوانە نموونە 2

ڕادەی دەیەمی هەر یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی بدۆزەوە.

5 $2, 6, 18, 54, 162, \ldots$

6 $5000, 500, 50, 5, 0.5, \ldots$

7 -2 ، 1 ، -0.5 ، -0.25 ، -0.125 ...

بڕوانە نموونە 3

ڕادەی شەشەمی ئەو یەکبەدوای یەکە ئەندازەییە بدۆزەوە کە دوو ڕادە دراوە ناسراوە.

8 $a_4 = -12$ ، $a_5 = -4$

9 $a_2 = 4$ ، $a_5 = 108$

10 $a_3 = 3$ ، $a_5 = 12$

بڕوانە نموونە 4

ناوەندە ئەندازەیی بۆهەردوو ژمارەکە بدۆزەوە.

11 6 و $\frac{3}{8}$

12 2 و 32

13 12 و 192

بڕوانە نموونە 5

سەرجەمی داواکراو لەهەر زنجیرەیەکی ئەندازەیی بدۆزەوە.

14 S_8 لە زنجیرەی ... $2 + 0.2 + 0.02 +$

15 $\sum_{k=1}^{k=5} (-3)^{k-1}$

16 S_5 لە زنجیرەی ... $12 - 24 + 48 - 96 +$

17 $\sum_{k=1}^{k=9} 256\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

بڕوانە نموونە 6

18 **مووچە** مامۆستایەکی زمان لە ساڵی یەکەمدا مووچەکەی 8000000 دینارە ئەو مووچەیە ساڵانە بەڕێژەی 5% زیاد دەکات، لە بیستەمین ساڵی خزمەتیدا مووچەکەی دەبێتە چەند؟ لەو ماوەیەدا چەندی وەرگرتووە؟

ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

بۆشیکارکردنی پرسیارەکانی	تەماشای نموونەکە
21-19	1
25-22	2
28-26	3
31-29	4
35-32	5
36	6

(ڕاهێنانی ئازاد)

دیاریبکە یەکبەدوای یەککە ئەندازەییە یان ژمارەییە یان شتێکی ترە، ئەگەر ئەندازەییە، بنچینەکەی و ڕادەی داهاتووی بدۆزەوە.

19 $-36, -49, -64, -81, \ldots$

20 $-2, -6, -18, -54, \ldots$

21 $2, 7, 12, 17, \ldots$

ڕادەی نۆیەم لەهەر یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی بدۆزەوە.

22 $\frac{1}{2}, \frac{1}{10}, \frac{1}{50}, \frac{1}{250}, \frac{1}{1250}, \ldots$

23 $3, -6, 12, -24, 48, \ldots$

24 $3200, 1600, 800, 400, \ldots$

25 $8, 24, 72, 216, 648, \ldots$

ڕادەی حەوتەم لەهەر یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی بدۆزەوە کە دوو ڕادەی دراوە.

26 $a_4 = 54$ ، $a_5 = 162$

27 $a_5 = 13.5$ ، $a_6 = 20.25$

28 $a_4 = -4$ ، $a_6 = -100$

ناوەندە ئەندازەیی بەهەردوو ژمارەیەك بدۆزەوە.

29 9 و $\frac{1}{9}$

30 81 و 2

31 $\frac{1}{5}$ و 45

سەرجەمی داواكراو لەهەر زنجیرە ئەندازەییەكدا بدۆزەوە.

32 S_6 لە زنجیرەی $1+5+25+125+\ldots$

33 S_8 لە زنجیرەی $10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\ldots$

34 $\sum_{k=1}^{k=6} -1\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

35 $\sum_{k=1}^{k=7} 8(10)^{k-1}$

36 **باپیران** دایك و باوك و دوو باپیر و دوو داپیرو 4 باپیرە گەورە و 4 داپیرە گەورەت هەیە.

| أ | ژمارەی باپیرە گەورە و داپیرە گەورە لەماوەی 6 نەوەدا پێشتوو چەندە؟ لەماوەی 21 نەوەدا چەندە؟

| ب | **چی دەبێت ئەگەر...؟** ڕێسای هەژمارکردنی باپیرە گەورە و داپیرە گەورە چۆن دەگۆڕێت ئەگەر تۆ یەكەم نەوە بیت؟

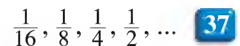




ئۆتۆمبیلی رولس رویس كە هی سەرمایەدار ڕۆك ئاند رول جون گرانترین ئۆتۆمبیل بوو كە بە 2.2 ملیۆن دۆلار فرۆشرا.

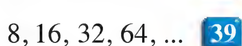


بۆهەر یەكبەدوای یەكێكی ئەندازەیی پێناسەی دیار، و ڕادەی دەیەم و سەرجەمی دە ڕادەی یەكەم بدۆزەوە.

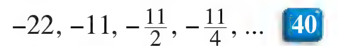


37 $\frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \ldots$

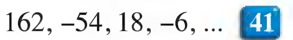
38 $4, 0.4, 0.04, 0.004, \ldots$



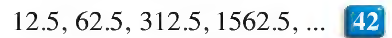
39 $8, 16, 32, 64, \ldots$



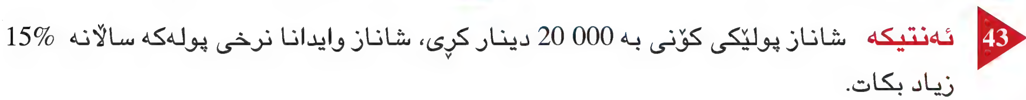
40 $-22, -11, -\frac{11}{2}, -\frac{11}{4}, \ldots$



41 $162, -54, 18, -6, \ldots$



42 $12.5, 62.5, 312.5, 1562.5, \ldots$



43 **ئەنتیكە** شاناز پولێكی كۆنی بە 20 000 دینار كڕی، شاناز وایدانا نرخی پولەكە ساڵانە 15% زیاد بكات.

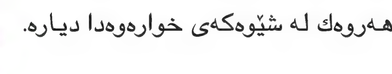
| أ | نرخی پولەكە پاش 4 ساڵ دەبێتە چەند؟ پاش 6 ساڵ دەبێتە چەند؟

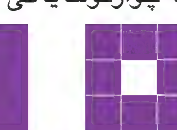
| ب | ئایا نرخی پولەكە لە چوار ساڵی یەكەمدا زۆرتر زیاد دەبێت لەو زیادبوونەی لە چوار ساڵی دووەمدا بووە یان نا؟ ئەمە ڕوونكەوە.

44 **قیستە زانكۆییەكان** لە ڕۆژی لە دایكبوونی شیرین داپیرە و باپیرەی بڕیاریاندا قیستەكانی وەرگرتنی لە زانكۆ بۆ بدەن. لە ڕۆژی لە دایكبوونیدا 50 دیناریان بۆ دانا. بڕیاریاندا هەر ساڵێك دووئەوەندەی ساڵەكەی پێشووی بۆ دانێن، كاتێك شیرین تەمەنی دەبێتە 18 ساڵ چەند پارەی بۆ كۆ دەبێتەوە؟ كە تەمەنی دەگاتە 21 ساڵ چەند پارەی بۆ كۆدەبێتەوە؟

45 **تەكنەلۆژیا** نامەیەكی ئەلیكترۆنیت بە دەست گەیشت، تێیدا داوای بەختێكی باشت بۆ دەكات، و داوای لێكردوی بۆ 5 هاوڕێی بنێریت، و داوا لەهەر یەكێكیان بكەیت لەلای خۆیانەوە بۆ 5 هاوڕێی تری بنێرن و هەروەها ... پاش 10 دەستە هاوڕێ ژمارەی ئەو نامانە چەندن؟

46 **فراكتاڵ Fractals** مافوری سیربنسكی Sierpenski شێوەیەكی لە یەكبووە لەسەر چوارگۆشەیەك چەسپاوە، لەهەر خولێكدا ناوەڕاستی چوارگۆشە ڕەنگكراوەكە چوارگۆشەیەكی لێدەردەهێنرێت، هەروەك لە شێوەكەی خوارەوەدا دیارە.







| أ | ئەگەر ڕووبەری چوارگۆشەی یەكەم $1\ m^2$ بێت. یەكبەدوای یەكێك بنووسە ڕووبەرە ڕەنگكراوە دەستكەوتووەكان لەهەر خولێكدا بنوێنێت.

| ب | لەكام خولدا ڕووبەرە ڕەنگكراوەكە لە $\frac{1}{2}\ m^2$ كەمتر دەبێت.

47 **كاغەز** ئەستوری كاغەزی سپی $0.1\ mm$ دەبێت ئەگەر بینوشتێنیەوە ئەستورییەكەی دووئەوەندی لێدێت.

| أ | ئەگەر كاغەزەكە بەلایەنی زۆرەوە 7 جار بنوشتێنرێتەوە ئەستوری كاغەزەكە دوای 7 جار نوشتاندنەوە چەندە؟

| ب | وای دابنێ دەتوانیت بەردەوام بیت لە نوشتاندنەوەی كاغەزەكە چەند بتەوێت، دوای چەند جار ئەستوری كاغەزەكە لە بەرزایی لوتكەی ئیڤەرست Everest زیاتر دەبێت كە دەكاتە $8\,850\ m$

48 یەكبەدوای یەكێكی ژمارەیی و یەكێكی ئەندازەیی بدۆزەوە بە مەرجێك هەریەكەیان بەم شێوەیە دەستپێبكات ... ,1,4

49 **پێوانە** خشتەی بەرامبەر پێوانەکانی چەند جۆرە کاغەزێك کە زۆرترین بەکارهێنانی هەیە ڕووندەکاتەوە.

پێوانەکانی کاغەزەکە	
پێوانەکانی (بە گرێ)	جۆر
$8\frac{1}{2}\times 11$	A
11×17	B
17×22	C
22×34	D
34×44	E

أ درێژی و پانی کاغەزەکە لەهەر پێوانەیەك بپشکنە. چ پەیوەندیەکت بۆ دەردەچێت؟

ب ئەو پەیوەندییەی ڕووبەری کاغەزەکان لە پێوانە جیاوازەکان پێکەوە دەبەستێتەوە کامەیە؟ ئەو پەیوەندییە ناوی چییە؟

50 داهاتی یەکێك لە فلیمە سینەماییەکان لە هەفتەی یەکەمی نیشانیدا 60 ملیار دینارە و لە هەفتەی سێیەمدا 9.6 ملیار دینارە، وادابنێ داهاتی هەفتانەکەی یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی دەنوێنێت.

أ داهاتی فلیمەکە لە حەفتەی دووەمدا بخەمڵێنە.

ب ڕێژەی کەمکردنی داهاتەکان لە هەفتەیەکەوە بۆ هەفتەیەکی تر چەندە؟

ج پێشبینی دەکەیت لە کام هەفتەدا داهاتەکەی لە یەك ملیار دینار کەمتر دەبێت.

د نیشاندانی فلیمەکە 8 هەفتە بەردەوام بوو، کۆی داهاتی نیشاندانەکەی چەندە؟

51 **زیندەزانی** جۆرێك لە بەکتریا ژمارەکەی بەپێی یەکبەدوای یەکی ئەندازەیی زیاددەکات. ژمارەی بەکتریاکان دوای کاتژمێرێك 4 بوو و دەبێتە 1024 دوای 5 کاتژمێر. ژمارەی بەکتریاکان پاش دوو کاتژمێرچەندە؟ پاش 3 کاتژمێر چەندە؟ پاش 4 کاتژمێر چەندە؟

52 **پارەدان** کۆمپانیایەك خانوویەکی بۆ بارەگاکەی مانگی بە 750 000 دینار بۆ ماوەی ساڵێك بەکرێی گرت، بەجۆرێك دوای ساڵی یەکەم ساڵانە 10% ئەوبڕە زیاددەکات.

أ زنجیرەیەك بنووسە بۆ ئەو بڕە پارەیەی کۆمپانیاکە لەماوەی 5 ساڵدا دەیدات.

ب هێمای سەرجەم بەکاربێنە بۆ نواندنی ئەوەی ساڵانە کۆمپانیاکە لەماوەی 10 ساڵدا دەیدات، پاشان بەهایەکەی بدۆزەوە.

53 **میوزیك** لەرەلەری هەندێك لە نۆتە میوزیکییەکان یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی پێکدێنێت کاتێك C_0 لاوازترین نۆتە بێت.

پێوەری نۆتەکان	
لەرەلەر (بە هێرتز)	نۆتە
16.35	C_0
32.7	C_1
65.4	C_2
130.8	C_3
▦	C_4

أ نۆتەی C_4 بە نۆتەی ناوەندە بۆ ئەم جۆرە دادەنرێت. لەرەلەرەکەی چەندە؟

ب یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی بنووسە لەرەلەرەکانی نۆتەکان لەم جۆرە بنوێنێت، وایدابنێ $a_1 = C_1$

ج گوێچکەی مرۆڤ دەنگێك نابیستێت لەرەلەرەکەی لە 20 000 هێرتز زیاتر بێت. خانەی یەکەم نۆتە چەندە کە گوێی مرۆڤ توانای بیستنی نییە؟

54 **پزیشکی** یەکێك لە نەخۆشخانەکان لەماوەی شەپۆلی بڵاوبوونەوەی ئەنفلۆنزادا 16 توشبووی لە هەفتەی یەکەمدا و 56 ی لەهەفتەی دووەمدا و 196ی لە هەفتەی سێیەمدا تۆمارکرد.

أ یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی بنووسە ژمارەی بارەکانی توشبوون بە ئەنفلۆنزا بنوێنێت.

ب ئەگەر بارەکانی توشبوون بەم شێوەیە بەردەوام بوو، کۆی ژمارەی بارەکانی توشبوون لە کام هەفتەدا دەگاتە 10 000 توشبوو؟

55 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** ئەگەر بنچینە r گەورەتربێت لە 1 . کاریگەری لەسەر یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی چی دەبێت؟ کاریگەری چی دەبێت ئەگەر $0 < r < 1$ ؟

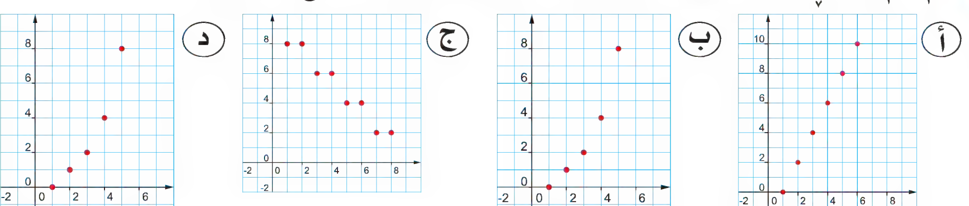
56 **بنووسە** چی بەسەر ڕادەکانی یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەییدا دێت، ئەگەر ڕادەی یەکەمی سێ ئەوەندە بکرێت؟ چی بەسەر سەرجەمی ڕادەکانی یەکەمیدا دێت؟



57 کام لەمانەی خوارەوە سەرجەمی شەش ڕادەی یەکەمی ئەم یەکبەدوای یەکە ئەندازەییە $4.5+9+18+36+\ldots$ دەنوێنێت؟

أ) 67.5 ب) 144 ج) 283.5 د) 445.5

58 کام لەم وێنە ڕوونکردنەوەییانە وا دەردەکەوێت یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی.



59 کام لەمانە سێ ڕادەی یەکەمی یەکبەدوای یەکی ئەندازەیی $a_7=-192$ و $a_9=-768$ دەنوێنێت؟

أ) $3, -6, 12$

ب) $-3, 12, -48, \ldots$

ج) $-3, 6, -12$ یان $-3, -6, -12$

د) $3, -12, 48$ یان $-3, -12, -48$

60 کام لەمانە بەهای ئەم زنجیرەیە $10-15+22.5-33.75+50.625$ییە؟

أ) $\sum_{k=1}^{k=5} 10\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$ ب) $\sum_{k=1}^{k=5} -10\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$ ج) $\sum_{k=1}^{k=5} 10\left(-\frac{3}{2}\right)^{k-1}$ د) $\sum_{k=1}^{k=5} -10\left(-\frac{3}{2}\right)^{k}$

بەرەنگاری و فراوانکردن

بژمێری ڕوونکردنەوەیی یەکەم ڕادەی هەریەکیەدوای یەکێك بدۆزەوە بەهاکەی لە ملیۆنێك زیاتربێت.

61 $a_1=10$ ، $r=2$ **62** $a_1=\frac{1}{4}$ ، $r=4$ **63** $a_1=0.01$ ، $r=3.2$

64 سەرجەمی 3 ڕادەی دوای یەك لە یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەییدا بریتییە لە 73.5 و ئەنجامی لێکدانیشیان 2744 ، ئەو ڕادانە کامانەن؟ ئەمە ڕوونبکەوە.

65 ئەو یەکبەدوای یەکە ئەندازەییەی ڕادەی یەکەمی 55 و بنچینەکەی $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی ئەمانە:

أ) پێنج ڕادەی یەکەمی دوای ڕادەی یەکەم بدۆزەوە نزیك کرابێتەوە بۆ نزیکترین ژمارەی تەواو.

ب) سەرجەمی هەردوو ڕادەیەکی دوای یەك هاتوو هەژماربکە تێبینی چی دەکەیت.

ج) دەستەواژەیەکی تایبەت بەم یەکبەدوای یەکە داڕێژە.

پێداچوونەوەی لوولپێچی

سفرەکانی نەخشەکە و دەرکەنارەکانی بدۆزەوە. (پۆلەکانی پێشوو)

66 $f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x+1}$ **67** $f(x)=\frac{x+5}{x^2-x-6}$ **68** $f(x)=\frac{x^2-16}{4x}$

69 **بازاڕ** یەکێك لە کۆگا گەورەکان داشکاندنێکی بە ڕێژەی 20% لەسەر کەلوپەلەکانی بۆ ماوەی مانگێك دانا. داشکاندنێکی زیادەی بەڕێژەی 10% بۆ ڕۆژانی دووشەممە زیادکرد. (وانەی 5–3)

أ) نەخشەیەکی ئاوێتە بنووسە نرخی کالای ڕۆژی دووشەممە بەپێی نرخە بنەڕەتییەکە x بنوێنێت.

ب) بینا ڕۆژی دووشەممە جلێکی کڕی ئەگەر نرخی بنەڕەتی جلەکە 275000 دینار بێت پێویستە چەند پارە بدات؟

دە ڕادەی یەکەمی هەریەکە لەم یەکبەدوای یەکە ژمارەییانە بدۆزەوە. (وانەی 6–3)

70 $78, 65, 52, 39, 26, \ldots$ **71** $1.7, 7.3, 12.9, 18.5, 24.1, \ldots$

72 $9.42, 9.23, 9.04, 8.85, 8.66, \ldots$ **73** $16.4, 26.2, 36, 45.8, 55.6, \ldots$

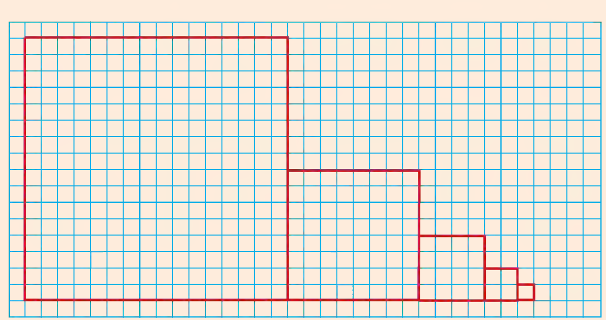


دۆزینەوەی زنجیرە ئەندازەییە دوا نەهاتووەکان

دەتوانیت بەهۆی یەکبەدوای یەکی چوارگۆشەکان زنجیرە ئەندازەییە دوا نەهاتووەکان بدۆزەیتەوە.

چالاکی 1

1. لەسەر کاغەزی هێڵی ڕوونکردنەوەیی، چوارگۆشەیەك درێژی لایەکی 16 یەکە بێت دروستبکە. سەرنجبدە چێوەکەی 64 یەکە دەبێت.
2. لە یەکێك لە گۆشەکانی ئەو چوارگۆشەیەی دروستتکردوە. لە تەنیشتەوە دەستبکە بە دروستکردنی چوارگۆشە کە درێژي لایەکانی یەك لەدوای یەك 8 و 4 و 2 و 1 بن.



درێژی لایەکی چوارگۆشەکە	چێوەکەی	سەرجەمی کەڵەکەبوو
16	64	64
8	32	96
4		
2		
1		
$\frac{1}{2}$		

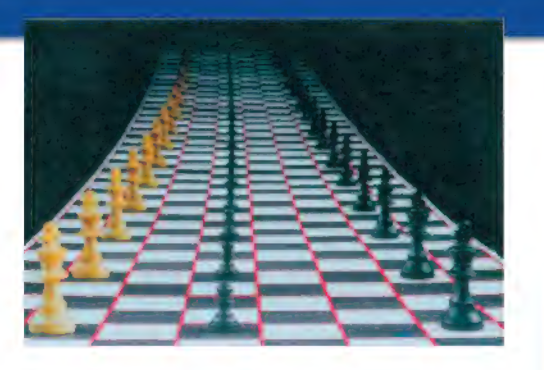
3. خشتەی بەرامبەر دروستبکەوە شەش ڕیزی یەکەمی بە تۆمارکردنی چێوەی چوارگۆشەکان لە ستوونی دووەمدا و سەرجەمی کەڵەکەبووی چێوەکان لە ستوونی سێیەمدا تەواوبکە.
4. هێمای سەرجەم بۆ نووسینی زنجیرەی ئەندازەیی بەکاربێنە چێوەکان بنوێنێت.
5. بژمێری ڕونکردنەوەیی بۆدۆزینەوەی سەرجەمی بیست ڕادەی یەکەم بەکاربێنە
6. **دەستەواژەیەك بنووسە** دەربارەی سەرجەمی کەڵەکەبووی چێوەکان ئەگەر بەردەوام بیت لە دروستکردنی چوارگۆشەکان تا ناکۆتا.
7. بەهای بڕەی $\frac{64}{1-\frac{1}{2}}$ بدۆزەوە پەیوەندی چییە لەنێوان ئەوەی کە دۆزیتەوە لەگەڵ وەڵامی پرسیاری 5 ؟

هەوڵبدە

درێژی لایەکی چوارگۆشەکە	ڕووبەر	سەرجەمی کەڵەکەبوو
16		
8		
4		
2		
1		
$\frac{1}{2}$		

1. خشتەی بەرامبەر دروستبکەوە، بە دۆزینەوەی ڕووبەری چوارگۆشەکان و سەرجەمی کەڵەکەبووی ڕووبەرەکان تەواوی بکە.
2. هێمای سەرجەم بۆ نووسینی زنجیرەی ئەندازەیی بەکاربێنە کە سەرجەمی ڕووبەرەکان بنوێنێت.
3. بژمێری ڕوونکردنەوەیی بۆدۆزینەوەی سەرجەمی دە ڕادەی یەکەم بەکاربێنە.
4. **دەستەواژەیەك بنووسە** دەربارەی سەرجەمی کەڵەکەبووی ڕووبەرەکان بنووسە ئەگەر بەردەوام بیت لە دروستکردنی چوارگۆشەکان تا ناکۆتا.
5. بەهای بڕی $\frac{256}{1-\frac{1}{4}}$ بدۆزەوە پەیوەندی لەنێوان ئەوەی دۆزیتەوە لەگەڵ پرسیاری 3 دا چییە؟
6. **پوختەی ئەنجام** یاسایەك بۆ هەژمارکردنی بەهای زنجیرەیەکی ئەندازەیی دوانەهاتوو بنووسە بەهای ڕووتی بنچینە r لە 1 کەمتربێت و لەسفر گەورەتربێت.

5-6 دەرئەنجامی بیرکاری
Mathematical Induction



ئامانجەکان
- بەهای زنجیرەی ئەندازەیی دوا نەهاتوو دەدۆزیتەوە
- دەرئەنجامی بیرکاری بۆ سەلماندنی دەستەواژەکان بەکاردەهێنێت.

زاراوەکان
Vocabulary

زنجیرەیی ئەندازەیی ناکۆتا
Infinite geometric series

لێکنزیکبوو
(توافقية، تقاربية)
Convergent

ئامانج
Limit

لێکدوورکەوتوو
(تخالفية، تباعدية)
Divergent

دەرئەنجامی بیرکاری
Mathematical Induction

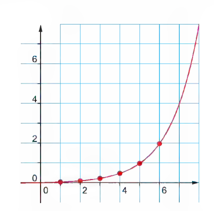
بۆچی ئەمە فێردەبین؟

دەتوانیت زنجیرەی ئەندازەیی دوا نەهاتوو بەکاربێنیت بۆ دۆزینەوەی شێوازەکانی دوبارەبووەوە (پرسیاری 58)

لەوانەی پێشوودا فێری ئەوەبوویت چۆن بەشە کۆمەلەکانی زنجیرەی ئەندازەیی دوا هاتوو بدۆزیتەوە. لەم وانەیەدا فێری دۆزینەوەی سەرجەمی ئەندازەیی دوا نەهاتوو دەبێت.
زنجیرەی ئەندازەیی دوا نەهاتوو Infinite geometric series بریتییە لە ژمارەیەکی دوانەهاتوو ڕادە، تەماشای ئەم دوو زنجیرە ئەندازەییە دوانەهاتووانەی خوارەوە بکە.

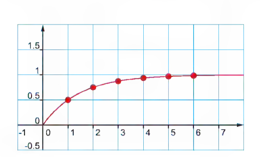
$R_n = \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \ldots$

سەرجەمی بەشەکان						
n	1	2	3	4	5	6
R_n	$\frac{1}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{31}{32}$	$\frac{63}{32}$



$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots$

سەرجەمی بەشەکان						
n	1	2	3	4	5	6
S_n	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{31}{32}$	$\frac{63}{64}$



تێبینی ئەوە بکە لە زنجیرەی ئەندازەیی S_n بنچینەکە یەکسانە بە $\frac{1}{2}$ سەرجەمی ڕادەکان نزیك دەبێتەوە لە 1 . تا بەهاکانی n گەورەتربێت، کاتێك $|r| < 1$ ئەوا سەرجەمی بەشەکانی زنجیرە ئەندازەییەکە نزیکدەبێتەوە لە ژمارەیەکی دیاریکراوکاتێك بەهای n زیادبکات. لەم بارەدا دەوترێت زنجیرەکە **لێکنزیکبوونە Convergent** ، ئەو ژمارەیە **ئامانجی Limit** زنجیرەکەیە.

کارەکە لە زنجیرەی R_n دا جیاوازە کاتێك $|r| \geq 1$ و بەهاکانی n زیادبکات. بەهاکانی سەرجەمە بەشەکان زیاد دەکات. هەموو ژمارەکان تێدەپەڕێنێت لەم بارەدا زنجیرەکە **لێکدوورکەوتنە Divergent**

نموونــــە 1 جیاکردنەوەی زنجیرە ئەندازەییە لێکنزیکبووەکان و لێکدوورکەوتووەکان

دیاریبکە زنجیرە ئەندازەییەکە لێکنزیکبوونە یان لێکدوورکەوتنە.

أ $20 + 24 + 28.8 + 34.56 + \ldots$

$|r| \geq 1$ ؛ $r = \frac{24}{20} = 1.2$

زنجیرەکە لێکدورکەوتنە سەرجەمی نییە

ب $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \ldots$

$|r| < 1$ ؛ $r = \frac{1}{3}$

زنجیرەکە لێکنزیکبوونە سەرجەمی هەیە



1. دیاریبکە زنجیرە ئەندازەییەکە لێکنزیکبوونە یان لێکدووركەوتنە.

أ $\frac{2}{3} + 1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{27}{8} + \ldots$

ب $32 + 16 + 8 + 4 + 2 + \ldots$

ئەگەر زنجیرەی ئەندازەیی لێکنزیکبونەوە بێت دەتوانیت سەرجەمەکەی هەژمار بکەیت. بە گەڕانەوە بۆ زنجیرەی... $S_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+$ یاسای سەرجەم لە زنجیرەی ئەندازەیی بەکاربێنە $r=\frac{1}{2}$ و $a_1=\frac{1}{2}$

$$S_n = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right)=\frac{1\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{2\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

بە وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $S(n)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$ بنوێنە سەرنجبدە بەهای $S(n)$ نزیکدەبێتەوە لە 1 هەرچەند بەهای n گەورەتربێت. هەتا n نزیکبێتەوە لە ناکۆتای موجەب $+\infty$ ، $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ لە سفر نزیکدەبێتەوە ئەمەش ئەوە دەگەیەنێت سەرجەمی زنجیرەکە دەکاتە 1 . لەمەشەوە دەتوانرێت ئەم چەمکە بەگشتی بۆ هەموو زنجیرە ئەندازەییە لێکنزیکبووەکان بەبەکارهێنانی هەژمارکردنی جیاکاری و تەواوکاری بسەلمێنرێت.





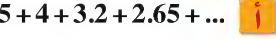
سەرجەمی زنجیرە ئەندازەییە دوا نەهاتووەکان

ئەگەر بنچینەی یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی دوا نەهاتوو r بێت و پاسادانی مەرجی $|r|<1$ بکات. ئەوا زنجیرەکە لێکنزیکبوونە و سەرجەمەکەی بریتییە لە

$$S=\frac{a_1}{1-r}$$

کاتێك a_1 ڕادەی یەکەم و r بنچینەکەی بێت.

نموونە 2



دۆزینەوەی سەرجەمی زنجیرەیەکی ئەندازەیی دوا نەهاتوو

سەرجەمی زنجیرەی ئەندازەیی دوا نەهاتوو بدۆزەوە (ئەگەر سەرجەمی هەبوو).

أ $5+4+3.2+2.65+\dots$

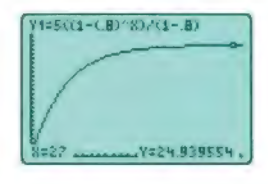
$r=0.8$ زنجیرەکە لێکنزیکبونە چونکە $|r|<1$

$S=\frac{a_1}{1-r}$ یاسای سەرجەم

$S=\frac{5}{1-0.8}=\frac{5}{0.2}=25$ لەجیاتی دابنێ

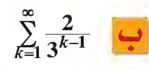
ڕۆشنایی

دەتوانیت یەکبەدوای یەکی ئەندازەیی بە ڕوونکردنەوەیی بە بەکارهێنانی یاسای سەرجەمی بنوێنێت هەروەك لە وانەی پێشوودا هاتووە $S=a\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$ بە دانانی y لە شوێنی S و x لە شوێنی n . دانانی بەهای a_1 و r



پاسادان بکە وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y=5\left(\frac{1-(0.8)^x}{1-0.8}\right)$ بە بەکارهێنانی بژمێری ڕوونکردنەوەیی بکێشە. دەردەکەوێت بەهای y لە 25 نزیکدەبێتەوە.

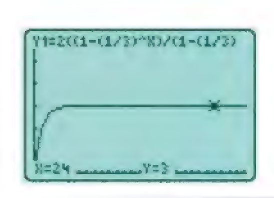
ب $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{3^{k-1}}$

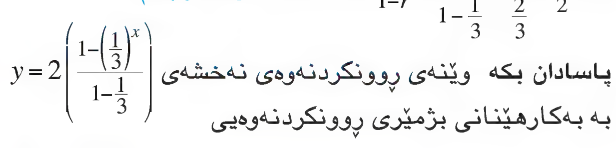


$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{3^{k-1}}=\frac{2}{1}+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\dots$$

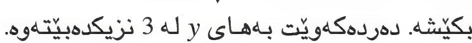
$r=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ زنجیرەکە لێکنزیکبونە چونکە $|r|<1$

$S=\frac{a_1}{1-r}=\frac{2}{1-\frac{1}{3}}=\frac{2}{\frac{2}{3}}=\frac{6}{2}=3$ یاسای سەرجەم





پاسادان بکە وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $y=2\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^x}{1-\frac{1}{3}}\right)$ بە بەکارهێنانی بژمێری ڕوونکردنەوەیی بکێشە. دەردەکەوێت بەهای y لە 3 نزیکدەبێتەوە.





2. سەرجەمی زنجیرەی ئەندازەیی دوا نەهاتوو بدۆزەوە (ئەگەر سەرجەمی هەبوو)

أ $25-5+1-\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\dots$ ب $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^k$

دەتوانیت زنجیرە ئەندازەییە دوا نەهاتووەکان بۆ نوسینی ژمارەیەکی ڕێژەیی دەوری بەشێوەی کەرت بەکاربهێنیت

نموونــــە 3 نووسینی ژمارەیەکی ڕێژەیی دەوری بەشێوەی کەرت

ژمارەی ...0.232323 وەك کەرت بە سادەترین شێوە بنووسە.

هەنگاوی 1 ژمارەکە بەشێوەی زنجیرەیەکی ئەندازەیی دوای نەهاتوو بنووسە.

$0.232323... = 0.23 + 0.0023 + 0.000023 + ...$ شێوازێك بۆ نووسینی زنجیرەکە بەکاربێنە

هەنگاوی 2 بنچینە بدۆزەوە.

$r = \frac{0.0023}{0.23} = \frac{1}{100} = 0.01$ $|r| < 1$ زنجیرەکە لێکنزیکبونە

هەنگاوی 3 سەرجەم بدۆزەوە.

$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{0.23}{1-0.01} = \frac{0.23}{0.99} = \frac{23}{99}$$

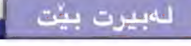
پاسادان بکە بژمێر بۆ دابەشکردنی

23 بەسەر 99 دا بەکاربێنە.



لەبیرت بێت

بیرت بێت هەر ژمارەیەکی دەوری وەك ...0.232323 یان $0.\overline{23}$ ژمارەیەکی ڕێژەییە و دەتوانی بەشێوەی کەرت بینووسی.

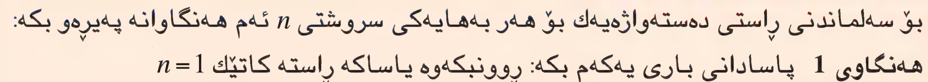


خاڵی چاودێری

3. ژمارە ...0.111 وەك کەرت بە سادەترین شێوە بنووسە.

بۆ دۆزینەوەی سەرجەمەکان زنجیرەکانت بەکارهێنا. وەك سەرجەمی ژمارە تەواوکان لە 1 تا 100 . دەتوانرێت یاسا بەکارهاتووەکان بۆ دۆزینەوەی ئەم جۆرە سەرجەمانە بە یەکێك لە ڕێگاکانی سەلماندن لە بیرکاریدا بسەلمێنرێت ئەویش سەلماندنە بەرێگای **دەرئەنجامی بیرکاری Mathematical induction**





سەلماندن بە دەرئەنجامی بیرکاری

بۆ سەلماندنی ڕاستی دەستەواژەیەك بۆ هەر بەهایەکی سروشتی n ئەم هەنگاوانە پەیڕەو بکە:

هەنگاوی 1 پاسادانی باری یەکەم بکە: ڕوونبکەوە یاساکە ڕاستە کاتێك $n = 1$

هەنگاوی 2 وایدابنێ دەستەواژەکە ڕاستە کاتێك $n = k$

هەنگاوی 3 بیسەلمێنە دەستەواژەکە ڕاستە کاتێك $n = k + 1$

نموونــــە 4 سەلماندن بە دەرئەنجامی بیرکاری

دەرئەنجامی بیرکاری بەکاربێنە بۆ سەلماندنی $\mathbf{1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}}$

هەنگاوی 1 پاسادانی باری یەکەم بکە، ڕوونیبکەوە دەستەواژەکە ڕاستە کاتێك $n = 1$

$1 = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = 1$ دەستەواژەکە ڕاستە کاتێك $n = 1$

هەنگاوی 2 وایدابنێ دەستەواژەکە ڕاستە کاتێك $n = k$

$1 + 2 + 3 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2}$ لە جیاتی n ، k دابنێ

هەنگاوی 3 بیسەلمێنە دەستەواژەکە ڕاستە کاتێك $n=k+1$

$$1+2+3+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

$$1+2+3+\ldots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$ ڕادەی $k+1$ بۆهەردوولا زیادبکە.

$$=\frac{k(k+1)}{2}+\frac{2(k+1)}{2}$$ ژێرەی هاوبەش بدۆزەوە

$$=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$ سەرەکان کۆبکەوە

$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$ بەپێی $k+1$ شیتەڵی بکە

$$=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$$ بەپێی $k+1$ بینووسە

دەستەواژەی $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ ڕاستە بۆهەموو بەهایەکی سروشتی n



.4 دەرئەنجامی بیرکاری بەکاربێنە بۆ سەلماندنی سەرجەمی ژمارە سرشتییە تاکەکان $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$

هەندێك دەستەواژە وا دەردەکەوێت ڕاست بێت لە زۆر باردا بەڵام تەنها ئەمە بەسنییە بۆئەوەی بووترێت دەستەواژەکە لەهەموو بارێکدا ڕاستە. بۆئەوەی بیسەلمێنین دەستەواژەکە چەوتە، دژە نموونەیەك بهێنەوە وا لە دەستەواژەکە بکات ناڕاست بێت لەیەك باردا.

نموونـــــه 5 دۆزینەوەی سەرجەمی زنجیرەی ئەندازەیی

دژە نموونەیەك بێنەوە ناڕاستی $2^n \geq n^2$ دەربخات کاتێك n ژمارەیەکی ڕاستی بێت.

$2^0 \geq (0)^2$ $2^1 \geq (1)^2$ $2^4 \geq (4)^2$ $2^{-1} \geq (-1)^2$

$1 \geq 0$ ✓ $2 \geq 1$ ✓ $16 \geq 16$ ✓ $\frac{1}{2} \geq 1$ ✗

کەواتە $2^n \geq n^2$ چەوتە کاتێك $n=-1$ ئەمەش ئەوە دەگەیەنێت دەستەواژەی بەهای n هەر ژمارەیەکی ڕاستی بێت چەوتە.

ڕۆشنایی

لەبیرت بێت کە دۆزینەوەی زۆربەی دژە نموونەکان بە بەکارهێنانی ژمارەی تایبەتی وەك 0 و 1 ژمارە سالبەکان یان کەرتەکان دەکرێت.



.5 دژە نموونەیەك بێنەوە ناڕاستی $\frac{a^2}{2} \leq 2a+1$ دەربخات کاتێك a هەر ژمارەیەکی ڕاستی بێت.

بیربکەوەو وتووێژبکە

.1 چۆن ئەوە دیاریدەکەی کە زنجیرەیەکی ئەندازەیی دوا نەهاتوو لێکنزیکبوونە یان لێکدوورکەوتنە.

.2 چۆن ژمارەی ڕێژەیی دەوری $0.\overline{83}$ دەگۆڕێت بۆ زنجیرەی ئەندازەیی دوا نەهاتوو.

.3 ڕێکخەرە خشتەکە دروستبکە و تەواوی بکە، جۆرە جیاوازەکانی زنجیرە ئەندازەییە دوا نەهاتووەکان بە پووختەیی باسبکە.



	نموونە	بنچینە	سەرجەم
زنجیرەی لێکنزیکبوو			
زنجیرەی لێکدورکەوتوو			

5-6 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاراستەکراو

1 **زاراوەکان** زنجیرەی ئەندازەیی دوا نەهاتوو کە بەهای ڕادەکانی لە ژمارەیەکی دیاریکراو نزیکدەبێتەوە لەگەڵ زیادبوونی بەهای n بریتییەلە زنجیرەیەکی ______؟______ (لێکنزیکبوونە یان لێکدوورکەوتنە)

بڕوانە نموونە 1

دیارییکە ئایا زنجیرە ئەندازەییە دوا نەهاتووەکە لێکنزیکبوونە یان لێکدوورکەوتنە.

2 $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots$ **3** $1-5+25-125+\ldots$ **4** $27+18+12+8+\ldots$

بڕوانە نموونە 2

سەرجەمی زنجیرە ئەندازەیی دوا نەهاتوو بدۆزەوە (ئەگەر سەرجەمی هەبوو)

5 $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\ldots$ **6** $\sum_{k=1}^{\infty}4(0.25)^k$ **7** $800+200+50+\ldots$

بڕوانە نموونە 3

ژمارە دەورییەکە وەک کەرتێك بە سادەترین شێوە بنووسە.

8 $0.888\ldots$ **9** $0.\overline{56}$ **10** $0.131313\ldots$

بڕوانە نموونە 4

11 دەرئەنجامی بیرکاری بەکاربێنە بۆ سەلماندنی سەرجەمی ژمارە جووتەکان کە پاسادانی $2+4+6+8+\ldots+2n=n(n+1)$ دەکەن.

بڕوانە نموونە 5

دژە نموونەیەك بدۆزەوە ناڕاستی دەستەواژەکە دەربخات کاتێك n هەر ژمارەیەکی ڕاستی بێت.

12 $n^4\geq 1$ **13** $\log n>0$ **14** $n^3\leq 3n^2$

ڕاهێنان وشیکارکردنی پرسیارەکان

ڕاهێنانی ئازاد	
بوشیکارکردنی پرسیارەکان	تەماشای نموونەکە
17-15	1
20-18	2
23-21	3
24	4
27-25	5

دیارییکە ئایا زنجیرەی ئەندازەیی کۆتایی نەهاتوو لێکنزیکبوونە یان لێکدوورکەوتنە.

15 $3+\frac{3}{5}+\frac{3}{25}+\frac{3}{125}+\ldots$ **16** $5+10+20+40+\ldots$ **17** $2-4+8-16+\ldots$

سەرجەمی زنجیرەی ئەندازەیی کۆتایی نەهاتوو بدۆزەوە (ئەگەر سەرجەمی هەبوو)

18 $\sum_{k=1}^{\infty}60\left(\frac{1}{10}\right)^k$ **19** $\frac{8}{5}-\frac{4}{5}+\frac{2}{5}-\frac{1}{5}+\ldots$ **20** $\sum_{k=1}^{\infty}(3.5)^k$

ژمارە دەورییەکە وەک کەرتێك بەسادەترین شێوە بنووسە.

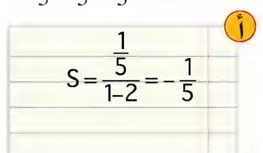
21 $0.\overline{6}$ **22** $0.90909\ldots$ **23** $0.541541541\ldots$

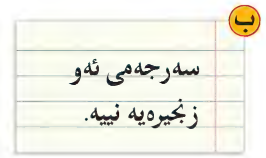
24 دەرئەنجامی بیرکاری بەکاربێنە بۆ سەلماندنی $\frac{1}{1(2)}+\frac{1}{2(3)}+\frac{1}{3(4)}+\frac{1}{4(5)}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

دژە نموونەیەك بهێنەوە کە ناڕاستی دەستەواژەکە دەربخات کاتێك n ژمارەی ڕاستی بێت.

25 $n^3\neq -n^2$ **26** $n^4>0$ **27** $5n^2>2^n$

28 **هەڵە لە شیکردنەوە** لە خوارەوە دوو وەڵام هەیە بۆ دۆزینەوەی سەرجەمی زنجیرە ئەندازەیی دوا نەهاتووی $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{4}{5}+\ldots$ کامیان هەڵەیە؟ هەڵەکە دیارییکە.

أ


ب


29 **هونەر** هونەرمەندێك تابلۆیەكی مەزنی دروستكرد لە چەند چوارگۆشەیەك پێكهاتبوو. هەر یەكێكیان دەكەوتە ناو ئەوی تریانەوە بۆ دروستكردنی چوارگۆشەكان داوێكی بەكارهێنا درێژی لایەكی گەورەترین چوارگۆشە 8m بوو. درێژی لایەكی هەر چوارگۆشەیەكی ناوەوە یەكسان بوو بە 90% ی درێژی لایەكی ئەو چوارگۆشەیەی لەناویدایە. وایدابنێ هونەرمەندەكە توانای ئەوەی هەیە چوارگۆشەكانی ناوەوە تا دوانەهاتوو دروستبكات. هونەرمەندەكە چەند مەتری داو پێویستە؟ (بەهۆی زنجیرە ئەندازەیی ناكۆتا شێوازەكە بنوێنە)

سەرجەمی زنجیرە ئەندازەیی دوا نەهاتوو بدۆزەوە (ئەگەر سەرجەمی هەبوو)

30 $215-86+34.4-13.76+\ldots$

31 $500+400+320+\ldots$

32 $8-10+12.5-15.625+\ldots$

33 $\sum_{k=1}^{\infty}-5\left(\frac{1}{8}\right)^{k-1}$

34 $\sum_{k=1}^{\infty}2\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$

35 $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{5}{3}\right)^{k-1}$

36 $-25-30-36-43.2-\ldots$

37 $\sum_{k=1}^{\infty}200(0.6)^{k-1}$

38 **ئەندازە** سەرنجی شێوازی وێنەكەی بەرامبەر بدە بازنەكان یەك لەناو یەكتر كێشراون. بەجۆرێك نیوەتیرەی هەر بازنەیەك نیوەی نیوەتیرەی ئەو بازنەیە بێت كە تیایەتی.

أ زنجیرەیەكی ئەندازەیی كۆتایی نەهاتوو بەپێی r بنووسە چێوەكانی ئەو بازنانە بنوێنێت، پاشان سەرجەمەكەی بدۆزەوە.

ب سەرجەمی چێوەكانی بازنەكان بدۆزەوە. ئەگەر نیوەتیرەی بازنە مەزنەكە 3 cm بێت.

ژمارەی دەوری وەك كەرت بەسادەترین شێوە بنووسە.

39 $0.\overline{4}$

40 $0.\overline{9}$

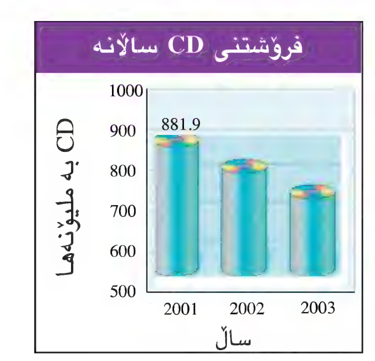
41 $0.\overline{123}$

42 $0.\overline{18}$

43 $0.\overline{5}$

44 $0.\overline{054}$

45 **میوزیك** لەم ساڵانەی دوایدا داواكاری لەسەر كڕینی CD میوزیك كەمی كرد. بەهۆی زیادبوونی دۆسیێ مۆزیكی لە ئینتەرنێتدا. دەتوانرێت ژمارەی CD یە فرۆشراوەكان لە ساڵی 2001 وە بەهۆی یەكبەدوای یەكێكی ئەندازەیی بنوێنرێت.



أ ژمارەی CD یە فرۆشراوەكانی ساڵی 2010 بخەمڵێنە

ب ژمارەی CD یە فرۆشراوەكان لە ساڵی 2001 تا 2010 بخەمڵێنە.

ج وایدابنێ یەكبەدوای یەكە ئەندازەییەكە بەردەوام دەبێت تا ناكۆتا ژمارەی ئەو CD یانەی لەسەرەتای ساڵی 2001 وە فرۆشراوە چەندە؟

دەرئەنجامی بیركاری بەكاربێنە بۆ سەلماندنی هەر دەستەواژەیەك.

46 $1+2+4+\ldots+2^{n-1}=2^n-1$

47 $1+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

48 $1(2)+2(3)+3(4)+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

49 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

50 **سینەما** داهاتی یەکێك لە فلیمە سینەماییەکان لە هەفتەی یەکەمی نیشانیدا 20 ملیار دینارە. لە هەفتەکانی داهاتوودا بەڕێژەی 40% کەمدەکات.

أ یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی بنووسە داهاتی فلیمەکە لەهەفتەیەکدا بنوێنێت.

ب سەرجەمی داهاتی فلیمەکە لەشەش هەفتەی یەکەمی نیشانیدا بدۆزەوە.

ج ئەگەر نیشاندانی فلیمەکە تا ناکۆتا بەردەوام بوو گوژمەی داهاتی فلیمەکە چەند دەبێت؟

51 **پاڵەوانێتی لەشجوانی** لە یەکێك لە پاڵەوانێتیەکانی لەشجوانی خەڵاتێکی گەورەت بردەوە، دوو ڕێگایان بۆ دانای بۆ وەرگرتنی خەڵاتەکەت: یەك ملیۆن دینار لە مانگی یەکەمدا وەربگریت لەگەڵ مانگانەیەك کە بەهاکەی نیوەی ئەو پارەیە مانگی پێشوو بێت. **یان** مانگانە 100 000 دینار بۆ ماوەی 20 مانگ وەربگریت کام ڕێگا هەڵدەبژێریت.

بۆهەر دەستەواژەیەك دژە نموونەیەك بدۆزەوە کاتێك x ژمارەیەکی ڕاستی بێت.

52 $\frac{x^4}{x^3} \le 2x$ **53** $x^4 - 1 \ge 0$ **54** $\ln x^5 > \ln x$

55 $2x^2 \le 3x^3$ **56** $2x^2 - x \ge 0$ **57** $12x - x^2 > 25$

58 **ئەندازە** درێژی لایەکی چوارگۆشە گەورەکە 12 m و سەرەکانی هەر چوارگۆشەیەکی ناوەوە ناوەڕاستی لایەکانی ئەو چوارگۆشەیە کە دەکەوێتە ناویەوە. وایدابنێ کرداری دروستکردنی چوارگۆشەکان تا ناکۆتا بەردەوامە.



أ چێوەی چوارگۆشەی دووەم بدۆزەوە.

ب سەرجەمی چێوەی هەموو چوارگۆشەکان بدۆزەوە.

ج سەرجەمی ڕووبەری هەموو چوارگۆشەکان بدۆزەوە.

د لەبارێکدا درێژی لایەکی چوارگۆشەکە s بێت، سەرجەمی چێوەکان بە بەکارهێنانی هێمای سەرجەم بنووسە ئەم کارە لەگەڵ سەرجەمی ڕووبەرەکان دووبارەبکەوە.

هـ کام دوو زنجیرە بەخێرایی کەمدەکات، سەرجەمی چێوەکان یان سەرجەمی ڕوبەرەکان؟ چۆن ئەمەت زانی.

59 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** بەراورد لەنێوان سەرجەمی بەش S_n بۆ زنجیرە ئەندازەیی دوا نەهاتوو و سەرجەمی گشتییەکەیدا بکە، کاتێك $a_1 > 0$ و $r = \frac{4}{5}$ کامیان گەورەترە؟ ئایا گۆڕان لە کارەکەدا دەبێت ئەگەر $a_1 < 0$. ئەمە ڕوونبکەوە.

60 **بنووسە** جیاوازای لەنێوان نووسینی سەرجەمی بەش S_n بۆ زنجیرە ئەندازەیی دوا نەهاتوو و سەرجەمی گشتیدا چییە؟



61 کام زنجیرە ئەندازەییە دوا نەهاتووی لێکنزیکبووەوەیە؟

أ $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^k$ ب $\sum_{k=1}^{\infty}5\left(\frac{1}{4}\right)^k$ ج $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4}(5)^k$ د $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k(5)^k$

62 سەرجەمی ئەم زنجیرە ئەندازەییە دوا نەهاتووە $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots$ کامەیە؟

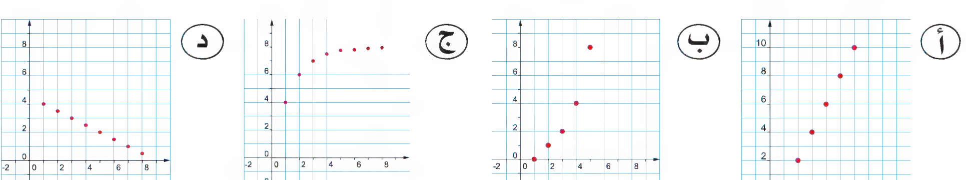
أ 2 ب $\frac{2}{3}$ ج $\frac{1}{2}$ د $\frac{1}{3}$

63 زنجیرە ئەندازەییەکی دوا نەهاتوو سەرجەمەکەی 180 بێت و بنچینەکەی $r = \frac{2}{3}$ ڕادەی یەکەمی چەندە؟

أ 60 ب 120 ج 270 د 540

64 کام لەم وێنە ڕونکردنەوەییانە زنجیرەی ئەندازەیی دوا نەهاتووی لێکنزیکبوو دەنوێنیت؟

أ ب ج د



65 **دریژە وەڵام** بۆ سەلماندنی $3+5+...+(2n+1)=n(n+2)$ دەرئەنجامی بیرکاری بەکاربێنە هەرچی دەیکەیت نیشانییدە.

بەرەنگاری و فراوانکردن

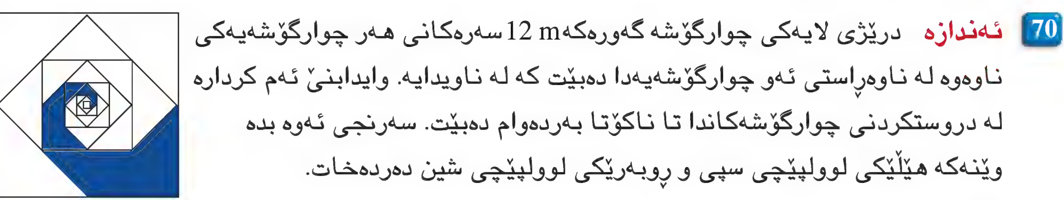
ژمارەی دەوری وەك كەرتێك بە سادەترین شێوە بنووسە.

66 $0.1\overline{6}$ **67** $0.41\overline{6}$ **68** $0.52\overline{86}$

69 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** ئایا دەگونجێت زنجیرە ژمارەیەکی دوا نەهاتوو سەرجەمەکەی لە کۆتایی دیاریکراو نزیکبێتەوە، هەروەك لەهەندێك زنجیرە ئەندازەییە دوا نەهاتووەکاندا هەیە؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

70 **ئەندازە** درێژی لایەکی چوارگۆشە گەورەکە 12 m سەرەکانی هەر چوارگۆشەیەکی ناوەوە لە ناوەڕاستی ئەو چوارگۆشەیەدا دەبێت کە لە ناویدایە. وایدابنێ ئەم کردارە لە دروستکردنی چوارگۆشەکاندا تا ناکۆتا بەردەوام دەبێت. سەرنجی ئەوە بدە وێنەکە هێڵێکی لوولپێچی سپی و ڕووبەرێکی لوولپێچی شین دەردەخات.





أ سەرجەمی زنجیرەیەکی ئەندازەیی دوا نەهاتوو بۆ دۆزینەوەی درێژی هێڵە شینەکە بەکاربێنە.

ب سەرجەمی زنجیرەیەکی ئەندازەیی کۆتایی نەهاتوو بۆ دۆزینەوەی ڕووبەری ناوچە شینەکە بەکاربێنە.

ج ئایا ئەو وەڵامەی لە لقی ب دا دەستکەوتووە گونجاوە؟ وەڵامەکەت ڕونبکەوە.

پێداچوونەوەی لوولپێچی

71 **تۆپی پێ** گۆڵکەری یانەی پێشمەرگە بۆ تۆپی پێ 80% ی لێدانی ڕاستەوخۆ گۆڵ دەکات گۆڵکەرەکە پێنج لێدانی ڕاستەوخۆ لێدەدات. ئەگەری ئەوەی بە لایەنی کەمەوە 4 لێدان گۆڵ بێت چەندە؟ (پۆلەکانی پێشوو)

72 **ئەندازە** شێوازەکەی بەرامبەر بەکاربێنە (وانەی 6–3)

أ ژمارەی خاڵەکان لە سێ وێنەی بەرامبەردا بدۆزەوە.

ب ڕێسایەك بنووسە بۆ دۆزینەوەی ژمارەی خاڵەکانی شێوەکە پلەکەی n بێت.

ج ژمارەی خاڵەکان لە شێوەی بیست و دووەمین چەندە؟

دیاریبکە یەکبەدوای یەکەکە ژمارەییە یان ئەندازەییە بنچینەی ژمارەییەکەی و بنچینەی ئەندازەییەکە بدۆزەوە ئەگەر توانرا (وانەی 4 –6)

73 $297, 99, 33, 11, ...$ **74** $\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, 4, \frac{16}{3}, ...$

75 $25, 100, 250, 1000, ...$ **76** $4, 4.8, 5.76, 6.912, ...$

بەشی 6

ڕێبەری خوێندن: پێداچوونەوە

پێنج ڕادەی یەکەمی هەر یەکبەدوای یەکێك بدۆزەوە.

1. $a_n = n - 9$
2. $a_n = \frac{1}{2}n^2$
3. $a_n = \left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}$
4. $a_n = a_{n-1} - 2$ و $a_1 = 55$
5. $a_n = \frac{1}{5}a_{n-1}$ و $a_1 = 200$
6. $a_n = -3a_{n-1} + 1$ و $a_1 = -3$

ڕیسایەك بۆ ڕادەی n لە هەریەکبەدوای یەکێك بدۆزەوە.

7. $-4, -8, -12, \ldots$
8. $5, 20, 80, 320, \ldots$
9. $-24, -19, -14, -9, \ldots$
10. $27, 18, 12, 8, \frac{16}{3}, \ldots$
11. **وەرزش** یاریکەرێکی تۆپی سەبەتە لە بەرزایی 3.2 m تۆپێکی فڕێدا و دوای بەر زەوی کەوتنی تا بەرزایی 70% ی بەرزییەکەی پێشووی بەرزبووەوە بەو شێوەیە تۆپەکە چەند بەرزدەبێتەوە؟ لە جاری چوارەم و نۆیەمدا چەند بەرز دەبێتەوە؟

زنجیرەکە بکەوە و سەرجەمەکەی هەژماربکە.

12. $\sum_{k=1}^{k=4} k^2(-1)^k$
13. $\sum_{k=1}^{k=5} (0.5k + 4)$
14. $\sum_{k=1}^{k=5} (-1)^{k+1}(2k - 1)$
15. $\sum_{k=1}^{k=4} \frac{5k}{k^2}$

سەرجەمی زنجیرەکە هەژماربکە.

16. $\sum_{k=1}^{k=8} (-5)$
17. $\sum_{k=1}^{k=10} k^2$
18. $\sum_{k=1}^{k=12} k$
19. **پارەدان** سەردار خانوویەکی بە قیست کڕی. قیستی مانگانەکەی 1 150 000 دینارە دوای دوو ساڵ چەندی پارە داوە؟ دوای 15 ساڵ چەند پارەدەدات؟

ڕادەی یازدەهەم لەهەر زنجیرە ژمارەییەك بدۆزەوە.

20. $23, 19, 15, 11, \ldots$
21. $\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, 1, \frac{7}{5}, \frac{9}{5}, \ldots$
22. $-9.2, -8.4, -7.6, -6.8, \ldots$
23. $a_4 = 5$ و $a_3 = 1.5$
24. $a_8 = 21$ و $a_6 = 47$
25. $a_9 = 13$ و $a_5 = -7$

سەرجەمی داواکراو لەهەر زنجیرە ژمارەییەك بدۆزەوە.

26. S_{18} لە زنجیرەی ... $-1 - 5 - 9 - 13 -$
27. S_{12} لە زنجیرەی ... $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{6} -$
28. $\sum_{k=1}^{k=15} (-14 + 3k)$
29. $\sum_{k=1}^{k=15} \left(\frac{3}{2}k + 10\right)$
30. **پاشەکەوتکردن** لیندا لەسەرەتای ساڵدا 50 000 دیناری هەبوو. باوکی بڕیاریدا هەفتانە 8 000 دیناری بداتێ. لیندا بڕیاریدا ئەوەی هەیەتی و ئەوەی باوکی دەیداتێ کۆیبکاتەوە تا پاڵتۆیەکی پێ بکڕێت نرخەکەی 499 000 دینارە. یەکبەدوای یەکێکی ژمارەیی بنووسە بارەکە بنوێنێت. ئایا لیندا دەتوانێت لە کۆتایی ساڵدا پاڵتۆکەی بکڕێت؟

ڕادەی هەشتەم لەهەر یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەییدا بدۆزەوە.

31. $40, 4, 0.4, 0.04, \ldots$
32. $\frac{1}{18}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$
33. $-16, -8, -4, -2, \ldots$
34. $-6, -12, -24, -48, \ldots$

ڕادەی نۆیەمی هەر یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی بدۆزەوە.

35 $a_3 = 24$ و $a_4 = 96$

36 $a_1 = \frac{2}{3}$ و $a_2 = -\frac{4}{3}$

37 $a_4 = -1$ و $a_6 = -4$

38 $a_3 = 4$ و $a_6 = 500$

ناوەندە ئەندازەیی بۆئەم دوو ژمارەیە بدۆزەوە.

39 10 و 2.5

40 8 و $\frac{1}{2}$

41 $\frac{\sqrt{3}}{96}$ و $\frac{\sqrt{3}}{6}$

42 $\frac{5}{12}$ و $\frac{125}{108}$

لەهەر یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی سەرجەمی داواکراو بدۆزەوە.

43 S_5 لە زنجیرەی $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots$

44 S_6 لە زنجیرەی $-\frac{4}{5}+8-80+\ldots$

45 $\sum_{k=1}^{k=8}(4)^{k-1}$

46 $\sum_{k=1}^{k=7}-2(5)^{k-1}$

47 $\sum_{k=1}^{k=6}60\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

48 $\sum_{k=1}^{k=5}18\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

49 **کەلوپەل** نرخی ئامێرێکی کۆپیکردنی نوێ 9 ملیۆن دینارە. پاش 5 ساڵی تر نرخی ئامێرەکە دەبێتە چەند. ئەگەر زانیت نرخەکەی لە هەر ساڵێك 65%ی ساڵی پێشووی نرخی کەمدەکات.

50 **کرێ** کرێی خانوویەك 650 000 دینارە لە مانگێکدا کرێکە ساڵانە بە ڕێژەی 6% زیاد دەکات.

أ لە پاش 6 ساڵ کرێی ساڵانەی خانوەکە دەبێتە چەند؟

ب سەرجەمی ئەو پارانەی کرێچییەکە داویەتی لە پێنج ساڵی یەکەمدا چەندە؟

سەرجەمی زنجیرە ئەندازەیی دوا نەهاتوو بدۆزەوە.

51 $-2\,700+900-300+\ldots$

52 $-1.2-0.12-0.012+\ldots$

53 $-49-42-36-\frac{216}{7}-\ldots$

54 $4+\frac{4}{5}+\frac{4}{25}+\frac{4}{125}+\ldots$

55 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{9}{3^k}$

56 $\sum_{k=1}^{\infty}-7\left(\frac{3}{5}\right)^k$

57 $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^k$

بۆ سەلماندنی هەریەکە لەمانەی خوارەوە دەرئەنجامی بیرکاری بەکاربێنە.

58 $2+4+8+\ldots+2^n=2^{n+1}-2$

59 $1+5+25+\ldots+5^{n-1}=\frac{5^n-1}{4}$

60 $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\ldots+\frac{1}{4n^2-1}=\frac{n}{2n+1}$

61 **بۆخۆشی** کچێك سواری جۆلانەیەك بووە. لەبەرزییەکەوە دێتە خوارەوە پێش ئەوەی جۆلانەکە بەرزبێتەوە، ئەو دووریەی کچەکە دەیبڕێت لەجاری یەکەمی سەرکەوتن و دابەزیندا 9 مەترە.

أ زنجیرە ئەندازەییەکی دوا نەهاتوو بنووسە ئەو دووریە بنوێنێت کە دەیبڕێت، ئەگەر زانیت دووری لەهەر جارێکدا 85% دووری جاری پێشووە.

ب پێش وەستانی جۆلانەکە ئەو دوورییە چەند دەبێت کەبڕیویەتی .

بەشی 6



پێنج ڕادەی یەکەمی هەریەکبەدوای یەکێك بدۆزەوە.

1 $a_n = n^2 - 4$

2 $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} - 8$ و $a_1 = 48$

ڕێسایەك بۆهەریەك لەم یەکبەدوای یەکانە بنووسە.

3 $-4, -2, 0, 2, 4, \ldots$

4 $54, 18, 6, 2, \frac{2}{3}, \ldots$

یەکبەودای یەکەکە بکەوە و سەرجەمەکانیان هەژماربکە.

5 $\sum_{k=1}^{k=4} 5k^3$

6 $\sum_{k=1}^{k=7} (-1)^{k+1}(k)$

ڕادەی نۆیەمی هەریەکبەدوای یەکێکی ژمارەیی بدۆزەوە.

7 $-19, -13, -7, -1, \ldots$

8 $a_5 = 5$ و $a_2 = 11.6$

9 لەم یەکبەودای یەکە ژمارەییەدا دوو ڕادە نادیارەکە بدۆزەوە $125, \blacksquare, \blacksquare, 65$

سەرجەمی داواکراو لەهەریەك لەم زنجیرە ژمارەییانە بدۆزەوە.

10 S_{20} لە زنجیرەی $4 + 7 + 10 + 13 + \ldots$

11 $\sum_{k=1}^{k=12} (-9k + 8)$

12 لە یەکێك لە شانۆکان ڕیزی یەکەم 16 کورسی تێدایە. لە ڕیزی دووەمەوە ژمارەی کورسییەکان دوو کورسی زیاد دەکات لە ژمارەی کورسییەکانی ڕیزی پێش خۆی. ژمارەی کورسییەکانی ڕیزی دووازدەیەم چەند؟ ژمارەی کورسییەکانی دووازدە ڕیزی یەکەم چەندە؟

ڕادەی دەیەمی هەر یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی بدۆزەوە.

13 $\frac{3}{256}, \frac{3}{64}, \frac{3}{16}, \frac{3}{4}, \ldots$

14 $a_5 = 8$ و $a_4 = 2$

15 ناوەندی ئەندازەیی بۆهەردوو ژمارەی 4 و 25 بدۆزەوە

لەهەر زنجیرە ئەندازەییەك سەرجەمی داواکراو بدۆزەوە.

16 S_6 لە زنجیرەی $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$

17 $\sum_{k=1}^{k=12} 250\left(-\frac{1}{5}\right)^{k-1}$

18 ئەگەر هەموو ساڵێك یەك ملیۆن دینارت لە بانك دانا بۆ ماوەی 10 ساڵ بەسوودی ساڵانەی 5%، ملیۆنی یەکەم لە کۆتایی ساڵی دەیەم دەبێتە چەند؟ لەکۆتایی ساڵی دەیەم هەموو پارەکەت دەبێتە چەند؟

سەرجەمی زنجیرە ئەندازەیی دوا نەهاتوو بدۆزەوە. (ئەگەر سەرجەمی هەبوو)

19 $200 - 100 + 50 - 25 + \ldots$

20 $\sum_{k=1}^{\infty} 2\left(\frac{7}{8}\right)^k$

دەرئەنجامی بیرکاری بەکاربهێنە بۆ سەلماندنی $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \ldots + \frac{2n-1}{2} = \frac{n^2}{2}$.

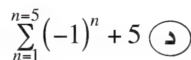
21 هەنگاوی 1:

22 هەنگاوی 2:

23 هەنگاوی 3:



تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو



1 کام لەمانە یەکبەدوای یەکی 4، 6، 4، 6، 4 دەنوێنێت. کە بەهێمای سەرجەم نووسراوە؟

(أ) $\sum 24$ (ج) $\sum_{n=0}^{n=5}(-1)^n+5$

(ب) $\sum_{n=1}^{n=4}(-1)^n+5$ (د) $\sum_{n=1}^{n=5}(-1)^n+5$

2 کام لەمانە کراوەی دوو ڕادەداری $(2x-y)^3$ دەبێت؟

(أ) $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$

(ب) $8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3$

(ج) $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$

(د) $8x^3+12x^2y+3xy^2+y^3$

3 کام لەم نەخشانە $f(x)=x^3+2x^2-5x-9$ بریتییە لە وێنەی نەخشەی $f(x)$ لە وێنەدانەوەی بەدەوری تەوەری دووەم.

(أ) $g(x)=-x^3-2x^2+5x+9$

(ب) $g(x)=-x^3+2x^2+5x-9$

(ج) $g(x)=2x^3+4x^2-10x-18$

(د) $g(x)=x^3+2x^2-5x-5$

4 کام لەم نەخشانە نەخشەی گەڕانەوەی توانییە؟

(أ) $f(x)=-5x$

(ب) $f(x)=2.3(6.7)^x$

(ج) $f(x)=0.49(7.9)^x$

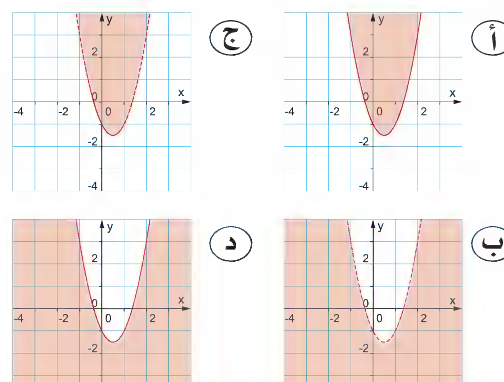
(د) $f(x)=5.13(0.32)^x$

5 تۆپێك لە بەرزی 10 m وە کەوتە خوارەوە و بەر زەوی کەوت و هەڵبەزیەوە. هەموو جارێك 60% ی بەرزییەکەی پێشووی بەرزدەبێتەوە کام لەمانە بەرزی تۆپەکە بەمەتر لە n جاردا دەنوێنێت؟

(أ) $10(0.6n)$ (ج) $\frac{10-n}{0.6}$

(ب) $10(0.6)^{n-1}$ (د) $10(0.6)^n$

6 کام وێنە ڕوونکردنەوەییانە شیکاری ئەم لاسەنگە دووجاییە $6x+3y\geq 6x^2-3$ دەنوێنێت؟



7 ژیلە ئارایشتگایەکی جوانکاری کردەوە. لە چوار هەفتەی یەکەمیدا یەك لەدوای یەك 2 000 000 دینار، 2 400 000 دینار، 2 880 000 دینار، 3 456 000 دیناری قازانج کرد. لەهەفتەی شەشەمدا قازانجەکەی چەند دەکات، ئەگەر قازانجەکە بەم شێوەیە زیادبکرێت؟

(أ) 3 856 000 دینار (ج) 4 147 000 دینار

(ب) 4 032 000 دینار (د) 4 980 000 دینار

8 ڕادەی نۆیەم لە یەکبەدوای یەکی $a_n=\frac{1}{2}\left(2^{n-1}\right)+4$ چەندە؟

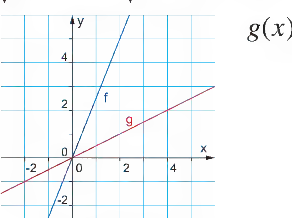
(أ) 36 (ب) 68 (ج) 132 (د) 260

9 پێچەوانەی نەخشە بۆ نەخشەی $f(x)=4x-5$ چییە؟

(أ) $f^{-1}(x)=-4x+5$ (ج) $f^{-1}(x)=\frac{x+5}{4}$

(ب) $f^{-1}(x)=\frac{1}{4}x+5$ (د) $f^{-1}(x)=5x-4$

10 نەخشەی $f(x)$ بە چ جێگۆڕكێیەك دەگۆڕێتەوە بۆ نەخشەی $g(x)$



أ چوونەوەیەكی ئاسۆیی بە هاوكۆلكەی $\frac{1}{5}$

ب كشانی ئاسۆیی بەهاوكۆلكەی 5

ج چوونەوەیەكی ستوونی بە اهوكۆلكەی $\frac{1}{3}$

د كشانی ستوونی بە هاوكۆلكەی 3

11 كام لەمانە سفری نەخشەی $f(x)=2x^2+5x-12$ دەبێت؟

أ -4 و $\frac{3}{2}$ ج $-\frac{3}{2}$ و 4

ب -2 و 3 د $\frac{3}{2}$ و 2

كورتە وەڵام

12 بنچینەی یەكبەدوای یەكی ئەندازەیی $125, 50, 20, 8, ...$ چەندە؟

13 كاغەزێك لە كاغەزەكانی یاری ڕاكێشرا ئەگەری ئەوەی ئەو كاغەزە 10 یان سووربێت چەندە؟

14 سەرجەمی زنجیرە ژمارەیی $\sum_{k=1}^{k=8}(7k-3)$ چەندە؟

15 پۆوتانی دووەمی ئەو خاڵەی شیكاری ئەم سستەمە دەنوێنێ چەندە؟ $\begin{cases}2y-2=4x\\6-x=8y\end{cases}$

16 ئەم نەخشەیە بەكاربێنە $f(x)=\sqrt[3]{5x}$ ؟

أ بوار و مەودای نەخشەكە بدۆزەوە.

ب پێچەوانەی نەخشە بۆ نەخشەی $f(x)$ چییە؟

ج بوار و مەودای پێچەوانەی نەخشەكە چییە؟

17 زنجیرە ئەندازەیی دوا نەهاتووی $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5}{4^{n-1}}$ بەكاربێنە.

أ دیاریبكە زنجیرەكە نزیكبوونە یان دوركەوتنە.

ب سەرجەمی زنجیرەكە بدۆزەوە (ئەگەر هەبێت)

18 یەكێك لە كۆگا گەورەكان قووتووی ساردەمەنی شێوە سێگۆشەیی نمایش دەكات. بەجۆرێ كە ژمارەی قووتووەكان لە بەرزترین ڕیزدا 3 قوتوە هەتا لە ڕیزەكاندا بەرەوە خوارەوە بچین ژمارەی قووتوەكان یەكێك زیاد دەكات.

أ ئایا یەكبەدوای یەك یان زنجیرە بۆ نواندنی ژمارەی قووتوەكان لە ڕیزی n بەكاردێت؟

ب ژمارەی قووتوەكانی هەر 12 ڕیزەكە چەندە؟

ج زنجیرەی $\sum_{k=1}^{k=n}(k+2)$ چی دەنوێنێت؟ ڕوونیبكەوە.

درێژە وەڵام

19 پاڵێوراوان بۆ وەرگرتن لە كۆلێژی ئەفسەری بە دوو تاقیكردنەوەدا تێپەڕدەبن 60% ی پاڵێوراوان تاقیكردنەوەی یەكەم بەسەركەوتویی دەبڕن، 20% یان تاقیكردنەوەی دووەم بەسەركەوتویی دەبڕن.

أ هێڵكارییەكی درەختی دروستبكە ئەگەرە لە تواناكان بۆهەر پاڵێوراوێك دەربخات.

ب ئەگەر پاڵێوراوەكان بۆیان هەبێت لەهەردوو تاقیكردنەوەكەدا بەشداربن ئەگەری ئەوەی پاڵێوراوەكە لەهەردوو تاقیكردنەوەكە دەربچێت چەندە؟ چەند پاڵێوراو چاوەڕێی دەرچوون دەكەن ئەگەر ژمارەیان 50 پاڵێوراو بێت.

ج كامیان گەورەترە: ئەگەری ئەوەی پاڵێوراوەكان لەهەردوو تاقیكردنەوەكەدا دەربچێت یان لەهەردووكیاندا بكەون؟ ڕوونیبكەوە.



بەشی 7

سێگۆشەزانی Trigonometry

بەشی حەوتەم

وانەکان

سووکە سەرسووڕانەوە

دەتوانیت ڕوونکردنەوەییەکانی نەخشە سێگۆشەییەکان و هاوئەنجامە سێگۆشەییەکان بەکاربێنی بۆ دروستکردنی نموونەکانی جوڵەی بازنەیی یان ڕەورەوە لە بارە جیاوازەکاندا.

ئایا تۆ ئامادەیت؟

زاراوەکان

هەر زاراوەیەك بەپێی پێناسەکەی کە لەلای چەپ هاتووە ببەستەوە.

1 Sin ی گۆشە

2 Cosin ی گۆشە

3 ژێی سێگۆشەی وەستاو

4 tan ی گۆشە

أ ڕێژەی درێژی لای بەرامبەری گۆشەکەیە بۆ درێژی لاتەنیشتەکەی.

ب ڕێژەی درێژی لاتەنیشتی گۆشەکەیە بۆ درێژی ژێیەکەی.

ج ڕێژەی درێژی ژێیە بۆ درێژی لای بەرامبەر گۆشەکە.

د ڕێژەی لای بەرامبەر گۆشەکەیە بۆ درێژی ژێیەکەی.

هـ لای بەرامبەری گۆشە وەستاوەکەیە.

دابەشکردنی کەرتەکان

دابەشبکە

5 $\dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{5}{2}}$ **6** $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}$ **7** $\dfrac{-\frac{3}{8}}{\frac{1}{8}}$ **8** $\dfrac{\frac{2}{3}}{-\frac{7}{4}}$

سادەکردنی برە ڕەگییەکان

برەکە بەسادەترین شێوەی بنووسە.

9 $\sqrt{6}\times\sqrt{2}$ **10** $\sqrt{100-64}$ **11** $\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{36}}$ **12** $\sqrt{\dfrac{4}{25}}$

لێکدانی دوو ڕادەدار

لێکبدە

13 $(x+11)(x+7)$ **14** $(y-4)(y-9)$ **15** $(2x-3)(x+5)$

16 $(k+3)(3k-3)$ **17** $(4z-4)(z+1)$ **18** $(y+0.5)(y-1)$

هاوئەنجامە تایبەتییەکان

لێکبدە

19 $(2x+5)^2$ **20** $(3y-2)^2$

21 $(4x-6)(4x+6)$ **22** $(2m+1)(2m-1)$

23 $(s+7)^2$ **24** $(-p+4)(-p-4)$

بەشی 7

ڕێبەری خوێندن: تێڕوانین لەسەر بەشەکە

لە رابردوودا

ئەمانەت خوێندووە

- شیکارکردنی ئەو پرسیارانەی سێگۆشە و ڕێژە سێگۆشەییەکانی تێدایە.
- بەکارهێنانی شیتەڵ بۆ شیکارکردنی هاوکێشە دووجاکان.
- بەکارهێنانی ئەو نەخشانەی نموونەیەك بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی ژیانی ڕۆژانە پێکدێنن.
- شیکارکردنی هاوکێشەکان بەجەبری و ڕوونکردنەوەیی.

لەم بەشەدا

ئەمانە فێردەبیت

- شیکارکردنی ئەو پرسیارانەی نەخشە سێگۆشەییەکانیان تێدایە.
- نەخشە سێگۆشەییەکان بۆ دروستکردنی نموونە کە بارەکانی ڕاستی ژیان بنوێنێت.

لە داهاتوودا

دەتوانیت کارامەییەکانی ئەم بەشە بەکاربێنیت لە

- قۆناغی بەرزتردا، لە کاتی خوێندنی جیاکاری و تەواوکاری
- لە وانەکانی تری وەك فیزیا، زیندەزانی و ئابووری.
- دەرەوەی خوێندنگا بۆ خوێندنی دیاردەی ڕووداوەکان. (الظواهر الدورية)

زاراوەکان — *Vocabulary*

زاراوەکان	Vocabulary
فراوانی	Amplitude
خول	Cycle
دوبارە بوونەوە – لەرەلەر	Frequency
کاتی خوولی	Period
نەخشەی خولاوە	Periodic functions
لادانی ڕوو	Phase shift
ڕیزکراوەی خولانەوە	Rotation matrix

ڕۆشناییەك لەسەر زاراوەکان

بۆ ئەوەی لەگەڵ هەندێك لەم زاراوانەدا رابێی کە لەم بەشەدا هاتووە ئەم هەنگاوانە پەیڕەو بکە:

1. واتای وشەی **فراوانی** لە ژیانی ڕۆژانەدا چییە؟ مەبەست لە فراوانی بەندۆڵی کاتژمێر چییە؟
2. واتای وشەی **خول** لە ژیانی ڕۆژانەدا چییە؟ نموونە لەسەر **دیاردەی ڕووداوەکان** بێنەوە.
3. نموونە لەسەر کارێك بێنەوە دووبارە بونەوەی تێدابێت. وەك پاککردنەوەی ددان ڕۆژانە. دەوترێت ڕۆژی دووجار ددانم دەشۆم. باسی ئەو نموونەیە بکە باسمان کرد.
4. بەدەگمەن واتای **ماوەی خوولی** لە ژیانی ڕۆژانەدا بەکاردێت. ئەم دەربڕینە بۆ تۆ چی دەگەیەنێت؟ واتای **نەخشەی خولاوە** چۆن تێدەگەیت؟
5. کاتێك **ڕیزکراوەی خولانەوە** بەکاردێنێت ئەو ئەنجامەی پێشبینی دەکەیت چییە؟





ستراتیژیەتی وانەکە: ئامادەبوون بۆ تاقیکردنەوەی کۆتایی.

بیرکاری بابەتێکی کەڵەکەبووە. بۆیە هەموو ئەو بابەتانەی لەسەرەتای ساڵەوە دەیخوێنیت. تاقیکردنەوەی کۆتایی ساڵ دەیگەرێتەوە. بۆیە واباشترە بەم شێوەیەی لە خوارەوە هاتووە بۆ خۆ ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە پلاندانێی:

دوو حەفتە پێش تاقیکردنەوە

- بە تاقیکردنەوەکانی پێشوو و ئەرکی ماڵەوەدا. بچۆوە بۆ ئەوەی ئەو بابەتانەی پێویستن گرنگیان پێبدەی و ئەو پرسیارانەی بە هەڵە شیکارکراون یان شیکارەکانیان ناتەواوە سەر لە نوێ شیکاریان بکەیتەوە.
- ئەو یاسا و سەلمێنراوانەی بۆ رۆژی تاقیکردنەوە پێویستە بیانزانی لە لیستێکدا بیان نووسە.
- خۆت لەو پرسیارانە تاقیبکەوە لەسەر شێوەی پرسیاری تاقیکردنەوەکان (تاقیکردنەوەی نموونەیی خۆت ئەنجام بدە).

حەفتەیەك پێش تاقیکردنەوە

- ئەو پرسیارانەی پێشتر بۆ تاقیکردنەوە نموونەییەکە بەکارتهێناون لە وەڵامەکانیان دڵنیابە، ئەگەر لە شیکار کردنی پرسیارەکاندا سەرکەوتوو نەبووی بەدوای نموونەی هاوشێوەدا بگەرێ و خۆت لەسەر شیکارکردنیان راببێنە.
- لەگەڵ یەکێك لە هاوپۆلەکانتدا لەسەر یاسا و سەلمێنراوەکان پرسیار لەیەکتری بکەن، لەو لیستەی کە پێشتر ئامادەتان کردبوو.

رۆژی پیش تاقیکردنەوە

- دڵنیابە لە پێداویستییەکانی تاقیکردنەوە وەك پێنووس و راستە و بژمێر (دڵنیابە لە پاتری بژمێرەکەت).



هەوڵبدە

خشتەیەکی خۆ ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوەی کۆتایی ساڵ تێیدا کات دابە شکرابێت دروستبکە.

1-7 یاسای ساین Sine و یاسای کۆساین Cosine

Law of sines and Low of cosines

ئامانجەکان

یاسای ساین و کۆساین بەکاردێت بۆ شیکارکردنی سێگۆشە کاری.

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

ئەندازیارەکان بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی بینادروستکردن یاسای ساین و کۆساین بەکاردەهێنین.

لەوکاتەی بورجی پیزا لە ساڵی 1370 ز لە ئیتالیا دروستکراوە. ئەندازیارەکان چەندەها پێشنیار پێشکەش دەکەن بۆ کەمکردنەوەی لارییەکەی.ئەو گۆشەیەی ئەو بورجە لەگەڵ زەوی دروستیکردوە وەستاونییە وەك ئەو شێوازانەی کە بە شێوەیەکی گشتی لە تەلارەکاندا هەیە. بۆیە لەسەر ئەندازیارەکان پێویست بوو لەسەر ئەو سێگۆشانە کاربکەن کە وەستاونین.

لە پۆلی دەیەم فێری چۆنیەتی بەکارهێنانی ڕێژە سێگۆشەییەکان بوویت. بۆ دۆزینەوەی پێوانەکانی گۆشەکانی سێگۆشە گۆشەوەستاو، هەروەها فێری دۆزینەوەی لایەکانی بوویت. بەوکردارەش دەوترێت **شیکارکردنی سێگۆشەی وەستاو**.لەم وانەیەشدا شیکارکردنی سیگۆشە فێردەبێت جۆرەکەی هەر جۆنێك بێت. بۆ ئەوە پێویستت بە هەژمارکردنی ڕێژە سێگۆشەییەکانی ئەو گۆشانە هەیە کە پێوانەکەیان دەگاتە 180° بۆت هەیە بژمێر بەکاربێنیت بۆ دۆزینەوەی ئەو بەهایانە.

نموونـــــە 1 دۆزینەوەی ڕێژە سێگۆشەییەکان بۆ گۆشەکراوەکان

بازنەی یەکە بۆ دۆزینەوەی هەر ڕێژەیەکی سێگۆشەیی بەکاربهێنە:

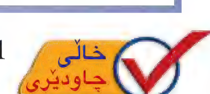
أ $\sin 135^\circ$ ب $\tan 98^\circ$ ج $\cos 108^\circ$

```
sin(135)
 .7071067812
```

```
tan(98)
 -7.115369722
```

```
cos(108)
 -.3090169944
```

$\sin 135^\circ \approx 0.71$ $\tan 98^\circ \approx -7.12$ $\cos 108^\circ \approx -0.31$



1. بازنەی یەکە بۆ دۆزینەوەی هەر ڕێژەیەکی سێگۆشەیی بەکاربهێنە:

أ $\cos 120^\circ$ ب $\sin (-150^\circ)$ ج $\tan 120^\circ$

دەتوانیت بەرزی سێگۆشە بەکاربێنیت بۆ دۆزینەوەی پەیوەندییەك کەلایەکانی سێگۆشەکە بەیەکەوە ببەستێت. لەسەری سێگۆشەکەوە C بەرزی سێگۆشەکە بۆ سەر $\overline{AB}$ بکێشە. پاڵپشت بەوێنەی بەرامبەر. دەتوانیت بنووسیت

$$\sin\hat{A} = \frac{h}{b} \qquad \sin\hat{B} = \frac{h}{a}$$

$$h = b \sin \hat{A} \qquad h = a \sin \hat{B}$$

لەمەوە دەردەچێت $a \sin\hat{B} = b \sin\hat{A}$

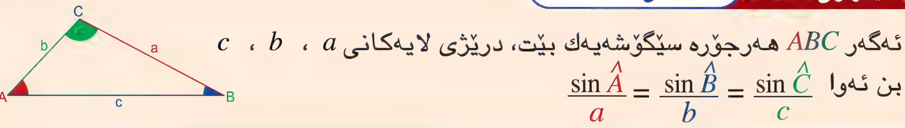
لەمەوش دەردەچێت $\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b}$

C, A, B, a, b, c, h

هەروەها دەتوانیت بەرزییەکی تر لە بەرزییەکانی سێگۆشەکە بەکاربێنیت بۆ ڕوونکردنەوەی ئەوەی کە دوو ڕێژە یەکسانەکەی پێشوو دووبارە یەکسانن بە ڕێژەی $\frac{\sin \hat{C}}{c}$.



سەلمێنراوی 1-7 یاسای ساین Sin



ئەگەر ABC هەرجۆرە سێگۆشەیەك بێت، درێژی لایەکانی a ، b ، c

بێ ئەوا $\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c}$

دەتوانی یاسای Sin بۆ شیکارکردنی سێگۆشە بەکاربێنی بەزانینی:-

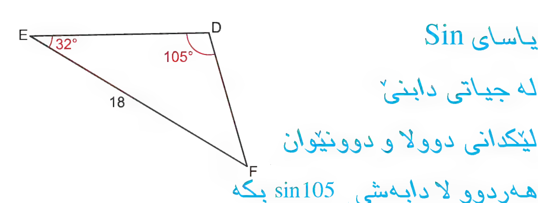
- پێوانەی دوو گۆشە لە گۆشەکانی و درێژی لایەکی.
- درێژی دوو لە لایەکانی و پێوانەی گۆشەیەك لە نێوانیادا نەبێت.

نموونـــــە 2 بەکارهێنانی یاسای Sin

پێوانەی داواکراو بدۆزەوە. درێژییەکەی بۆ نزیکترین بەش لە دەیەك نزیکبکەوە و پێوانەی هەر گۆشەیەك بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە

أ DF





$\frac{\sin \hat{D}}{EF} = \frac{\sin \hat{E}}{DF}$ یاسای Sin

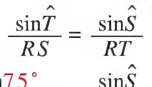
$\frac{\sin 105°}{18} = \frac{\sin 32°}{DF}$ لە جیاتی دابنێ

$DF \times \sin 105° = 18 \times \sin 32°$ لێکدانی دوولا و دوونێوان

$DF = \frac{18 \times \sin 32°}{\sin 105°} \approx 9.9$ هەردوو لا دابەشی sin105 بکە

ب $m\hat{S}$







$\frac{\sin \hat{T}}{RS} = \frac{\sin \hat{S}}{RT}$ یاسای Sin

$\frac{\sin 75°}{7} = \frac{\sin \hat{S}}{5}$ لە جیاتی دابنێ

$\sin \hat{S} = \frac{5 \times \sin 75°}{7}$ هەردوو لا لە 5 بدە

$m\hat{S} = \sin^{-1}\left(\frac{5 \times \sin 75°}{7}\right) \approx 44°$ دوگمەی $\sin^{-1}$ دابگرە بۆ هەژمارکردنی پێوانە $\hat{S}$

دەتوانی بژمێری زانستی بۆ پێوانی $\hat{S}$ بەکاربێنە، پاش گۆڕینی بژمێر بۆ ئەوەی بەشێوازی شەستی (پلە) کاربکات لە جیاتی گۆشەی نیوەتیرەیی (بازنەیی) دوگمەی MODE دابگرە پاشان بیخەرە سەر Degree لە دوایدا دووگمەی ENTER و بۆ هەژمارکردنی $m\hat{S}$ یەك لە دواییەك دووگمەی 2nd ، SIN ، 5 ، x ، SIN ، 7 ، 5 ، (، ÷ ، 7 ،) ، Enter داگرە.

> **تێبینی**
> ئەگەر بژمێرت نەبێ
> $\sin 105° \approx 0.96$
> $\sin 32° \approx 0.53$
> $\sin 44° \approx 0.69$



2. **پێوانەی داواکراو بدۆزەوە. هەر درێژیەك بۆ نزیکترین بەش لە دەیەك نزیکبکەوە، پێوانەی هەر گۆشەیەك بۆ نزیکترین پلە بدۆزەوە.**

أ NP (M، N، P: 22، 88°، 39°)

ب $m\hat{L}$ (J، K، L: 10، 6، 125°)

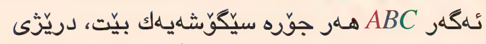
ج $m\hat{X}$ (X، Y، Z: 50°، 4.3، 7.6)

د AC (A، B، C: 44°، 67°، 18)

یاسای Sin ناتوانێت هەموو سێگۆشەیەکمان بۆ شیکاربکات بۆ نموونە ئەگەر دوو لا و گۆشەی نێوانیان نەزانی یان ئەگەر درێژی هەموو لایەکانی زانراوبێت. لەم بارانەدا پێویستە یاسای Cos (کۆساین) بەکاربێنین.

> **تێبینی**
> ئەگەر بژمێرت نەبێ
> $\sin 88° \approx 0.99$
> $\sin 39° \approx 0.63$
> $\sin 127° \approx 0.8$
> $\sin 125° \approx 0.82$
> $\sin 50° \approx 0.76$
> $\sin 67° \approx 0.92$





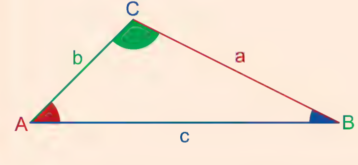
ئەگەر ABC هەر جۆرە سێگۆشەیەك بێت، درێژی

لایەکانی a ، b ، c بن ئەوا

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\hat{B}$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\hat{C}$



دەتوانی یاسای Cosine بۆ شیکارکردنی سێگۆشە بەکاربێنی بەزانینی:-

- دوو لا و گۆشەی نێوانیان.
- درێژی هەرسێ لایەکەی.

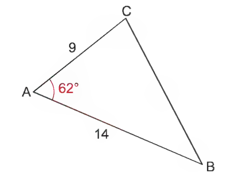
یارمەتی

لە یاسای Cos دا گۆشەی بەکارهاتوو لەهەموو یەکسانبوونەکاندا بریتییە لە و گۆشەیەی بەرامبەر لاکەی تری یەکسانبوونەکەیە.

نموونە 3 بەکارهێنانی یاسای Cosine

پێوانەی داواکراو بدۆزەوە، هەر درێژیەك بۆ نزیکترین دەیەك نزیکبکەوە، و پێوانەی هەر گۆشەیەك بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە.

أ BC



یاسای Cos: $BC^2=AB^2+AC^2-2(AB)(AC)\cos\hat{A}$

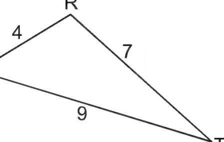
لەجیاتی دابنێ: $=14^2+9^2-2(14)(9)\cos 62°$

سادەبکە: $BC^2\approx 158.6932$

ڕەگی دووجا وەربگرە: $BC\approx 12.6$

درێژی $\overline{BC}\approx 12.6$ بەنزیکەیی

ب $m\hat{R}$



یاسای Cos: $ST^2=RS^2+RT^2-2(RS)(RT)\cos\hat{R}$

لەجیاتی دابنێ: $9^2=4^2+7^2-2(4)(7)\cos\hat{R}$

سادەبکە: $81=65-56\cos\hat{R}$

$16=-56\cos\hat{R}$

شیکاربکە: $\cos\hat{R}=-\frac{16}{56}$

$m\hat{R}=\cos^{-1}\left(-\frac{16}{56}\right)\approx 107°$

پێوانەی $\hat{R}$ بریتییە $107°$ بەنزیکراوەیی.

تێبینی

ئەگەر بژمێرت نەبێ

$\cos 62°\approx 0.47$

$\cos 107°\approx 0.29$

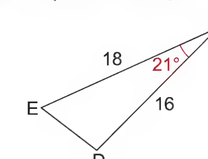


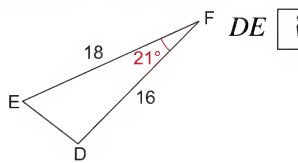


خاڵی چاودێری

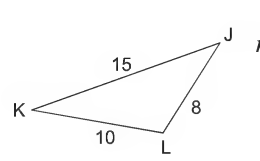
3. پێوانەی داواکراو بدۆزەوە، هەر درێژیەك بۆ نزیکترین دەیەك نزیکبکەوە، هەر پێوانەیەك بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە.

أ DE

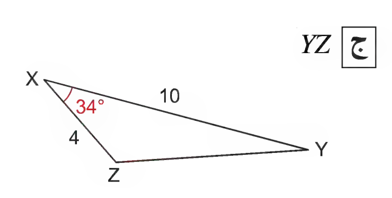




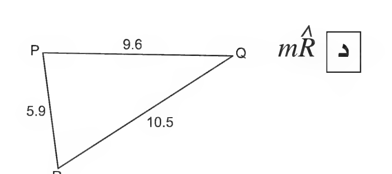
ب $m\hat{K}$



ج YZ



د $m\hat{R}$



تێبینی

ئەگەر بژمێرت نەبێ

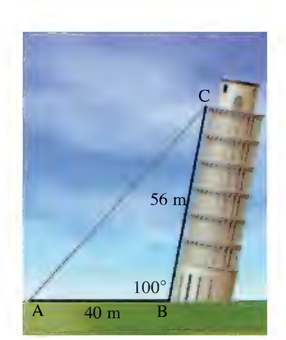
$\cos 21°\approx 0.93$

$\cos 29°\approx 0.87$

$\cos 34°\approx 0.83$

$\cos 64°\approx 0.43$

نموونـــــە 4 جێبەجێکردن لە ئەندازەی بیناسازی



بەرزی بورجی پیزا لە ئیتالیا **56m** ە لەساڵی 1999 ز گۆشەی بورجەکە گەیشتە **100°** بۆ ئەوەی بورجەکە نەڕوخێت ئەندازیارێك پێشنیاری ئەوەی کرد لوتکەی بورجەکە بە سیمێك لەگەڵ خاڵێك کە **40m** لە بنکەکەیەوە دوور بێت ببەستیتەوە. درێژی سیمەکە و پێوانەی ئەو گۆشەیەی لەگەڵ ڕووتەختی زەویەکەدا دروستی دەکات چەندە؟ درێژییەکەی بۆ نزیکترین دەیەك لە مەتر و پێوانەی گۆشەکە بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە.

ئاگاداربە!

وەڵامەکان نزیك مەکەوە تانەگەیتە ئەنجامی کۆتایی ئەگەر پرسیارەکە لە چەند هەنگاوێك پێکهاتبێ وەڵامی سەرەتایی لەهزری بژمێرەکە بپارێزە.

هەنگاوی 1 درێژی سیمەکە بدۆزەوە.

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2(AB)(BC)\cos\hat{B}$ یاسای Cos

$= 40^2 + 56^2 - 2(40)(56)\cos 100°$ لەجیاتی دابنێ

$AC^2 = 5513.9438$ سادەبکە

$AC = 74.3$ ڕەگی دووجا وەربگرە

هەنگاوی 2 پێوانەی گۆشەی سیمەکە لەگەڵ ڕووی زەویەکەدا بدۆزەوە.

$\frac{\sin\hat{A}}{BC} = \frac{\sin\hat{B}}{AC}$ یاسای Sin

$\frac{\sin\hat{A}}{56} = \frac{\sin 100°}{74.2559}$ لەجیاتی دابنێ

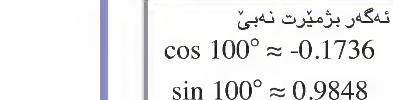
$\sin\hat{A} = \frac{56 \times \sin 100}{74.2559}$ سادەبکە

$m\hat{A} = \sin^{-1}\left(\frac{56 \times \sin 100°}{74.2559}\right) \approx 48°$ بژمێرە بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی mA

گۆشەی سیمەکە لەگەڵ ڕووی زەویەکە دەکاتە $48°$ بەنزیکی.

تێبینی

ئەگەر بژمێرت نەبێ



$\cos 100° \approx -0.1736$

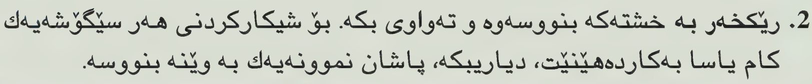
$\sin 100° \approx 0.9848$



4. چی دەبێت ئەگەر...؟ ئەندازیارێکی تر پێشنیازی ئەوەی کرد لوتکەی بورجەکە بە سیمێکی بەهێز بخاڵێك لە 31m لە بنکەی بورجەکەوە دووربێت ببەستیەوە درێژی ئەو سیمە چەند دەبێت. درێژییەکە بۆ نزیکترین دەیەك لە مەتر پێوانەی گۆشەکە بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە.

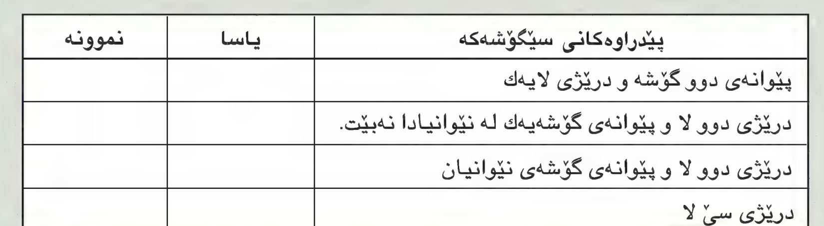
بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. بۆ هەژمارکردنی BC بە یاسای Sin ئایا پێویستیت بە زانیاری زیاتر هەیە؟ ئەگەر وەڵامەکەت بەڵێ بوو ئەو زانیارییە چییە؟



2. ڕێکخەر بە خشتەکە بنووسەوە و تەواوی بکە. بۆ شیکارکردنی هەر سێگۆشەیەك کام یاسا بەکاردەهێنێت، دیارییبکە، پاشان نموونەیەك بە وێنە بنووسە.





نموونە	یاسا	پێدراوەکانی سێگۆشەکە
		پێوانەی دوو گۆشە و درێژی لایەك
		درێژی دوو لا و پێوانەی گۆشەیەك لە نێوانیادا نەبێت.
		درێژی دوو لا و پێوانەی گۆشەی نێوانیان
		درێژی سێ لا

1-7 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاراستەکراو

پروانە نموونە 1

بژمێری زانستی بۆ دۆزینەوەی هەر ڕێژەیەکی سێگۆشەیی بەکاربهێنە وەڵامەکەت بۆ نزیکترین بەش لەسەدە نزیکبکەوە

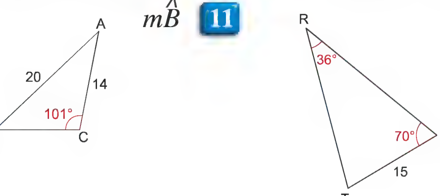
1. $\sin 100°$
2. $\sin 167°$
3. $\tan 92°$
4. $\tan 141°$
5. $\cos 133°$
6. $\sin 150°$
7. $\sin 147°$
8. $\tan 164°$
9. $\cos 156°$

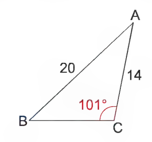


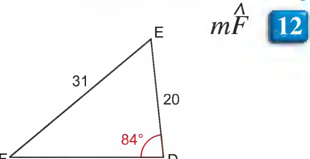
پروانە نموونە 2

پیوانەی داواکراو بدۆزەوە، درێژییەکە بۆ نزیکترین دەیەك، و پێوانەی گۆشەکە بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە

10. RT
11. $m\hat{B}$
12. $m\hat{F}$



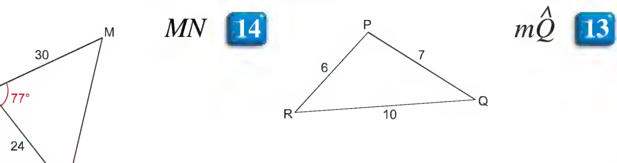


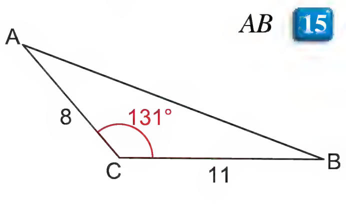


پروانە نموونە 3

پیوانەی داواکراو بدۆزەوە، درێژییەکە بۆ نزیکترین دەیەك و پێوانەی گۆشەکە بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە.

13. $m\hat{Q}$
14. MN
15. AB





پروانە نموونە 4

16. **دارتاشی** دارتاشێك چوار چێوەیەکی لە 3 پارچەدار دروستکرد. درێژییەکانیان بریتیبوون لە $20cm$ و $24cm$ و $30cm$ پیوانەی هەر گۆشەیەك لە گۆشەکانی سێگۆشەکە چەندە؟ وەڵامەکانت بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە.

ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

بەبەکارهێنانی بازنەی یەکە ئەمانەی خوارەوە بدۆزەوە

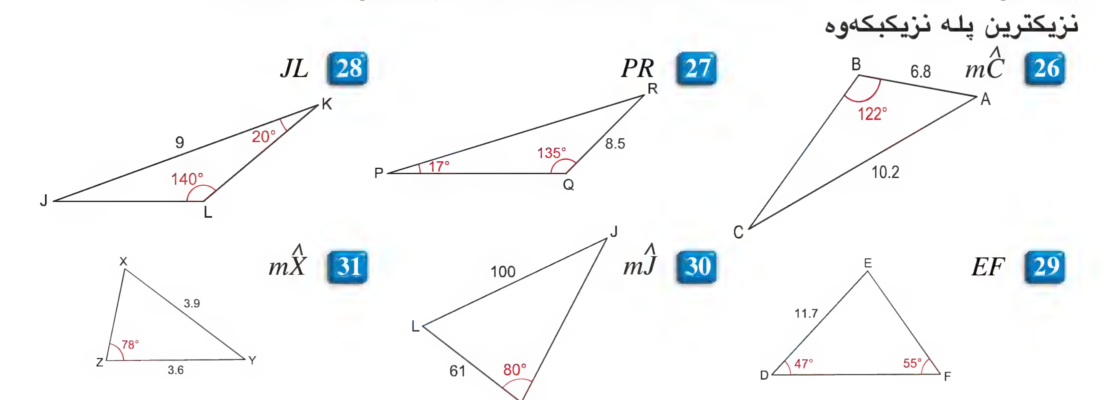
17. $\cos 180°$
18. $\tan(-150°)$
19. $\tan 150°$
20. $\sin 150°$
21. $\sin(-120°)$
22. $\cos 90°$
23. $\tan 270°$
24. $\cos(-135°)$
25. $\sin 90°$

ڕاهێنانی ئازاد

بۆشیکارکردنی ڕاهێنانەکان	سەیری نموونە بکە
25-17	1
31-26	2
37-32	3
38	4

پیوانەی داواکراو بدۆزەوە، درێژییەکە بۆ نزیکترین دەیەك، و پێوانەی گۆشەکە بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە

26. $m\hat{C}$
27. PR
28. JL
29. EF
30. $m\hat{J}$
31. $m\hat{X}$



32 AB

33 $m\hat{Z}$

34 $m\hat{R}$

35 EF

36 LM

37 $m\hat{G}$

دەروازەیەك

لەسەر سستەمی چاودێری

زۆربەی کردارەکانی چاودێری بە هۆی سستەمی جیهانی GPS ئەنجام دەدرێت. ئەو سستەمە چەند مانگێکی دەستکرد بۆ دیاریکردنی شوێنەکان بەکاردێنێ

38 **چاودێری** بۆ ئەوەی چاودێرێك درێژی دەریاچەیەك بزانێت 3 خاڵی A و B و C دیاریکرد وەك لە وێنەی بەرامبەردا دیارە. درێژی $\overline{AB}$ بدۆزەوە نزیککرابێتەوە بۆ نزیکترین دەیەك لە مەتر؟ و پێوانەی $\hat{B}$ گۆشەی B نزیکرابێتەوە بۆ نزیکترین پلە چەندە؟

بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی 42-39 سێگۆشەی بەرامبەر بەکاربێنە. درێژییەکان نزیکبکەوە بۆ نزیکترین دەیەك و گۆشەکان بۆ نزیکترین پلە.

39 $m\hat{A}=74°$ ، $m\hat{B}=22°$ ، $b=3.2$ cm ، a بدۆزەوە

40 $m\hat{C}=100°$ ، $a=9.5$m ، $b=7.1$ m ، c بدۆزەوە

41 $a=2.2$m ، $b=3.1$m ، $c=4$m ، $m\hat{B}$ بدۆزەوە.

42 $a=10.3$cm ، $c=8.4$cm ، $m\hat{A}=45°$ ، $m\hat{C}$ بدۆزەوە.

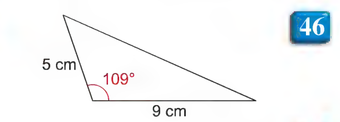
43 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** وادابنێ پێوانەی هەر سێ گۆشەکانی سێگۆشەیەك دەزانی. و دەتەوێت درێژی لایەکانی بدۆزیەوە ئایا دەتوانیت یاسای Sin یان Cos بەکاربێنیت بۆ گەیشتن بەو مەبەستە؟ بەڵگە بۆ وەڵامەکەت بهێنەوە.

44 **چی دەبێت ئەگەر...؟** یاسای Cos چ گۆڕانێکی بەسەردا دێت ئەگەر گۆشەکە وەستاوبێت؟

45 **پێشبڕکێ** وێنەی بەرامبەر نەخشەی یەکێك لە پێشبڕکێیەکانی ڕۆیشتن ڕووندەکاتەوە. پێویستە پێشبڕکێکەرەکە چەند پلە پێچ بکاتەوە پاش گەیشتنی بە خاڵی چاودێری یەکەم بۆ ئەوەی ڕووبکاتە خاڵی چاودێری دووەم؟ وەڵامەکەت نزیك بکەوە ببۆ نزیکترین پلە.

فرەهەنگاو چێوەی هەر سێگۆشەیەك هەژماربکە. وەڵامەکەت بۆ نزیکترین دەیەك نزیکبکەوە.

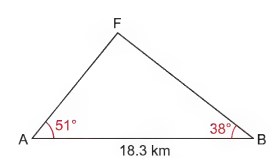
46



47

48

49 لێرەدا بارێکی لێتێچوون لە بارەکانی جێبەجێکردنی یاسای Sin داهەیە. ئەویش ئەو بارەیە کە لە سێگۆشەیەکدا پێوانەی یەکێك لە گۆشەکان و درێژی لایەکی بەرامبەر گۆشەکە و درێژی لایەکی تر بزانیت. بەڵام درێژی لای بەرامبەرە کورترە لە درێژی لایەکەی تر. ئەوا دووبار هەیە بۆ ئەم جۆرە سێگۆشانە. دوو بەهای گونجاو بۆ $m\hat{C}$ وەڵامەکەت بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە (یارمەتی: لەکاتی بەکارهێنانی بژمێری ڕوونکردنەوەیی بۆ دۆزینەوەی گۆشەیەك sin ـەکەی زانراوبێت پێوانەی گۆشەیەکی تیژی ئەوتۆت دەداتی کە مەرجەکە بێنێتەدی. ئەو گۆشەیە و گۆشە پڕکەرەکەی بەهەندوەربگرە).



50 دوو تیمی بەرگری شارستانی کە لە دووخاڵی A ، B دابوون، ئاگادار کرانەوە لە خاڵی F دا ئاگرێك كەوتووەتەوە.

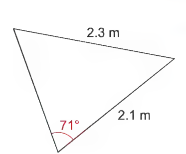
أ $m\widehat{CBD}$ بدۆزەوە.

ب دووری نێوان هەر تیمێك و شوێنی ئاگرەکە هەژماربکە. وەڵامەکەت بۆ نزیکترین کیلومەتر نزیکبکەوە.

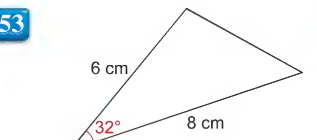
ج کۆپتەری ئاگر کوژێنەوە بەخێرایی $150\,km/h$ دەفرێت. ئەو کاتە چەندە کە تیمەکان قازانج دەکەن ئەگەر کۆپتەرەکە لە خاڵی A وە بفرێت لە جیاتی خاڵی B .

دیاریبکە ئایا دەتوانیت یاسای Sin یان یاسای Cos وەك هەنگاوی یەکەم بۆ شیکارکردنی هەر سێگۆشەیەك بەکاربێنیت.

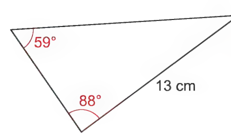
51



52



53

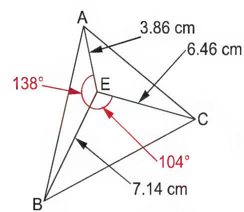


54 پۆوتانی سەرەکانی سێگۆشەی ABC بریتییە لە $A(0, 3)$ ، $B(3, 1)$ ، $C(-3, -1)$

أ AB ، BC ، CA بدۆزەوە

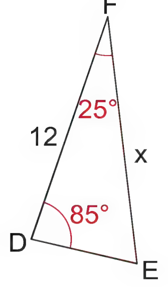
ب کام یەکێك لە گۆشەکانی سێگۆشە گەورەترین پێوانەی هەیە؟

ج پێوانەی ئەو گۆشەیە بدۆزەوە.



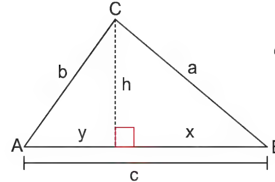
55 **هونەر** کلار شێوازێکی پێکهێنا بۆ رەنگکردنی شووشە وەك لە وێنەی بەرامبەردا دایە. BC و AB هەژماربکە پاشان $m\widehat{ABC}$ بدۆزەوە. درێژییەکە بۆ نزیکترین بەش لە سەد و گۆشەکە بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە.

56 **هەڵە لە شیکردنەوە** داوا لە خوێندکاران کرا درێژی x لە سێگۆشەی بەرامبەردا بدۆزنەوە. ئەم دوو وەڵامەیان پێشنیارکرد. کامیان هەڵەیە؟ هەڵەکە روونبکەوە.



بەپێی یاسای sin	بەپێی یاسای sin
$\frac{\sin 85}{x} = \frac{\sin 25}{12}$	$\frac{\sin 85}{x} = \frac{\sin 70}{12}$
$x \sin 25 = 12 \sin 85$	$x \sin 70 = 12 \sin 85$
$x = \frac{12 \times \sin 85^\circ}{\sin 25^\circ} \approx 28.3$	$x = \frac{12 \times \sin 85^\circ}{\sin 70^\circ} \approx 12.7$

57 سەلماندنی یاسای Cos لە سێگۆشەیەکی گۆشەتیژ



دراو: ABC سێگۆشەیەکە هەموو گۆشەکانی تیژە و درێژی لایەکانی بریتین لە a ، b ، c

داواکراو : $a^2=b^2+c^2-2bc \times \cos \hat{A}$

سەلماندن: لە خاڵی C وە ئەستونێك بۆ سەر $\overline{AB}$ بکێشە. و سێگۆشەکە دەبێتە 2 سێگۆشەی وەستاو 1 و 2 وەستاو هێمای h بۆ بەرزییەکە دابنێ لایـ$\overline{AB}$ دەکات دوو بەشەوە. درێژی یەکەم x و درێژی دووەم y بێت. بە پێی سەلمێنراوی فیساغورس دەتوانین بنووسین.

لە سێگۆشەی 1 دا $a^2=h^2+y^2 \quad \dots (1)$

لە سێگۆشەی 2 دا $b^2=h^2+x^2 \quad \dots (2)$

لەجیاتی y لە هاوکێشەی 1 : (x -2) دابنێ

$a^2=h^2+(x\text{-}2)^2 \quad \dots (3)$

$a^2=(h^2+x^2)+c^2\text{-}2cx$

لەجیاتی h^2+x^2 دابنێ b^2

$a^2=b^2+c^2\text{-}2cx \quad \dots (4)$

لەسێگۆشەی 2 دا: $\cos\hat{A} = \frac{x}{b}$

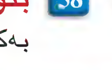
$x = b\cos\hat{A}$

لەجیاتی دانان لە 4 ئەنجامەکە دێتەدی

$a^2=b^2+c^2\text{-}2bc\cos\hat{A}$



58 **بنووسە** ئایا دەتوانیت یاسای Sin بۆ شیكاركردنی سێگۆشەی بەرامبەرت بەكاربێنیت؟ وەڵامەكەت بەبەڵگە ڕوونبكەوە.







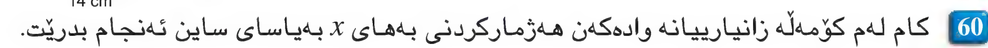
ئامادەكردن بۆ تاقیكردنەوە



59 كام لەمانەی خوارەوە نزیكترین بەهایە بۆ درێژی $\overline{AB}$ ؟



(أ) 5.5cm (ب) 14.4cm (ج) 7.5cm (د) 22.2cm



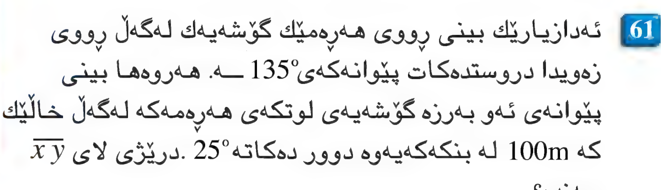
60 كام لەم كۆمەڵە زانیارییانە وادەكەن هەژماركردنی بەهای x بەیاسای ساین ئەنجام بدرێت.

(أ) $ST=15.3$ ، $RS=8.1$ ، $m\hat{T}=38^\circ$

(ب) $ST=9$ ، $m\hat{S}=40^\circ$ ، $RS=4$

(ج) $ST=7$ ، $m\hat{S}=34^\circ$ ، $m\hat{R}=92^\circ$

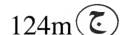
(د) $m\hat{T}=31^\circ$ ، $m\hat{S}=44^\circ$ ، $m\hat{R}=105^\circ$



61 ئەندازیارێك بینی ڕووی هەرەمێك گۆشەیەك لەگەڵ ڕووی زەویدا دروستدەكات پێوانەكەی 135° ـە. هەروەها بینی پێوانەی ئەو بەرزە گۆشەیەی لوتكەی هەرەمەكە لەگەڵ خاڵێك كە 100m لە بنكەكەیەوە دوور دەكاتە 25°. درێژی لای $\overline{xy}$ چەندە؟



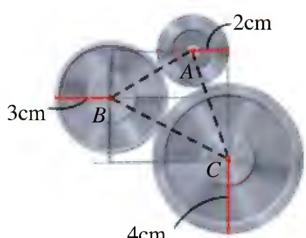






(أ) 48m (ب) 81m (ج) 124m (د) 160m

بەرەنگاری و فراوانكردن



62 **فرەهەنگاو** 3 پەیك پێكەوە نوسێنران وەك لە وێنەی بەرامبەردا دیارە، نیوەتیرەی پەیكەكان بریتی بوون لە 2cm، 3cm، 4cm لە سێگۆشەی ABC دا $m\widehat{ACB}$ بدۆزەوە. وەڵامەكەت بۆ نزیكترین پلە نزیكبكەوە.

63 ڕاستەهێڵی ℓ بە دووخاڵی $(-1, 1)$، $(1, 3)$ دا دەڕوات، ڕاستەهێڵی m بە دووخاڵی $(-1, 1)$ و $(3, 2)$ دا دەڕوات. پێوانەی ئەو گۆشە تیژەی دوو ڕاستەهێڵەكە دروستی دەكەن هەژماربكە وەڵامەكەت بۆ نزیكترین پلە نزیكبكەوە.

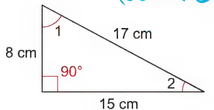
64 **دەریاوانی** بەندەری B بە دووری 5km لە باشووری بەندەری A ەوەیە. كەشتیەك لە بەندەری A دەستی بە جوولە كرد بە ئاراستەی باكوور -32° ڕۆژهەڵات خێراییەكەی 6km/h. كەشتییەكەی دوای 45 خولەك چەند دوورە لە خاڵی B ەوە. وەڵامەكەت بۆ نزیكترین دەیەك لە كیلۆمەتر نزیكبكەوە.

پێداچوونەوەی لولپێچی

لەهەر شێوازێكدا، ئەو ژمارەیە بنووسە كە پلەكەی n بێت (پۆلەكانی پێشوو)

65 3, 6, 9, 12, 15,... **66** 3, 5, 7, 9, 11,... **67** 4, 6, 8, 10, 12,...

ڕێژەی سێگۆشەییەكان بەكاربێنە بۆ دیاریكردنی گۆشەی $\hat{A}$ لە هەر بارێكدا (پۆلەكانی پێشوو)



68 $\cos\hat{A}=\frac{15}{17}$ **69** $\sin\hat{A}=\frac{15}{17}$ **70** $\tan\hat{A}=1.875$

بژمێری ڕوونكردنەوەیی بەكاربێنە بۆ دۆزینەوەی پێوانەی گۆشەتیژی A لەهەر پرسیارێكدا. وەڵامەكەت بۆ نزیكترین بەشی لە هەزار نزیكبكەوە.

71 $\sin\hat{A}=0.89$ **72** $\cos\hat{A}=0.89$ **73** $\tan\hat{A}=2.05$

2–7

نەخشە سێگۆشەییەکان

Trigonometric Functions



بۆ چی ئەمە فێر دەبین؟

دەتوانیت دیاردە خولییەکان بە بەکارهێنانی نەخشە سێگۆشەییەکان بنوێنرێن، وەك شەپۆلە دەنگییەکان (تەماشای نموونەی 3 بکە).

ئامانجەکان

جیاکردنەوەی نەخشە خولییەکان، جیاکردنەوەی نەخشە سێگۆشەیەکان و کێشانی ڕوونکردنەوەییان.

زاراوەکان Vocabulary

نەخشەی خولی (الدالة الدورية) Periodic function

نەخشەی سێگۆشەیی Trigonometric function

خول Cycle

کاتی خوولاو (الزمن الدوري) Period

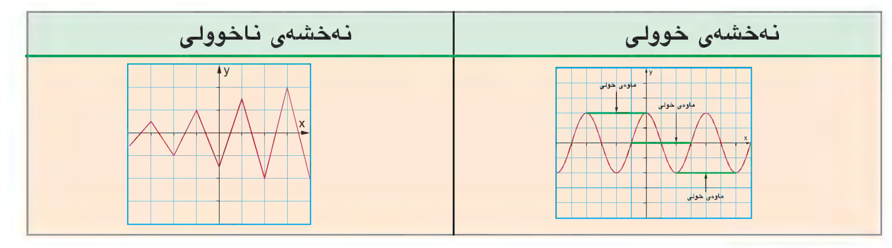
فراوانی Amplitude

لەرەلەر Frequency

لادانی ڕوو Phase shift

نەخشەی سێگۆشەیی Trigonometric function نەخشەیەکە ڕێساکەی بڕێکی سێگۆشەییە نەخشە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکان سیانن **نەخشەی ساین Sine function** $f(x)=\sin x$ و **نەخشەی کۆساین** cosine Function $f(x)=\cos x$ و **نەخشەی تان Tangent function** $f(x)=\tan x$ کاتێك x پێوانەی گۆشەکەبێت بە گۆشەی نیوەتیرەی radian نەخشە سێگۆشەییەکان بەوە جیادەکرێنەوە، کە بەهایەکانیان بە شێوەیەکی خولی دووبارە دەبنەوە. نەخشەی Sine پاسادانی $\sin(x+2\pi)=\sin x$ دەکات ئەمەش ئەوە دەگەیەنێت ئەم نەخشەیە هەمان بەهای دەبێت کاتێك x لە ماوەی $[0, 2\pi]$، $[2\pi, 4\pi]$ دا دەبێت. دەتوانین ئەمە بەم شێوەیە دەرببڕین، نەخشەی Sinx خولایەوە و کاتی خوولەکەی بریتییە لە 2π .

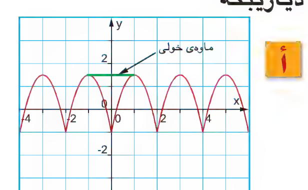
نەخشەی دووبارەبووە Periodic function ئەو نەخشەیەیە بەهایەکانی لە ماوە ڕێکەکاندا دووبارە دەبنەوە بەو ماوە ڕێکانەش دەوترێت **خول Cycles** هەموو خولەکان یەك درێژیان هەیە. پێی دەووترێت **کاتی خولی Period** سەرەنجی ئەم ڕونکردنەوانە بدە یەکێکیان خولییە ئەویتریان خولی نییە دەبینیت خولەکە دەتوانێت لە هەر خاڵێکی چەماوەی نەخشەکەوە دەستپێبکات.



نموونـــــە 1 جیاکردنەوەی نەخشە خووليیەکان

دیاریبکە نەخشەکە خولییە یان نا، ئەگەر نەخشەکە خوولیبووە بوو ماوەی خولییەکەی دیاریبکە

أ



ب



شێوازەکە بە شێوەیەکی ڕێکوپێك دووبارە دەبێتەوە کەوا لە نەخشەکە دەکات نەخشەیەکی خوولی بێت وکاتی خوولییەکەی 2 دەبێت

شێوازێك نییە بە ڕێك و پێکی دووبارە بێتەوە هەرچەندە ڕوونکردنەوەییەکە چەند هاوچێبونێکی تێدایە. نەخشەکە خوولی نییە.

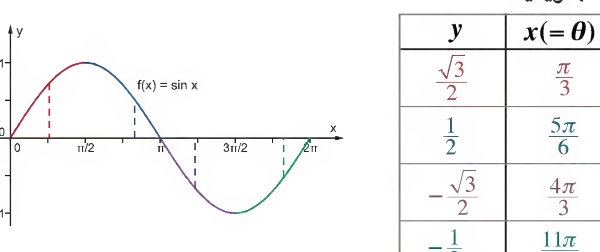
خاڵی چاودێری

1. دیاریبکە نەخشەکە خولییە یان نا ئەگەر خولی بوو، ماوەی خولییەکە دیاریبکە.

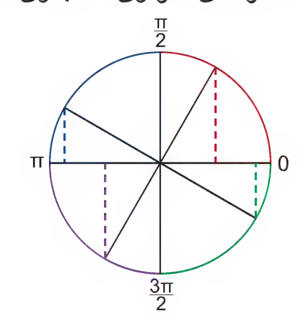
أ ب



نەخشە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکانی خوولین دەتوانیت چەماوەی نەخشەی $f(x) = \sin x$ لە ڕووتەختی پۆوتاندا بەبەکارهێنانی پۆوتانی y بۆ ئەو خاڵانەی دەکەونە سەر بازنەی یەکە دروستبکەیت، کاتێك x گۆشەی تەوەری θ لەباری نموونەیدا بنوێنێت.



y	$x(=\theta)$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{3}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{4\pi}{3}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$



دەتوانیت ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x) = \cos x$ بەبەکارهێنانی پۆوتانی x بۆ خاڵەکانی سەریەکەی بازنەکە بکێشیت. **فراوانی Amplitude** نەخشەی خولی بریتییە لە نیوەی جیاوازی نێوان گەورەترین بەهاو بچوکترین بەهای. فراوانی هەمیشە ژمارەیەکی موجەبە. فراوانی هەریەکە لە دوو نەخشەی Sin و Cos بریتییە لە $1 = \frac{1-(-1)}{2}$ بەڵام فراوانی نەخشەی tangent پێناسەنەکراوە



نەخشە	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \tan x$
ڕوونکردنەوەی نەخشەکە (چەماوەکەی)			
بوار	R	R	$\left\{x / x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathrm{I}\right\}$
مەودا	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	R
کاتی خوولی	2π	2π	π
فراوانی	1	1	پێناسە نەکراو

ڕۆشنایی

هەردوو چەماوەی نەخشەی Sin و tan بە خاڵی بنەڕەتدا دەڕۆن بەڵام چەماوەی نەخشەی Cos تەوەری y لە 1 دا دەبڕێت.

دەتوانیت چەماوەکانی نەخشە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکان بۆ کێشانی وێنەی ڕوونکردنەوەیی $y = a\sin bx$ ، $y = a\cos bx$ ، $y = a\tan bx$ بەکاربێنیت بیرت بێت. کە a ڕاکێشانی ستونی دەگەیەنێت کاتێك $(|a| > 1)$ یان چوونەوەیەکی ستوونییە کاتێك $(0 < |a| < 1)$ ئەمەش دەبێتە هۆی گۆڕانی فراوانی.

ئەگەر a سالب بێت، پێویستە جێگۆڕکێ بە ڕوونکردنەوە بکرێت بە وێنەدانەوەیەکی ئاسۆیی دەنوێنێت، b نیشانەی کشانەوە یان چوونەوەیەکی ئاسووین وکاتی خوولییەکە دەگۆڕێت.

جێگۆڕکێ ڕوونکردنەوەییەکانی نەخشە سێگۆشەییەکان

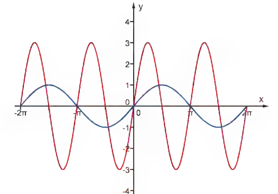
فێربە

لە نەخشە سێگۆشەییەکانی $y = a\sin bx$ $y = a\cos bx$ $y = a\tan bx$

نەخشە	فراوانی	ماوەی دوبارەبوونەوە	دەرکەنارەکان
$y = a\sin bx$	$\lvert a\rvert$	$\frac{2\pi}{\lvert b\rvert}$	دەرکەناری نییە
$y = a\cos bx$	$\lvert a\rvert$	$\frac{2\pi}{\lvert b\rvert}$	دەرکەناری نییە
$y = a\tan bx$	پێناسە نەکراوە	$\frac{\pi}{\lvert b\rvert}$	دەرکەناری ستوونیەکان لە $x = \frac{\pi}{2\lvert b\rvert} + \frac{k\pi}{\lvert b\rvert}$ کاتێك $k \in \mathrm{I}$

نموونـــــه 2 جێگۆڕکێی نەخشە سێگۆشەییەکان

أ **چەماوەی نەخشەی Sin بەکاربێنە بۆ وێنەکێشانی نەخشەی $g(x)=3\sin 2x$ فراوانی و مەودای نەخشەکە دیاریبکە.**



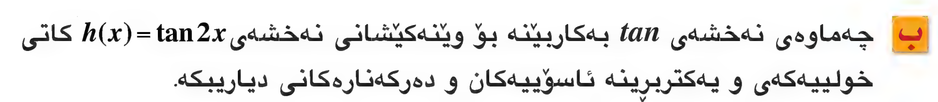
هەنگاوی 1 فراوانی و ماوەی کاتی خولی دیاریبکە.

لەبەرئەوەی $a=3$ کەواتە فراوانییەکەی $|a|=|3|=3$

لەبەرئەوەی $b=2$ کەواتە فراوانییەکەی $\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{|2|}=\pi$

هەنگاوی 2 وێنەی ڕونکردنەوەییەکەی بکێشە.

پێویستە چەماوەی نەخشەی بنەڕەت بەهاوکۆلکەی 3 رابکێشیت. و چوونەوەیەکی ئاسۆیی بە هاوکۆلکەی $\frac{1}{2}$ بۆ بکەیت. چەماوەی نەخشەی بنەڕەت تەوەری ئاسۆیی لە چەند جارەکانی π دەبڕێت، هەروەها چەماوەی نەخشەی g تەوەری ئاسۆیی لە چەند جارەکانی $\frac{\pi}{2}$ دا دەبڕێت. گەورەترین بەهای نەخشەی g لە 3 داو بچووکترین بەهای لە 3- دا دەبێت.

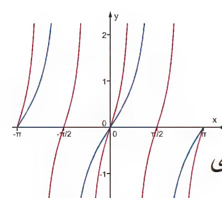


ب **چەماوەی نەخشەی *tan* بەکاربێنە بۆ وێنەکێشانی نەخشەی $h(x)=\tan 2x$ کاتی خولییەکەی و یەکتربڕینە ئاسۆییەکان و دەرکەنارەکانی دیاریبکە.**

هەنگاوی 1 کاتی خولییەکەی دیاریبکە.

لەبەرئەوەی $b=2$ کەواتە کاتی خوولییەکەی بریتییە لە $\frac{\pi}{|b|}=\frac{\pi}{|2|}=\frac{\pi}{2}$

هەنگاوی 2 یەکتربڕین لەگەڵ تەوەرەی ئاسۆیی بدۆزەوە یەکەم یەکتربڕین لە $x=0$ دا دەبێت. و لەبەر ئەوەی کاتی خوولییەکەی نەخشەکە بریتییە لە $\frac{\pi}{2}$ بۆ یەکتر بڕینەکان لەگەڵ تەوەرەی ئاسۆیدا لە $x=k\frac{\pi}{2}$ دا دەبێت. کاتێك $k\in I$



هەنگاوی 3 دەرکەنارەکان دیاریبکە لەبەر ئەوەی $b=2$ بۆیە دەرکەنارە ستونییەکانی لە $x=\frac{\pi}{2|2|}+\frac{k\pi}{|2|}$ یان $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$ دا دەبێت.

هەنگاوی 4 بەبەکارهێنانی ئەو زانیاریانەی پێشوو چەماوەی نەخشەی h بکێشە



.2 **أ** چەماوەی نەخشەی Cos بەکاربێنە بۆ وێنە کێشانی نەخشەکە $g(x)=\frac{1}{3}\cos 2x$ فراوانی و کاتی خولییەکەی بۆ ئەو نەخشەیە دیاریبکە.

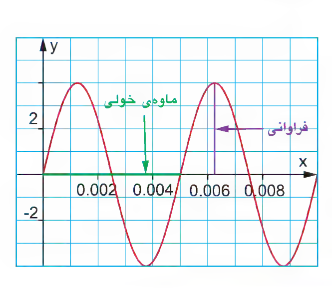
ب چەماوەی نەخشەی tan بەکاربێنە بۆ وێنەکێشانی نەخشەکە $h(x)=3\tan\frac{1}{2}x$ و کاتی خولییەکەی بۆ ئەوەی نەخشەکە و یەکتر بڕینە ئاسۆییەکان و دەرکەنارەکان بدۆزەوە.

دەتوانیت هەردوو نەخشەی Sin و Cos وەك نموونە بۆ لێکۆڵینەوەی دیاردە سروشتییەکان بەکاربێنیت وەك شەپۆلە دەنگییەکان دەنگە جیاوازەکان شەپۆڵی جیا جیا دروستدەکەن. **لەرەلەرەکان Frequency** بۆ ناسینەوەی دەنگەکان بەکاردێت. لەرەلەر بریتییە لە ژمارەی خولەکان لە یەکەیەکی کاتدا، ئەویش هەڵگەڕاوەی کاتی خولانەوەکەی. بۆ پێوانە کردنی لەرەلەرەکان هیرتز Hz بەکاردێت. بۆ نموونە؛ کاتێك دەوترێت دەنگێك بە لەرەلەری 440 هێرتزە، هێرتز مانای وایە شەپۆلی دەنگەکە 440 جار لە چرکەیەکدا دووبارە دەبێتەوە.



نموونـــه 3 جێبەجێکردن لە زانستی دەنگدا

نەخشەی Sin بەکاربێنە بۆ وێنەکێشانی شەپۆلێکی دەنگ کاتی خولییەکەی 0.005 S وفراوانییەکەی 4 cm بێت لەرەلەری ئەو شەپۆلە بدۆزەوە.



تەوەری ئاسۆیی بۆ چەند یەکەیەك ڕەنووسی بکە یەکە 0.001 چرکە بنوێنێت. کاتی خوولییەکەی 0.005 چرکە دەخایەنێت تاخولێکی تەواو دروستبکات. بەڵام فراوانی بە دوو بەهای گەورەترین و بچووکترین دیاریدەکرێت. لەبەر ئەوەی لەرەلەرەکەی یەکسانە بە هەڵگەڕاوەی کاتی خولییەکەی. بۆیە بەهایەکەی بریتییە لە $\frac{1}{0.005} = 200\,Hz$ لەرەلەری دەنگەکە 200 هێرتزە.



3. نەخشەی Sin بەکاربێنە بۆ وێنەکێشانی ئەو شەپۆڵە دەنگەی ماوەی دووبارە بوەکەی 0.004 S و فراوانییەکەی 3.0 m لەرەلەری شەپۆڵی ئەو دەنگە بە هێرتز بدۆزەوە

دەتوانرێت هەردوو نەخشەی Sin و Cos جێگۆڕکێ پێبکرێت بە ڕاکێشان بۆ دەستکەوتنی $y= \sin(x-h)+k$ یان $y = \cos(x-h) + k$ لەبیرت بێت ڕاکێشانی چەماوەکە k یەکە بە ستوونی بۆ سەرەوە دەبێت ئەگەر k موجەب بێت وە بۆ خوارەوە دەبێت ئەگەر سالب بێت.

لادانی ڕوو (انحراف الطور) Phase Shitf بۆ نەخشەیەکی دووبارەبووەوە بریتییە لە ڕاکێشانی ئاسۆیی چەماوەکە، لادانی ڕوو h یەکە بۆ لای ڕاست دەبێت ئەگەر h موجەب و بۆ لای چەپ دەبێت ئەگەر h سالب بێت.

نموونـــه 4 دیاریکردنی لادانی ڕوو بۆ هەر دوو نەخشەی Sin و Cos

ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $f(x)=\sin x$ بەکاربێنە بۆ وێنەکێشانی نەخشەی $g(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ یەکتربڕینەکان لەگەڵ تەوەری ئاسۆیی و لادانی ڕوو دیارییکە.

هەنگاوی 1 فراوانی و کاتی خوولی دیارییکە

لەبەرئەوەی $a = 1$ بۆیە فراوانی $|a|=|1|=1$

لەبەرئەوەی $b = 1$ کاتی خوولی بریتییە $\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{|1|}=2\pi$

هەنگاوی 2 لادانی ڕوو بدۆزەوە.

$x+\frac{\pi}{2}=x-\left(-\frac{\pi}{2}\right)$، h دیارییکە

لەبەر ئەوەی $h=-\frac{\pi}{2}$ بۆیە لادانی ڕوو بریتییە لە $\frac{\pi}{2}$ بۆ لای چەپ. لەمەوە دەستدەکەوێت کە هەموو یەکتربڕینەکانی وێنەکە $\frac{\pi}{2}$ یەکە بۆ لای چەپ ڕاکێشراوە.

هەنگاوی 3 یەکتربڕینە ئاسۆییەکان دیارییکە.

لەبەر ئەوەی نەخشەی بنەڕەت لە $x=k\pi$ دا تەوەری ئاسۆیی دەبڕێت کاتێك $k \in \text{I}$ بۆیەش نەخشەکە لە $x=-\frac{\pi}{2}+k\pi$ دا تەوەری ئاسۆیی دەبڕێت.

هەنگاوی 4 گەورەترین و بچووکترین بەها دیارییکە.

نەخشەکە گەورەترین یان بچوکترین بەها وەردەگرێت ئەگەر x لە ناوەڕاستی یەکتر بڕینەکان بێت لەگەڵ تەوەرەی ئاسۆییدا. گەورەترین بەهای نەخشەکە یەکسانەبە 1 لە $x=2k\pi$ بچوکترین بەهای نەخشەکە یەکسانە بە -1 لە $x=\pi+2k\pi$ کاتێك $k \in \text{I}$.

هەنگاوی 5 بەبەکارهێنانی زانیارییەکان وێنەی چەماوەی نەخشەکە بکێشە.

خاڵی چاودێری

4. چەماوەی نەخشە $f(x)=\cos x$ بەکاربێنە بۆ وێنە کێشانی $g(x)=\cos(x-\pi)$ یەکتربڕینەکان لەگەڵ تەوەری ئاسۆیی و لادانی ڕوو دیاریبکە.

دەتوانیت جێگۆرکێیەکان بەیەکەوە ئەنجام بدرێت بۆ هەردوو نەخشە Sin و Cos بەهاکانی a، b، h، k بەکاربێنە بۆ دیاریکردنی سیفەتە دیارەکانی نەخشەی Sin یان Cos .

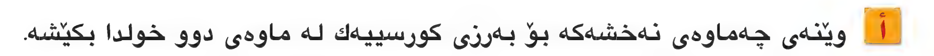
فراوانی ‌‌ ‌ لادانی ڕوو

$$y = a\sin b(x-h)+k$$

ماوەی دووبارە بونەوە ‌ ‌ ڕاکێشانی ستوونی

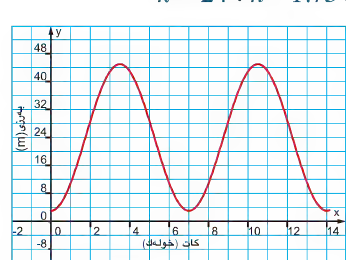
نموونـــــه 5 جێبەجێکردن

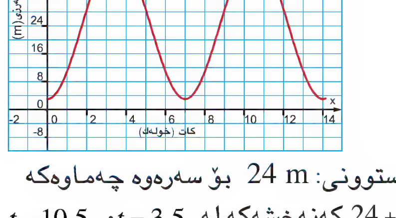
چەرخ و فەلەکێکی مەزن یەك خول بە 7 خولەك تەواودەکات. نەخشەی $H(t)=21\sin\frac{2\pi}{7}(t-1.75)+24$ ڕێسایەکە بۆ دۆزینەوەی بەرزی (بەمەتر) بۆ هەریەکێك لە کورسییەکان لە زەوییەوە بە پێی کات (چرکە).



أ **وێنەی چەماوەی نەخشەکە بۆ بەرزی کورسییەك لە ماوەی دوو خولدا بکێشە.**

$H(t)=21\sin\frac{2\pi}{7}(t-1.75)+24$ ‌ ‌ $a=21$ ، $b=\frac{2\pi}{7}$ ، $h=1.75$ ، $k=24$





هەنگاوی 1 جیاکەرەوە سەرەکییەکانی نەخشەکە دیاریبکە فراوانی 21 کاتی خولی $\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{\left|\frac{2\pi}{7}\right|}=7$

کاتی خوولی بریتییە لەو کاتەی چەرخ و فەلەکەکە دەیخایەنێت بۆ ئەوەی خولێکی تەواو بکات. دەکاتە 7 خولەك.

لادانی ڕووەکە: 1.75 خولەك بۆ لای ڕاست. ڕاکێشانی ستوونی: 24 m بۆ سەرەوە چەماوەکە تەوەرەی ئاسۆیی نابڕێت. گەورەترین بەها: $24+21=45$ کەنەخشەکە لە $t=3.5$ و $t=10.5$ دا وەریدەگرێت. بچوکترین بەها: **24-21=3** کە نەخشەکە لە $t=0$، $t=7$، $t=14$ دا وەریدەگرێت.

ب **گەورەترین بەرزی کورسییەکە دەیگاتێ چەندە؟**

گەورەترین بەرزی کورسییەکە بریتییە لە $(24+21)=45\text{m}$



خاڵی چاودێری

5. **چی دەبێت ئەگەر ...؟** وایدابنێ نەخشەکە بریتیی بێت لە $H(t)=-5\cos\frac{\pi}{45}t+7$ بە پێی t (بە چرکە).

أ وێنەی ڕوونکردنەوەیی بۆ بەرزی کورسییەك لە ماوەی دوو خولدا بکێشە

ب گەورەترین بەرزی کورسییەکە دەیگاتێ چەندە؟

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. پەیوەندی نێوان لەرلەری نەخشەی خولی وکاتی خولی چییە؟ ئەمە چۆن بەسەر نەخشەی Cos دا چێبەجێدەبێت.

2. ئەو پەیوەندییەی گەورەترین و بچووکترین بەها و فراوانی و کاتی خوولی دوو نەخشەی Sin و Cos پێکەوە دەبەستێت چییە؟

3. ڕێکخەربە هێڵکارییەکەی بەرامبەرت دروستبکەوە و تەواوی بکە لەسەر هەر جێگۆرکێیەك نموونە بێنەوە. ماوەی کاتی خولی دیاریبکە.

چوونەوەیەکی ستوونی	فراوانبوونی ئاسۆیی
نەخشەی Sin و Cos	
وێنەدانەوە	لادانی بەرە



2-7 ڕاهێنانەکان

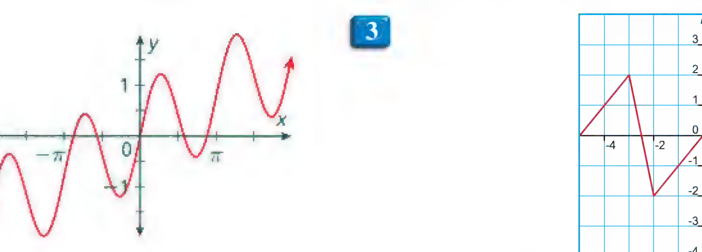
ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** بەهاکانی نەخشەی خولی لەماوە ڕێکەکاندا دووبارە دەبێتەوە پێ دەوترێت ___؟___ (خول یان کاتی خوولی).

بڕوانە نموونە 1

دیاریبکە نەخشەکە خولییە یان نا، کاتی خولی بدۆزەوە ئەگەر خولی بوو.

2 **3**



بڕوانە نموونە 2

چەماوەی نەخشەی بنەڕەت بەکاربێنە بۆ وێنە کێشانی هەرنەخشەیەک، فراوانی و کاتی خولی دیاریبکە



4 $f(x)=\sin\frac{1}{2}x$ **5** $h(x)=\frac{1}{4}\cos x$ **6** $k(x)=\sin\pi x$

چەماوەی نەخشەی بنەڕەتی بەکاربهێنە بۆ وێنەکێشانی هەرنەخشەیەك، ماوەی دووبارەبووەوە یەکتر برینەکانی ئاسۆیی دەرکەنارەکان دیاریبکە.

7 $f(x)=2\tan 3x$ **8** $h(x)=\tan\frac{1}{4}x$ **9** $k(x)=\tan 2\pi x$

بڕوانە نموونە 3

10 **دەنگ** نەخشەی Sine بۆ وێنەکێشانی شەپۆڵێکی دەنگی کەکاتی خولی 0.01S (چرکە). فراوانییەکەی 6 cm بەکاربێنە. لەرەلەری ئەو شەپۆڵە بدۆزەوە.

بڕوانە نموونە 4

چەماوەی نەخشەی بنەڕەت بۆ وێنەکێشانی هەریەك لەم نەخشانە بەکاربێنە. خاڵەکانی یەکتر برین لەگەڵ تەوەرەی ئاسۆیی و لادانی ڕوو بۆ هەر یەکەیان دیاریبکە.

11 $f(x)=\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$ **12** $h(x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ **13** $k(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

بڕوانە نموونە 5

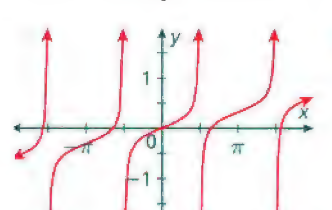
14 **بۆ خۆشی** دەتوانرێت نەخشەی $H(\theta)=-4\cos\theta+6$ بۆ هەژمارکردنی بەرزی سواربووی جۆلانەیەك (بەپێ) بە گوێرەی گۆشەی θ کە جۆلانەکە لەگەڵ ئەو ڕاستە هێڵیە ئەستوونەی بەسەرەکیدا دەڕوات پێکدێنێت. وێنەیەکی ڕوونکردنەوەیی بکێشە بەرزی سواربووی جۆلانە کە بنوێنیت، کاتێك $0^\circ \le \theta \le 90^\circ$ بەرزی سواربووەکە لە $\theta=60^\circ$ چەند؟

ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

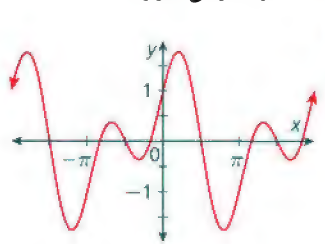
ڕاهێنانی ئازاد	
بوشیکارکردنی ڕاهێنانەکان	سەیری نموونە بکە
16–15	1
20–17	2
21	3
28–22	4
29	5

دیاریبکە نەخشەکە خولییە یان نا، کاتی خولی بدۆزەوە ئەگەر خولی بوو.

15



16



چەماوەی نەخشەی بنەڕەت بەکاربێنە بۆ وێنەکێشانی هەر نەخشەیەك، فراوانی و کاتی خولی بدۆزەوە.

17 $f(x)=4\cos x$ **18** $h(x)=\frac{3}{2}\sin x$ **19** $k(x)=-\cos 4x$ **20** $\ell(x)=6\sin\frac{1}{3}x$

21 **دەنگ** نەخشەی Sin بۆ وێنەکێشانی شەپۆڵێکی دەنگ بەکاربێنە، ئەگەر کاتی خوولی 0.025S و فراوانییەکەی 50 cm بێت. لە پاشاندا لەرەلەری شەپۆلەکەی بدۆزەوە.

چەماوەی نەخشەی بنەڕەت بۆ وێنەکێشانی هەریەك لەم نەخشانە بەکاربێنە کاتی خولی و خاڵەکانی یەکتربڕین لەگەڵ تەوەری ئاسۆیی و دەرکەنارەکان بدۆزەوە.

22 $f(x)=\tan\frac{3}{2}x$ **23** $h(x)=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ **24** $k(x)=-2\tan\frac{\pi}{2}x$

25 $f(x)=\sin(x+\pi)$ **26** $h(x)=\cos(x-3\pi)$

27 $k(x)=\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$ **28** $g(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

29 **زانستی دەریا** دەتوانیت نەخشەی $d(t)=\frac{3}{2}\sin\left(\frac{5\pi}{31}t\right)+23$ وەك ڕێسایەك بۆ دۆزینەوەی قووڵی ئاوی یەکێك لەکەنداوەکان بە مەتر و بەپێی کات بەکاربێنیت. وێنەی ئەم نەخشەیە بکێشە زۆرترین و کەمترین قووڵی بدۆزەوە.

دەروازەیەك

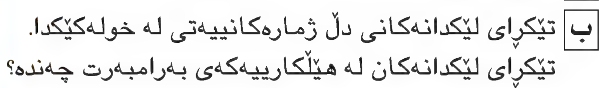
لەسەر پزیشکی

ئامێری هێڵکاری دڵ بۆ پێوانی ئەو تەزوە و کارە بایەی فرمانی لێدانەکانی دڵی مرۆڤ لە کاتی دەستنیشانکردنی نەخۆشیەکانی دڵدا ڕێك دەخات بەکاردێت.

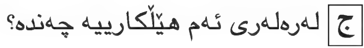
30 **پزیشکی** وێنەی بەرامبەر هێڵکاری دڵی مرۆڤێکی ئاسایی دەردەخات. هەر خولێك لێدانێکی دڵ دنوێنێت.



أ کاتی خولی لێکدانەکانی دڵێك بدۆزەوە.



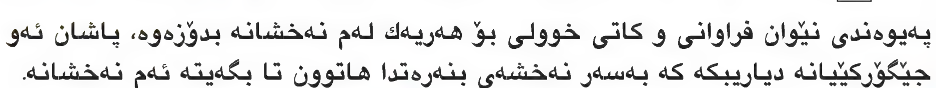
ب تێکرای لێکدانەکانی دڵ ژمارەکانییەتی لە خولەکێکدا. تێکرای لێکدانەکان لە هێڵکارییەکەی بەرامبەرت چەندە؟



ج لەرەلەری ئەم هێڵکارییە چەندە؟



د پەیوەندی نێوان لەرەلەری ئەم هێڵکارییە و تێکرایی لێکدانی دڵ چەندە؟



پەیوەندی نێوان فراوانی و کاتی خوولی بۆ هەریەك لەم نەخشانە بدۆزەوە، پاشان ئەو جێگۆڕکێیانە دیاریبکە کە بەسەر نەخشەی بنەڕەتدا هاتوون تا بگەیتە ئەم نەخشانە.

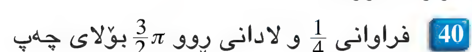
31 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1$ **32** $g(x)=\frac{3}{4}\cos\frac{\pi}{4}x$

33 $k(x)=\cos(2\pi x)-2$ **34** $\ell(x)=-3\sin 3x$

خەملاندن نەخشەی Sin و Cos بۆ خەملاندنی بەهای هەر بڕێك بەکاربێنە.

35 $\sin 160^\circ$ **36** $\cos 50^\circ$ **37** $\sin 15^\circ$ **38** $\cos 95^\circ$

نەخشەی Sine و Cosine بۆ نواندنی ئەوەی دیاریکراوە بنووسە.

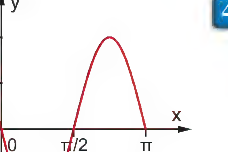


39 فراوانی 6 و کاتی خولییەکەی π **40** فراوانی $\frac{1}{4}$ و لادانی ڕوو $\frac{3}{2}\pi$ بۆلای چەپ

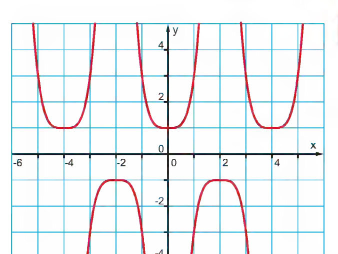


نەخشەی Sine و Cosine بۆ نواندنی ڕوونکردنەوەییەکە بنووسە.

41



42



43 بەرزترین ئاستی هەڵکشانی کەنداوێك دەگاتە 3m ، ئاستی داکشانی دەگاتە 0 هەڵکشانەکە 6.1 کاتژمێرە بەردەوام دەبێت تا دەکشێتەوە. و 6.1 کاتژمێری تری دەوێت تا دەگەڕێتەوە. دەتوانرێت بەرزی هەڵکشانەکە h بەپێی کات t بنوێنرێت.

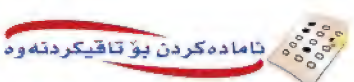
أ فراوانی ئەو نەخشەیە و کاتی خولی چەندە؟بەرزترین بەها و نزمترین بەها چەندە؟

ب وایدابنێ هەڵکشانەکە بەرزترین بەهای دەبێت کاتێك $t=0$ بەهای $h(0)$ چەندە؟ و بەهای $h(6.1)$ چەندە؟

ج نەخشەی h لەسەر شێوەی $h(t)=a\cos bt+k$ بنووسە؟

44 **بیری ڕەخنەگر** ئەگەر فراوانی نەخشەی Sin و کاتی خولییەکەیت زانی، ئایا دەتوانیت گەورەترین و بچووکترین بەهای بدۆزیتەوە، ئەو بەهایانەی x دیارییکەیت بۆ ئەنجامدانی ئەو کارە پێویستە؟ چۆن بەکاریان دەهێنێت؟

45 **بنووسە** چی بەسەر خولی دا دێت لە نەخشەی $f(x)=\sin bx$ کاتێك $b>1$؟ وەکاتێك $b<1$؟





46 کام نەخشەی سێگۆشەیی بۆ وێنەی ڕوونکردنەوەیی بەرامبەر گونجاوە؟

(أ) $f(x)=\frac{1}{2}\sin x$ (ب) $f(x)=2\sin x$

(ج) $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$ (د) $f(x)=2\sin\frac{1}{2}x$

47 فراوانی نەخشەی $f(x)=-4\cos 3\pi x$ کامەیە؟

(أ) -4 (ب) 3 (ج) 4 (د) 3π

48 وێنەی ڕوونکردنەوەیی بەرامبەر بۆ دیاریکردنی پەیوەندیی f و g بەکاربێنە.

(أ) فراوانی f دوو ئەوەندەی فراوانی g ــە.

(ب) لەرەلەری f دووئەوەندەی لەرەلەری g ــە.

(ج) کاتی خولی f دوئەوەندەی کاتی خولی g ــە.

(د) خولی f دووئەوەندەی خولی g ــە.

49 **کورتە وەڵام** چەماوەی نەخشەی $f(x)=\sin x$ بۆ وێنەکێشانی $g(x)=-4\sin 2(x-\pi)$ لەماوەی $[0, 2\pi]$ دا بەکاربێنە و جێگۆڕکێان دیاریبکە.

بەرەنگاری و فراوانکردن

هەردوو نەخشەی $f(\theta)=\frac{1}{2}\sin\theta$ و $g(\theta)=2\cos\theta$ بەکاربێنە کاتێك $0°\le\theta\le 360°$

50 وێنەی چەماوەی هەردوو نەخشەکە لە هەمان ڕووتەختی پۆتاندا بکێشە.

51 بەهای نزیکەیی پۆوتانی هەر خاڵێك لە خاڵەکانی یەکتربڕینی نێوان دوو چەماوەکە بدۆزەوە.

52 کەی لاسەنگەی $f(\theta)>g(\theta)$ ڕاست دەبێت؟

پێداچوونەوەی لولپێچی

هەرکۆمەڵە ژمارەیەك بە شێوەی ماوە (فترە) بنووسە (پۆلەکانی پێشوو)

53 $-7<x\le 5$ **54** $x\le -2$ یان $1\le x\le 13$ **55** $0\le x\le 9$

56 **گوڵ** لاڤین 100 000 دیناری بۆ کڕینی چەند چەپکە گوڵێك لە گوڵەباخ و مێلاقە (زنبق) و مێخەکی پێیە. نرخی چەپکێك گوڵەباخ 6000 دینار و چەپکێك مێلاقە 2000 دینار و چەپکێك میخەك 4000 دینارە (وانەی 2)

7	3		6	گوڵە باغ
	5	8		مێلاقە
13		15	11	مێخەك

(أ) هاوکێشەیەکی هێڵی بەسێ نەزانراو بنووسە پارەکە بنوێنێت.

(ب) خشتەی بەرامبەر تەواوبکە.

پێدراوەکان بۆ شیکارکردنی سێگۆشەی ABC بەکاربێنە (وانەی 1-7)

57 $b=2$ ، $c=11$ ، $m\hat{A}=165°$ **58** $a=9.2$ ، $b=11.4$ ، $c=20.2$



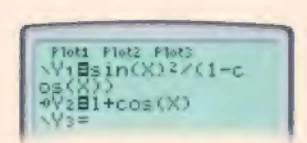
ڕوونکردنەوەیی هاو ئەنجامە سێگۆشەییەکان

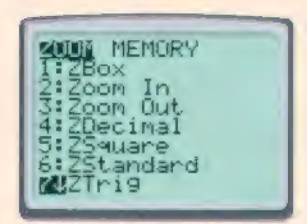
دەتوانیت بژمێری ڕوونکردنەوەیی بۆ بەراوردکدنی وێنە ڕوونکردنەوەییەکان و دارِشتنی دەستەواژەکان لە سەر هاوئەنجامە سێگۆشەییەکان بە کاربێنیت.

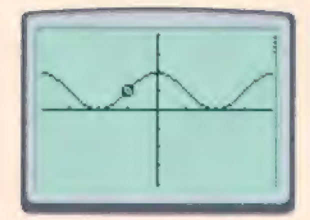
چالاکی

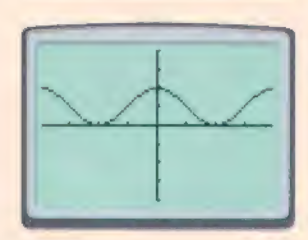
دیاریبکە ئایا هاوکێشەی $\frac{\sin^2 x}{1-\cos x} = 1+\cos x$ هاوئەنجامێکی سێگۆشەییە یان نا،

ئەگەر هاوکێشەکە هاوئەنجام بێت ئەوا هیچ جیاوازییەك نییە لە نێوان ئەو چەماوەیەی ڕێساکەی لای یەکەمەوە و ئەو چەماوەیەی ڕێسایەکەی لای دووەمە.









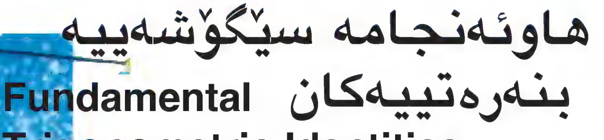
1. $\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$ بەرامبەر **Y1** و $1+\cos x$ بەرامبەر **Y2** تۆماربکە. ڕێگای 0 بۆ کێشانی وێنەی دووەم هەڵبژێرە لەگەڵ هێڵێك کە پێیدا تێپەڕێت. ئەمە وادەکات بتوانیت بە دوای وێنە ڕوونکردنەوەییەکەدا بڕۆیت.
2. شاشەی وێنەکە دیاریبکە بەبەکارهێنانی 7:ZTrig لە هەڵبژاردنەکانی zoom .
3. چاودێری شاشەی بژمێرەکە بکە لەو کاتەی وێنەی چەماوەی دووەم دەکێشێت. بازنەیەك دەبینیت کە لەسەر چەماوەی یەکەم دەجولێت ئەمەنیشانەی ئەوەیە چەماوەی نەخشی یەکەم لە سەر چەماوەی نەخشەی دووەم دەکێشێت.
4. کاتێك بازنەکە لە وێنە کێشانی چەماوەی دووەم دەبێتەوە دڵنیادەبێت لەوەی کە هەردوو چەماوەکە جووتن. ئەمەش ئەوە دەگەیەنێت هاوکێشەکە هاوئەنجامە. دواتر دەتوانیت بە جەبری ساغکردنەوەی بۆ بکەیت.

هەوڵبدە

1. **دەستەواژەیەك بنووسە** دیاریبکە ئایا هاوکێشەی $\cos x = \frac{1}{\cos x} - \tan x \sin x$ هاوئەنجامێکی سێگۆشەییە یان نا.
2. جەبریانە ڕاستی یان ناڕاستی وەڵامەکەت لە پرسیاری پێشوودا بسەلمێنە.
3. **دەستەواژەیەك بنووسە** دیاریبکە ئایا هاوکێشەی $\tan x = \frac{1+\tan x}{1+\frac{1}{\tan x}}$ هاوئەنجامێکی سێگۆشەییە یان نا.
4. جەبریانە ڕاستی یان نا ڕاستی وەڵامەکەت لە پرسیاری پێشوودا بسەلمێنە.



3-7



هاوئەنجامە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکان Fundamental



Trigonometric Identities

ئامانجەکان

- بەکارهێنانی هاوئەنجامە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکان بۆ سادەکردنی بڕە سێگۆشەییەکان و نووسینەوەیان جارێکی تر و دڵنیابوون لە ڕاستی هاوئەنجامەکان.

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

کارگەیی دروستکردنی پێداویستییەکانی خلیسکێنە هاوئەنجامە سێگۆشەییەکان بۆ دیاریکردنی جۆری ئەو مۆمەی لە تەختەی خلیسکێنە دەدەن بەکاردێنن (نموونەی 3)

دەتوانیت هاوئەنجامە سێگۆشەییەکان لە سادەکردنی بڕە سێگۆشەییەکان بەکاربێنیت. لە بیرت بێت هاوئەنجام لە بیرکاریدا پەیوەندییەکە، ڕاست دەبێت بۆ هەموو ئەو بەهایانەی گۆڕاوەکانی پەیوەندییەکە وەریدەگرن. ئەم هاوئەنجامانەی خوارەوە بەبەکارهێنانی سەلمێنراوی ڤیساغۆرس پوختەکراوە.

$x^2+y^2=r^2$	سەلمێنراوی ڤیساغۆرس
$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}=1$	هەردوو لا دابەشی r^2 بکە.
$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$	$\cos\theta$ لە جیاتی $\frac{x}{r}$ و $\sin\theta$ لە جیاتی $\frac{y}{r}$ دابنێ.



هاوئەنجامە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکان		
هاوئەنجامی *tan*	هاوئەنجامی ڤیساغۆرسییەکان	دژە هاوئەنجامە
$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$	$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ $1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$ $1+\frac{1}{\tan^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta}$	$\sin(-\theta)=-\sin\theta$ $\cos(-\theta)=\cos\theta$ $\tan(-\theta)=-\tan\theta$

بۆ ئەوەی بیسەلمێنیت هاوکێشەیەک هاو ئەنجامە، یەکێك لە لایەکانی چەند جارێك بگۆڕە، تاوەك لایەکەی تری لێدێت. لە هەنگاوەکاندا هاوئەنجامە بنەڕەتییەکان بەکاربێنە.

نموونـــــە 1 سەلماندنی هاوئەنجامە سێگۆشەییەکان

هاوئەنجامە سێگۆشەییەکە بسەلمێنە.

أ $\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta}\tan\theta$

$\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta}\tan\theta$	ئەو لایە هەڵبژێرە کە دەتەوێت بیگۆڕیت.
$=\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$	هاوئەنجامی *tan* بەکاربێنە.
$=\frac{1}{\cos\theta}$	سادە بکە

ب $\frac{1}{\sin(-\theta)}=-\frac{1}{\sin\theta}$

$\frac{1}{\sin(-\theta)}=$	ئەو لایە هەڵبژێرە کە دەتەوێت بیگۆڕیت
$\frac{1}{-\sin\theta}$	دژە هاوئەنجامەکە بەکاربێنە
$-\frac{1}{\sin\theta}=-\frac{1}{\sin\theta}$	سادە بکە

ڕۆشنایی

دەتوانیت هەر لایەك بگۆڕیت. بەڵام وا باشترە کە لا ئاڵۆزەکە بگۆڕیت بۆ ئەوەی لای دووەمت دەستبکەوێت.



1. هاوئەنجامە سێگۆشەییەکە بسەلمێنە.

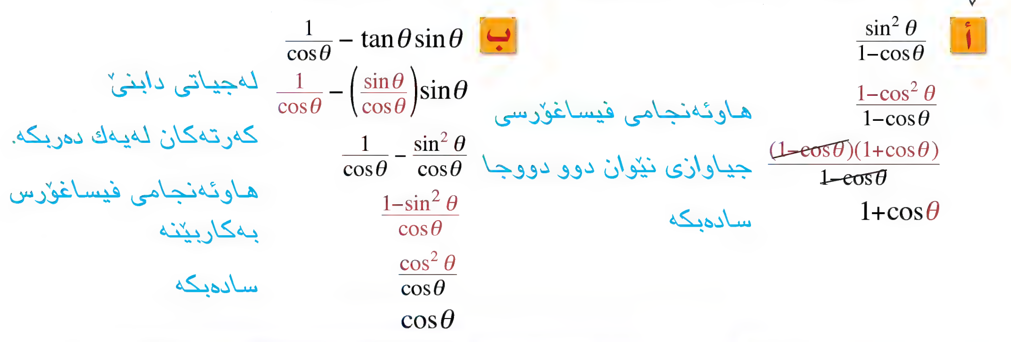
أ $\sin\theta \frac{1}{\tan\theta} = \cos\theta$

ب $1 - \frac{1}{\cos(-\theta)} = \frac{\cos\theta - 1}{\cos\theta}$

دەتوانیت هاوئەنجامە سێگۆشەییەکان بۆ سادەکردنی برە سێگۆشەییەکان بەکاربێنیت.

نموونــــە 2 بەبەکارهێنانی هاوئەنجامە سێگۆشەییەکان بۆ سادەکردنی برە سێگۆشەییەکان

برە سێگۆشەییەکە تەنها بە هۆی $\cos\theta$ بە سادەترین شێوە بنووسە.



أ $\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$

$\frac{1-\cos^2\theta}{1-\cos\theta}$ هاوئەنجامی فیساغۆرسی

$\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{1-\cos\theta}$ جیاوازی نێوان دوو دووجا

$1+\cos\theta$ سادەبکە

ب $\frac{1}{\cos\theta} - \tan\theta\sin\theta$

$\frac{1}{\cos\theta} - \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)\sin\theta$ لەجیاتی دابنێ

$\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$ کەرتەکان لەیەک دەربکە.

$\frac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta}$ هاوئەنجامی فیساغۆرس بەکاربێنە

$\frac{\cos^2\theta}{\cos\theta}$

$\cos\theta$ سادەبکە

ڕۆشنایی

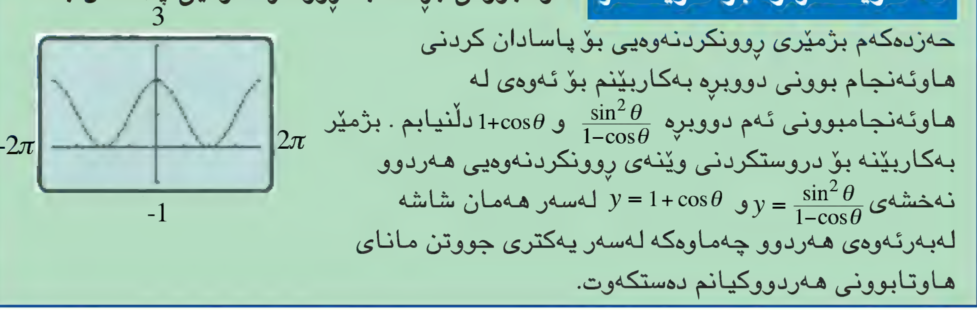
ئەگەر نەتزانی برە سێگۆشەییەکە سادە بکەیت. هەوڵبدە ڕێژە سێگۆشەییەکە بگۆڕی بۆ Sin یان Cos .




2. برە سێگۆشەییەکە تەنها بەپێی $\sin\theta$ بە سادەترین شێوە بنووسە.

أ $\frac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta}$

ب $\frac{1}{\tan^2\theta}$

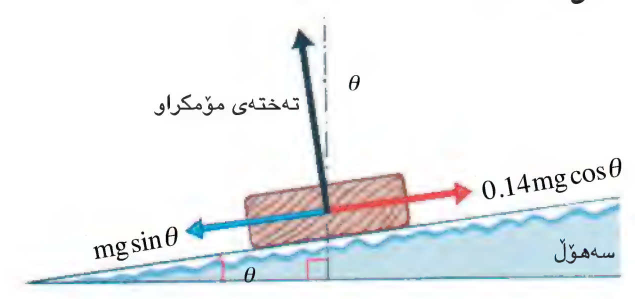


لە خوێندکارەوە بۆ خوێندکار هاوتابوونی برەکە بە ڕوونکردنەوەیی پاسادان بکە.

حەزدەکەم بژمێری ڕوونکردنەوەیی بۆ پاسادان کردنی هاوئەنجام بوونی دووبرە بەکاربێنم بۆ ئەوەی لە هاوئەنجامبوونی ئەم دووبرە $\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$ و $1+\cos\theta$ دڵنیابم . بژمێر بەکاربێنە بۆ دروستکردنی وێنەی ڕوونکردنەوەیی هەردوو نەخشەی $y = \frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$ و $y = 1+\cos\theta$ لەسەر هەمان شاشە لەبەرئەوەی هەردوو چەماوەکە لەسەر یەکتری جووتن مانای هاوتابوونی هەردووکیان دەستکەوت.

نموونــــە 3 جیبەجێکردنی پیشەسازی

یەکێك لە و کارگانەی پێداویستییەکانی خلیسکێنە دروستدەکات. لێکخشاندنی جۆرێکی نوێ لە مۆم کە تەختەکەی پێ مۆم دەکرێت تاقیدەکاتەوە لە ڕێگای مۆمکردنی تەختەیەکی لاکێشە تەریبی و دانانی لەسەر ڕوویەکی لێژی سەهۆڵ ئاستی ڕووی لایێکی سەهۆڵەکە بە هێواشی بەرز دەکرێتەوە تا پارچە تەختەکە دەست بە خلیسکانی دەکات.



کاتێك تەختەکە دەست بە خلیسکان دەکات. پێکنەری بارستاییەکەی تەریب بەڕووی سەهۆڵەکە $mg\sin\theta$ یەکسان دەبێ بە بەرگری خلیسکاندنەکە $\mu mg\cos\theta$ کە لە لێکخشاندنەکە پەیدا دەبێت. کاتێك μ هاوکۆلکەی لێکخشاندن بێت. گۆشەی لێکخشاندن θ دیاریبکە، واتە ئەو گۆشەیەی ئاستی ڕووی سەهۆڵەکە لەگەڵ ئاسۆدا دروستی دەکات، لەسەرەتای خلیسکاندندا، ئەگەر بزانیت $\mu = 0.14$.

$mg\sin\theta = \mu mg\cos\theta$	هەردوو لا دابەشی mg بکە
$\sin\theta = \mu\cos\theta$	لەجیاتی دابنێ
$\sin\theta = 0.14\cos\theta$	هەردوو لا دابەشی $\cos\theta$ بکە.
$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 0.14$	هاوئەنجامی *tan* .
$\tan\theta = 0.14$	$\tan^{-1}$ بەکاربێنە.
$\theta \approx 8°$	

پارچە تەختەکە دەست بە خلیسکان دەکات، کاتێك پێوانەی گۆشەی θ دەبێتە 8 پلە بە نزیکەیی.

خوێندنەوە

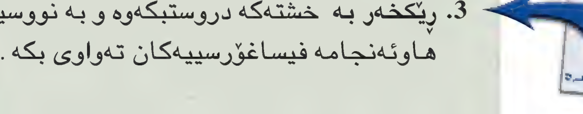
پیتی یۆنانی μ بە میو بخوێنەرەوە

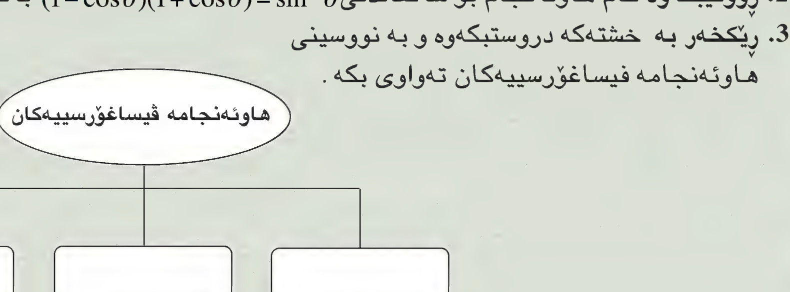


3. هاوکێشەی $mg\sin\theta = \mu mg\cos\theta$ بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی گۆشەی خلیسکان، کاتێك هاوکۆلکەی لێکخشاندن $\mu = 0.4$

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. باسبکە چۆن دەیسەلمێنیت هاوکێشەیەك هاوئەنجامە
2. ڕوونبیکەوە کام هاوئەنجام بۆ سەلماندنی $\sin^2\theta = (1-\cos\theta)(1+\cos\theta)$ بەکاردێت.
3. ڕێکخەر بە خشتەکە دروستبکەوە و بە نووسینی هاوئەنجامە فیساغۆرسییەکان تەواوی بکە .





3-7 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاراستەکراو

بڕوانە نموونە 1 هاوئەنجامە سێگۆشەییەکە بسەلمێنە.

1. $\sin\theta\frac{1}{\cos\theta} = \tan\theta$
2. $\frac{1}{\tan(-\theta)} = -\frac{1}{\tan\theta}$
3. $\cos^2\theta\left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1\right) = \sin^2\theta$

بڕوانە نموونە 2 هەر بڕێك بە پێی $\cos\theta$ بە سادەترین شێوە بنووسە.

4. $\frac{1}{\sin\theta}\tan\theta$
5. $\left(1 + \frac{1}{\cos^2\theta}\right)(1 - \sin^2\theta)$
6. $\sin^2\theta + \cos^2\theta + \tan^2\theta$

بڕوانە نموونە 3

7 **فیزیا** هاوکێشەی $mg\sin\theta = \mu mg\cos\theta$ بۆ دۆزینەوەی گۆشەی خلیسکاندنی لاکێشە تەریبێکی شووشە لە سەر مێزێکی شووشە دانرابێ. کاتێك ڕووە شووشەکە لار دەکرێتەوە، لاکێشە تەریبەکە دەست بە خزین دەکات، ئەگەر بزانیت هاوکۆلکەی لێکخشاندن $\mu = 0.94$ بێت.

ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

هاوئەنجامە سێگۆشەییەکە بسەلمێنە.

8 $\frac{1}{\cos\theta}\,\frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\sin\theta}$

9 $\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta} = 1-\frac{1}{\tan\theta}$

10 $\tan\theta\sin\theta = \frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta$

11 $\frac{1}{\cos^2\theta}(1-\cos^2\theta) = \tan^2\theta$

ڕاهێنانی ئازاد

بۆشیکارکردنی ڕاهێنانەکان	سەیری نموونە بکە
11–8	1
15–12	2
16	3

هەر بڕەیەك بە پێی $\sin\theta$ بە سادەترین شێوە بنووسە.

12 $\frac{\cos^2\theta}{1+\sin\theta}$

13 $\tan^2\theta$

14 $\cos\theta\,\frac{1}{\tan\theta} + \sin\theta$

15 $\frac{\frac{1}{\cos^2\theta}-1}{1+\tan^2\theta}$



16 **فیزیا** هاوکێشەی $mg\sin\theta = \mu mg\cos\theta$ بۆ دۆزینەوەی بەرزترین لاری گونجاو بۆ ڕێگایەك بەکاربێنە کە تایەکانی ئۆتۆمبێلی لەسەر بوەستێت بێ ئەوەی بخلیسکێت.

فرە هەنگاو هەر بڕەیەکی سێگۆشەیی بە پێی یەك نەخشەی سێگۆشەیی بنووسە.

17 $\frac{1}{\sin\theta}(1-\cos^2\theta)$

18 $\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\tan\theta$

19 $\cos\theta + \sin\theta\tan\theta$

20 $\sin\theta\,\frac{1}{\sin\theta} - \cos^2\theta$

21 $\cos^2\theta\,\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{1}{\cos\theta}$

22 $\cos\theta(\tan^2\theta+1)$

23 $\sin\theta\,\cos\theta\,\tan\theta$

24 $1-\frac{\sin\theta\cos\theta}{\tan\theta}$

25 $\frac{\sin\theta}{1-\cos^2\theta}$

26 $\frac{\sin^2\theta}{1-\cos^2\theta}$

27 $\tan\theta\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\right)$

28 $\cos\theta\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\right)$

29 $\frac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta}$

30 $\frac{1}{\cos^2\theta}\left(\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}-\cos^2\theta\right)$

31 $\sin\theta\left(\frac{1}{\cos\theta}-\frac{1}{\sin\theta}\right)$

لە ڕاستی ئەم هاوئەنجامانە بگەڕێ.

32 $\frac{\cos\theta-1}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos\theta} - \frac{1}{\cos^2\theta}$

33 $\sin^2\theta\left(\frac{1}{\sin^2\theta}-1\right) = \cos^2\theta$

34 $\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\sin\theta}\,\frac{1}{\cos\theta}$

35 $\frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta} = \frac{1}{\cos\theta}$

36 $\frac{1-\cos^2\theta}{\tan\theta} = \sin\theta\cos\theta$

37 $\frac{1}{\sin^2\theta(1+\tan^2\theta)} = \frac{1}{\tan^2\theta}$

هاوئەنجامە بنەڕەتییەکە بسەلمێنە بە بێ بەکارهێنانی هیچ هاوئەنجامێکی تری بنەڕەتی (ڕێژە سێگۆشەییەکان لەگەڵ x ، y ، r) بەکاربێنە.

38 $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

39 $\frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

40 $1+\frac{1}{\tan^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}$

41 $1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$

42 دەتوانرێت نەخشەی $y(t)=5\sin t$ بۆ هەژمارکردنی کشانی سپرینگێك لە ژێر کاریگەری تەنێکدا کە پێوەی هەڵواسرابێت بە پێی کات t بە چرکە. و نەخشەی $z(t)=2.6\cos t$ بۆ هەژمارکردنی کشانی سپرینگێکی تر لە ژێر کاریگەری تەنێکدا کە پێوەی هەڵواسرابێت.

أ دووتەن بەهەردوو سپرینگەکەوە لە هەمان کاتدا $(t=0)$ هەڵواسراون. دوای چەند چرکە کشانی دوو سپرینگەکە یەکسان دەبن؟

ب کشان لەو ساتەدا چەند دەبێت؟

ج ئەو ساتانەی کە کشانی دوو سپرینگەکە تێدا یەکسان دەبن کامانەن؟

بژمێری ڕوونکردنەوەیی بژمێری ڕوونکردنەوەیی بەکاربێنە. بۆ ئەوەی بڕیاربدەی هەریەك لەمانە هاوئەنجامن یان نا.

43 $\left(\frac{1}{\sin\theta}-1\right)\left(\frac{1}{\sin\theta}+1\right)=\tan^2\theta$

44 $\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta=\sin\theta$

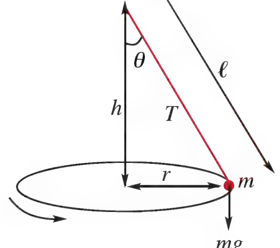
45 $\cos\theta\left(\frac{1}{\cos\theta}+\cos\theta\frac{1}{\sin^2\theta}\right)=\frac{1}{\sin^2\theta}$

46 $\frac{1}{\tan\theta}(\cos\theta+\sin\theta\tan\theta)=\frac{1}{\sin\theta}$

47 $\cos\theta=0.99\cos\theta$

48 $\sin\theta\cos\theta=\tan\theta-\tan\theta\sin^2\theta$

49 **فیزیا** بەندۆلێك لە جوولانیدا شێوە قوچەکێك دروست دەکات کاتێك لەسەر بازنەیەك بجولێت، لە جیاتی ئەوەی لە لایەك بۆلای بەرامبەری بچێت. وێنەی جولانەکەی قوچەکێکە کە بنکەکەی بازنەی جوڵانەوەکەیە. دەتوانیت یاسای $r=\frac{g\tan\theta}{\omega^2}$ بۆ هەژمارکردنی نیوەتیرەی قوچەکەکە r بەکاربێت، کاتێك هێمای هێزی ڕاکێشان g بێ و ω گۆشە خێرایی بەندۆلەکە بێت.



أ ڕێسای $\omega=\sqrt{\frac{g}{\ell\cos\theta}}$ و هاوئەنجامە سێگۆشەییەکان بەکاربێنە بۆ نووسینەوەی ڕێسای هەژمارکردنی نیوە تیرە.

ب ڕێسایەك بۆ ℓ بە پێی ω و g و یەك نەخشەی سێگۆشەی بنووسە.

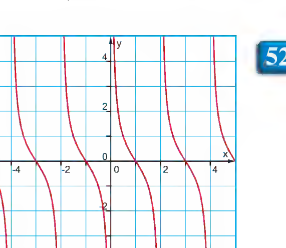
بیری ڕەخنەگر بەنەخشەیەك دەووترێت نەخشەیێکی تاك ئەگەر $f(-x)=-f(x)$ و نەخشەیێکی جووت کاتێك $f(-x)=+f(x)$

50 هەر سێ نەخشە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکە لە نێوان تاك و جووتدا پۆلێنبکە.

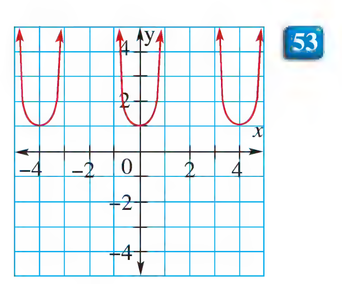
51 چەماوەی نەخشەی تاك و نەخشەی جووت بە چی لێکجیادەکرێنەوە، چی لە چەماوەی نەخشەکانی تر جیایان دەکاتەوە.

دیاریبکە. هەریەك لەم نەخشانە تاکن یان جووتن.

52



53



54 **بیری ڕەخنەگرانە** چەند شێوە نووسینی تری هاوتا دەتوانیت بۆ $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ بەکاربێنیت بەلایەنی کەمەوە سێیانیان بنووسە.

55 **بنووسە** $\sin(-\theta)=-\sin\theta$ و $\cos(-\theta)=\cos\theta$ بەکاربێنە بۆ ئەوەی $\tan(-\theta)=-\tan\theta$ دەستبکەوێت.

56 کام بڕ هاوتای $\tan\theta$ دەبێت؟

(أ) $\sin\theta$ (ب) $\cos\theta$ (ج) $\frac{1}{\cos\theta}$ (د) $\frac{1}{\cos\theta}\sin\theta$

57 کام بڕ هاوتای سێ بڕەکەی تر نابێت؟

(أ) $\frac{1}{\cos\theta}\,\frac{1}{\sin\theta}$ (ب) $\frac{1}{\cos^2\theta}\,\frac{1}{\tan\theta}$ (ج) $\frac{\tan\theta}{\sin^2\theta}$ (د) $\cos^2\theta\,\tan\theta$

58 کام دەستەواژە سێگۆشەییە هاوئەنجام نییە؟

(أ) $1+\cos^2\theta=\sin^2\theta$ (ب) $\frac{1}{\sin^2\theta}-1=\frac{1}{\tan^2\theta}$ (ج) $1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$ (د) $1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$

59 کام بڕ هاوتای $1-\frac{1}{\cos^2\theta}$ دەبێت؟

(أ) $\tan^2\theta$ (ب) $-\tan^2\theta$ (ج) $\frac{1}{\tan^2\theta}$ (د) $-\frac{1}{\tan^2\theta}$

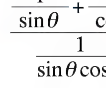
60 **کورتە وەڵام** پاسادان بکە لە ڕاستی $\sin\theta+\cos\theta\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{\sin\theta}$ بۆ هەر هەنگاوێك بەڵگە بێنەوە.

بەرەنگاری و فراوانکردن

بڕەکە بە شێوەی کەرتێکی تاقانە بنووسە.

61 $\frac{1}{\cos\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}$ **62** $\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ **63** $1-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ **64** $\frac{1}{1-\cos\theta}-\frac{\cos\theta}{1-\cos^2\theta}$

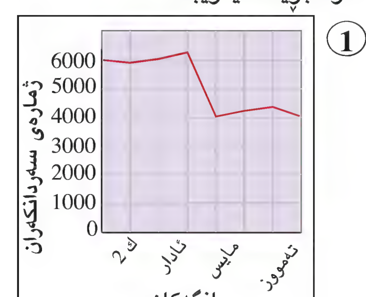
بە سادەترین شێوە بنووسە

65 $\dfrac{\frac{1}{\sin^2\theta}-1}{\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}}$ **66** $\dfrac{\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}}$  **67** $\dfrac{\frac{1}{\sin\theta}-\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$ **68** $\dfrac{1-\frac{1}{\sin\theta}}{1-\frac{1}{\sin^2\theta}}$

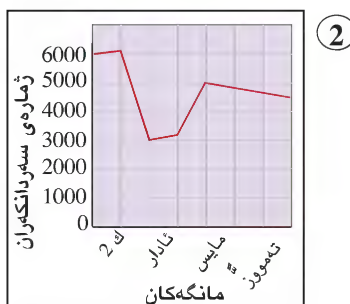
پێداچوونەوەی لولپێچی

69 **گەشت و گوزار** یەکێك لە ئامارکاران پێدراوەکانی لەسەر ژمارەی ئەوکەسانەی لە ماوەی *6* مانگدا سەردانی دوورگەکەیان کردووە تۆمارکرد. ئەو وێنە ڕوونکردنەوەییەی هەر بارێك دەردەبڕێت دیاریبکە.

(1)



(2)



أ بارى پێشینی هەڵکردنی گەردەلوول دەکات لە دوو مانگی ئادار و نیساندا.

ب بەرزبوونەوەی پلەی گەرما لە وەرزی هاویندا بووە هۆی پەشیمانبوونەوەی زۆربەی گەشتیاران.

هەر ئەگەرێك بدۆزەوە (پۆلەکانی پێشو)

70 دەرکەوتنی ژمارە 4 لەکاتی هەڵدانی زارێکەوە، دەرکەوتنی ڕووی 4 لە کاتی هەڵدانی بەردەزارێکی تر.

71 دەرکەوتنی دوو ڕووی شێر لە هەڵدانی پارچەپارەیەکی کانزایی دووجار.

لە هەر نەخشەیەکی سێگۆشەییدا 4 بەها بۆ گۆڕاوی θ بدۆزەوە. کەوا لە نەخشەکە بکات پێناسە نەکراوبێت.

72 $y=-\tan\theta$ **73** $y=\frac{1}{\cos(0.5\theta)}$ **74** $y=-\frac{1}{\sin\theta}$

بەشی 7

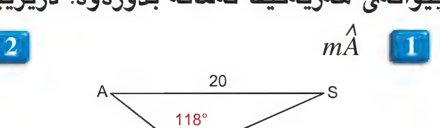


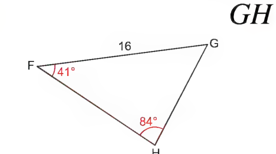
تاقیکردنەوەی نیوەی بەش

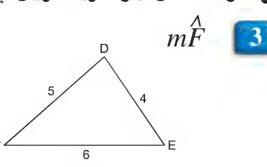
1-7 یاسای Sin و Cos

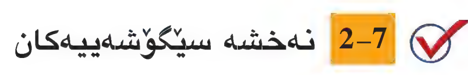
پێوانەی هەریەکێك لەمانە بدۆزەوە. درێژییەکان بۆ نزیکترین دەیەك و پێوانەی گۆشەکان بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە

1 $m\hat{A}$ **2** GH **3** $m\hat{F}$





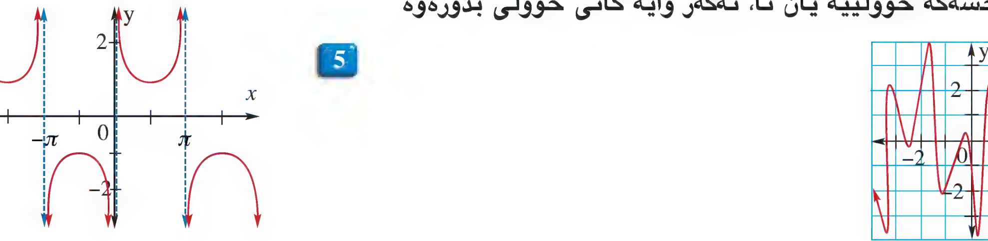


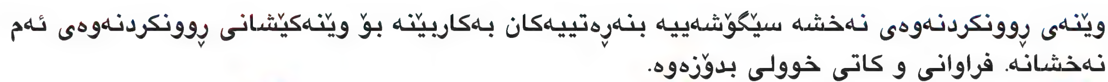


2-7 نەخشە سێگۆشەییەکان

دیاریبکە، ئایا نەخشەکە خوولییە یان نا، ئەگەر وایە کاتی خوولی بدۆزەوە

4 **5**





وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکان بەکاربێنە بۆ وێنەکێشانی ڕوونکردنەوەی ئەم نەخشانە. فراوانی و کاتی خوولی بدۆزەوە.

6 $f(x)=\sin 4x$ **7** $g(x)=-3\sin x$ **8** $h(x)=0.25\sin \pi x$

وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکان بەکاربێنە بۆ وێنەکێشانی ڕوونکردنەوەی ئەم نەخشانە، خاڵەکانی یەکتربڕین لەگەڵ تەوەری ئاسۆیی و لادانی ڕوو بدۆزەوە.

9 $f(x)=\cos\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)$ **10** $g(x)=\sin\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)$ **11** $f(x)=\cos\left(x+\frac{5\pi}{4}\right)$

وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکان بەکاربێنە بۆ وێنەکێشانی ئەم نەخشانە. خاڵەکانی یەکتربڕین لەگەڵ تەوەری ئاسۆیی و دەرکەنارەکان بدۆزەوە.

12 $f(x)=\frac{1}{2}\tan 4x$ **13** $f(x)=-2\tan\frac{1}{2}x$ **14** $f(x)=\tan\frac{1}{2}\pi x$

3-7 هاوئەنجامە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکان

ئەم هاوئەنجامە سێگۆشەییانە بسەلمێنە

15 $\sin^2\theta\frac{1}{\cos\theta}\frac{1}{\sin\theta}=\tan\theta$ **16** $\sin(-\theta)\frac{1}{\cos\theta}\frac{1}{\tan\theta}=-1$ **17** $\dfrac{\frac{1}{\tan^2\theta}-1}{\frac{1}{\tan^2\theta}+1}=1-2\sin^2\theta$

برەکە بەبەکارهێنانی یەك ڕێژەی سێگۆشەیی بنووسە.

18 $\frac{1}{\tan\theta}\frac{1}{\cos\theta}$ **19** $\frac{1}{\cos(-\theta)}$ **20** $\dfrac{\frac{1}{\sin^2\theta}}{\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}}$

4-7

هاوئەنجامەکانی سەرجەم و جیاوازی
Sum and Difference Identities

ئامانجەکان

- بەکارهێنانی هاوئەنجامەکانی سەرجەم و جیاوازی بۆ هەژمارکردنی بەهای برە سێگۆشەییەکان.
- ڕیزکراوەی خولانەوە و هاوئەنجامەکانی سەرجەم و جیاوازی بەکاردێنێت بۆ ئەنجامدانی خولانەوە.

زاراوەکان
Vocabulary

ڕیزکراوەی خولانەوە
Rotation Matrix

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

دەتوانیت هاوئەنجامەکانی سەرجەم و جیاوازی لەگەڵ لێکدانی ڕیزکراوەکان بۆ دۆزینەوەی خوولانەوەی شێوەیەك بەکاربێنیت (نموونە 4).

لێکدانی ڕیزکراوەکان و هاوئەنجامەکانی سەرجەم و جیاوازی ئامرازێکن بۆ دیارکردنی پۆوتانی وێنەی خاڵەکان بە خوولانەوەیان بە دەوری خاڵی بنەڕەت لە ڕووتەختی پۆوتاندا.



هاوئەنجامەکانی سەرجەم و جیاوازی	
هاوئەنجامەکانی سەرجەم	**هاوئەنجامەکانی جیاوازی**
$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$	$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$
$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$	$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$
$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$	$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$

نموونە 1

هەژمارکردنی بەهای بڕێکی سێگۆشەیی بەبەکارهێنانی هاوەنجامەکانی سەرجەم و جیاوازی.

بەهای تەواوی هەر بڕێك بدۆزەوە.

أ $\sin 75^\circ$

$75^\circ = 30^\circ + 45^\circ$ بەشێوەی بنووسە. لەبەر ئەوەی ڕێژەی سێگۆشەییەکان هەردوو گۆشەی 45° و 30° زانراون هاوئەنجامی sin سەرجەمی $\sin(A+B)$ بەکاربێنە

$$\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ)$$

$$= \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ$$

لە جیاتی دابنێ:

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

سادە بکە .

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

ب $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

بنووسە $-\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)$$

هاوئەنجامی cos ی جیاوازی $\cos(A-B)$ بەکاربێنە.

$$= \cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}$$

لە جیاتی دابنێ:

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

سادەکە.

$$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

ڕۆشنایی

زۆر ڕێگا هەیە بۆ نووسینی $-\frac{\pi}{12}$ ؛ بۆ نموونە $\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)$ یان $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)$

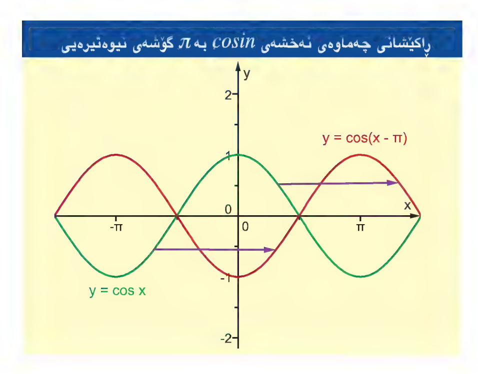


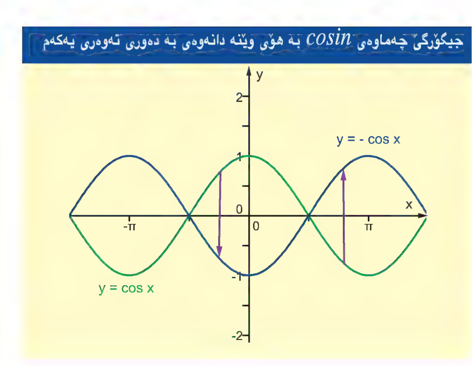
خاڵی چاودێری

1. بەهای تەواوی هەر بڕێك بدۆزەوە.

أ $\tan 150^\circ$ ب $\sin\left(-\frac{11\pi}{12}\right)$

راكێشانی چەماوەی نەخشەی Cosin بە π گۆشەی نیوەتیرەیی بۆ لای ڕاست هاوتای وێنەدانەوەیە بە دەوری تەوەری یەكەم





ئەم كارە لە نموونەی 2 دا بەبەكارهێنانی هاوئەنجامەكانی جیاوازی دەچەسپێت

نموونــــە 2

سەلماندنی هاوئەنجامی سێگۆشەیی بەبەكارهێنانی هاوئەنجامەكانی جیاوازی و سەرجەم

بسەلمێنە $\cos(x-\pi) = -\cos x$

$\cos(x-\pi) =$ لای چەپ هەڵبژێرە بۆ گۆڕینی

$= \cos x\cos\pi + \sin x\sin\pi$ هاوئەنجامی cos جیاوازی $\cos(A-B)$ بەكاربێنە.

$= \cos x(-1) + \sin x(0)$ لە جیاتی دابنێ

$-\cos x = -\cos x$ سادە بكە

خاڵی چاودێری

.2 بسەلمێنە  $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$.

نموونــــە 3

بەكارهێنانی سەلمێنراوی فیساغۆرس لەگەڵ هاوئەنجامەكانی سەرجەم و جیاوازی

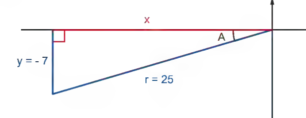
بەهای بڕەی $\tan(A+B)$ بدۆزەوە ئەگەر بزانیت $\sin A = -\frac{7}{25}$ و $180° < A < 270°$ و $\cos B = \frac{8}{17}$ و $0° < B < 90°$.

هەنگاوی 1 $\tan A$ و $\tan B$ بدۆزەوە.

گۆشەی ڕاگراو پێناسەی ڕێژە سێگۆشەییەكانی $\sin A = \frac{y}{r}$ و $\cos B = \frac{x}{r}$ بەكاربێنە.
سێگۆشەیەكی گۆشە وەستاو بۆ هەر گۆشەیەك لە چارەكی گونجاو بكێشە
بە x و y و r ناوبنێ

لە چارەكی سێیەم

$\sin A = -\frac{7}{25}$ $\quad 180° < A < 270°$



$x^2 + (-7)^2 = 25^2$

$x = -\sqrt{625-49} = -24$

كەواتە $\tan A = \frac{y}{x} = \frac{7}{24}$

لە چارەكی یەكەم $0° < B < 90°$

$\cos B = \frac{8}{17}$

$8^2 + y^2 = 17^2$

$y = \sqrt{289-64} = 15$

كەواتە $\tan B = \frac{y}{x} = \frac{15}{8}$

لە بیرت بێت

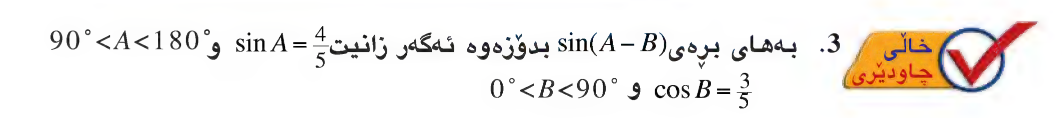
گۆشەی ڕاگر بۆ گۆشەی θ . بریتییە لەو گۆشە تیژە موجەبە كە كۆتا لای گۆشەكە θ لەگەڵ تەوەری یەكەم دروست دەكات.

هەنگاوی 2 هاوئەنجامی سەرجەم بەکاربێنە

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$ هاوئەنجامی tangent ی سەرجەمی

$$= \frac{\frac{7}{24} + \frac{15}{8}}{1 - \frac{7}{24}\frac{15}{8}}$$ لەجیاتی دابنێ

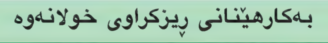
$$\tan(A+B) = \frac{\frac{52}{24}}{1 - \frac{35}{64}} = \frac{416}{87}$$ سادەبکە



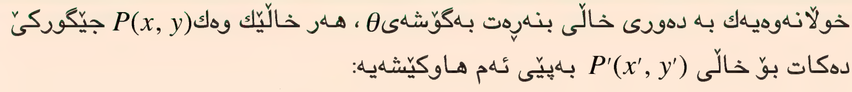
خاڵی چاودێری

3. بەهای بڕەی $\sin(A-B)$ بدۆزەوە ئەگەر زانیت $\sin A = \frac{4}{5}$ و $90° < A < 180°$
و $\cos B = \frac{3}{5}$ و $0° < B < 90°$

بۆ ئەوەی وێنەی خاڵی $P(x, y)$ بە خوولانەوەی گۆشەی θ بەدەوری خاڵی بنەڕەت دا دەستبکەوێت. **ڕیزکراوەی خولانەوە** بەکاربێنە.



بەکارهێنانی ڕیزکراوی خولانەوە

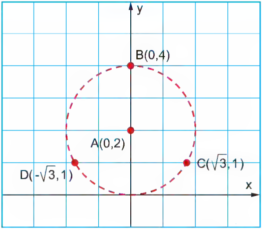


خولانەوەیەك بە دەوری خاڵی بنەڕەت بەگۆشەی θ، هەر خاڵێك وەك $P(x, y)$ جێگۆرکێ دەکات بۆ خاڵی $P'(x', y')$ بەپێی ئەم هاوکێشەیە:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$



نموونە 4 بەکارهێنانی ڕیزکراوەی خولانەوە



پۆوتانەکانی وێنەی ئەو خاڵانە بدۆزەوە کە لە وێنەی بەرامبەرت دیاریکراون بە خولانەوەی بە گۆشەی 30° بە دەوری خاڵی بنەڕەت.

هەنگاوی 1 ڕیزکراوەی خولانەوە R_{30} و ڕیزکراوەی خاڵەکان S بنووسە.

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} ، \quad R_{30} = \begin{bmatrix} \cos 30° & -\sin 30° \\ \sin 30° & \cos 30° \end{bmatrix}$$

هەنگاوی 2 هەردوو ڕیزکراوەکە لێکبدە.

$$R_{30}\, x S = \begin{bmatrix} \cos 30° & -\sin 30° \\ \sin 30° & \cos 30° \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & -2 \\ \sqrt{3} & 2\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$$

هەنگاوی 3 پۆوتانی خاڵەکانی – وێنەکان بەم شێوەیەدەبن $A'\left(-1, \sqrt{3}\right)$ $B'\left(-2, 2\sqrt{3}\right)$
$C'\left(1, \sqrt{3}\right)$ $D'(-2, 0)$



خاڵی چاودێری

4. پۆوتانی خاڵەکانی – وێنەکان بدۆزەوە ئەگەر گۆشەی خولانەوە 60° بێت.

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. باسی 3 ڕێگای جیاواز بکە، کە بتوانیت تیایاندا هاوئەنجامەکانی جیاوازی بەکاربێنی بۆ دۆزینەوەی $\sin 15^\circ$.
2. ڕوونیبکەوە خاڵەکانی لێکچوون و لێکنەچوون لە نێوان هاوئەنجامەکانی sin و cos ، چۆن نیشانەی ڕادەکان لە هاوئەنجامەکاندا پەیوەندی بە دیاریکردنی هاوئەنجامی سەرجەم یان هاوئەنجامی جیاوازییەوە هەیە.
3. ڕێکخەر بە هێڵکارییەکە بنووسە پاشان تەواوی بکە. بۆ هەر نەخشەیەک هاوئەنجامەکانی سەرجەم و جیاوازی لەگەڵ نموونەیەک بنووسە.

tan
هاوئەنجامەکانی سەرجەم و جیاوازی
cos
sin

فێربە و سەرنج بدە

4-7 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1. پێناسەی خولانەوە پێویستی بە دیاریکردنی چەقەکەی هەیە. بریتییە لەو خاڵەی کە خولانەوەکە بە دەوریدا دەبێت و گۆشەکەی و ئاڕاستەکەی. لە کاتی بەکارهێنانی ڕیزکراوەی خولانەوە، چەقی خولانەوەی پێویست چییە؟ ئاڕاستەی خولانەوەی پێویست چییە؟

بڕوانە نموونە 1

بەهای بڕەکە بە تەواوی بدۆزەوە.

2. $\cos 105^\circ$
3. $\sin\frac{11\pi}{12}$
4. $\tan\frac{\pi}{12}$
5. $\cos(-75^\circ)$

بڕوانە نموونە 2

هاوئەنجامەکە بسەلمێنە.

6. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$
7. $\tan(\pi+x)=\tan x$
8. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\sin x$

بڕوانە نموونە 3

بەهای بڕەکە بدۆزەوە، ئەگەر زانیت $\sin A=\frac{-12}{13}$ و $180^\circ<A<270^\circ$ و $\cos B=-\frac{4}{5}$ و $90^\circ<B<180^\circ$

9. $\sin(A+B)$
10. $\cos(A-B)$
11. $\tan(A+B)$
12. $\tan(A-B)$

بڕوانە نموونە 4

13. پۆتانی خاڵی سەرەکانی وێنەی سێگۆشەی ABC بدۆزەوە کاتێک $A(0, 2)$ ، $B(0, -1)$ ، $C(3, 0)$ بێت بە خولانەوەیەک گۆشەکەی 120° و چەقەکەی خاڵی بنەرەت بێت. وەڵامەکەت بۆ نزیکترین بەش لە سەد نزیکبکەوە.

ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

بەهای هەر بڕێک بە تەواوی بدۆزەوە.

14. $\sin\frac{7\pi}{12}$
15. $\tan 165^\circ$
16. $\sin 195^\circ$
17. $\cos\frac{11\pi}{12}$

هاوئەنجامەکە بسەلمێنە

18. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\sin x$
19. $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=-\cos x$
20. $\tan(x-2\pi)=\tan x$

ڕاهێنانی ئازاد

بۆشیکارکردنی ڕاهێنانەکان	سەیری نموونە بکە
17-14	1
20-18	2
24-21	3
25	4

بەهای بڕەکە بدۆزەوە، ئەگەر زانیت $\cos A = -\frac{12}{13}$ و $90^\circ < A < 180^\circ$ و $\sin B = -\frac{4}{5}$ و $270^\circ < B < 360^\circ$

21 $\sin(A+B)$ **22** $\tan(A-B)$ **23** $\cos(A+B)$ **24** $\cos(A-B)$

25 پۆوتانی وێنەی سەرەکانی سێگۆشەی ABC بدۆزەوە کاتێك $A(0, 2)$ ، $B(1, 2)$، $C(0, 1)$ بە خولانەوەیەك گۆشەکەی $45°$ چەقەکەی خاڵی بنەڕەت بێت. وەڵامەکەت بۆ نزیکترین بەش لە سەد نزیکبکەوە

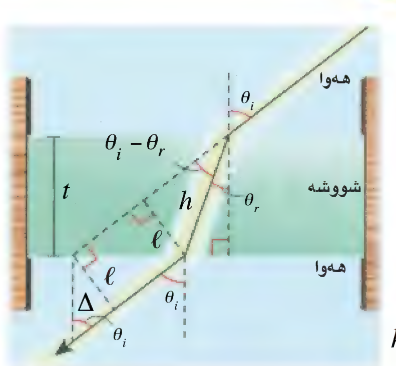
بەهای بڕەکە بە تەواوی بدۆزەوە.

26 $\sin 165°$ **27** $\tan(-105°)$ **28** $\sin(-15°)$ **29** $\cos 195°$ **30** $\cos\frac{19\pi}{12}$

31 $\tan\frac{5\pi}{12}$ **32** $\sin 255°$ **33** $\tan 195°$ **34** $\cos\frac{\pi}{12}$

بەهای θ بدۆزەوە ئەگەر زانیت $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$

35 $\cos(\theta - 30°) = \frac{1}{2}$ **36** $\cos(\theta + 20°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **37** $\sin(180° - \theta) = \frac{1}{2}$



38 **فیزیا** ڕووناکی بە گۆشەی θ_i بە شووشەدا تێپەر دەبێت. و بەهەمان گۆشە لێوەی دەردەچێت. بەڵام خاڵی دەرچوونی ڕووناکی لە شووشەکەوە بە دوریەکی ئاسۆیی لە خاڵی چوونە ژوورەوەی بە بڕی $\Delta = \left(\frac{\sin(\theta_i - \theta_r)}{\sin\theta_i \cos\theta_r}\right)t$ دوورە وەك لە وێنەی بەرامبەر دا دیارە.

أ بەبەکارهێنانی هاوئەنجامی سێگۆشەییەکان بڕەی Δ تەنها بە پێی tan بنووسە.

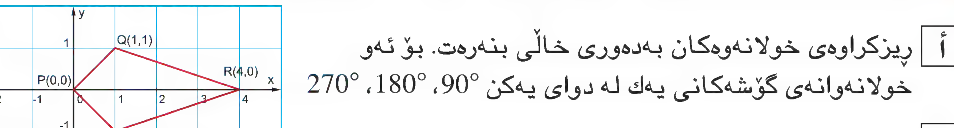
ب وێنەی بەرامبەر بەکاربێنە بۆ نوسینی $\sin(\theta_i - \theta_r)$ بە پێی ℓ و h

فرەهەنگاو بەهای هەریەکە لە $\tan(A+B)$ و $\cos(A+B)$ و $\sin(A-B)$ لە هەربارێکدا بدۆزەوە

39 $\sin A = -\frac{7}{25}$ و $180° < A < 270°$ ؛ $\cos B = \frac{12}{13}$ و $0° < B < 90°$

40 $\sin A = -\frac{1}{3}$ و $270° < A < 360°$ ؛ $\sin B = \frac{4}{5}$ و $0° < B < 90°$

41 بۆ دروستکردنی دروشمی بەرهەمێکی نوێ چوارلای $PQRS$ چەند جارێك جێگۆڕکیی پێکراوە.



أ ڕیزکراوەی خولانەوەکان بەدەوری خاڵی بنەڕەت. بۆ ئەو خولانەوانەی گۆشەکانی یەك لە دوای یەکن $90°$، $180°$، $270°$

ب ڕیزکراوەکان بۆ دیاریکردنی پۆوتانی وێنەی چوارلایەکە بە هەموو خولانەوەکانیانەوە بەکاربێنە.

ج لە هەمان ڕووتەختی پۆتاندا وێنەی چوارلایەکە بە هەرسێ خولانەوەکانیەوە بکێشە.

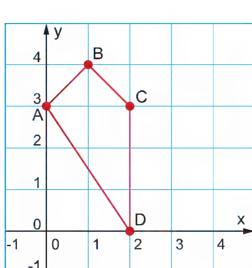
42 **بیری ڕەخنەگر** ئایا دەتوانیت بەهای $\sin\frac{11\pi}{24}$ بە تەواوی بدۆزیەوە بە بەکارهێنانی هاوئەنجامەکانی سەرجەم یان جیاوازی؟ ڕوونیبکەوە.

43 نەخشەی $y(t) = 4.2\sin\left(\frac{2\pi}{3}t - \frac{\pi}{2}\right)$ بۆ دۆزینەوەی کشانی سپرینگ لە ژێر کاریگەری تەنێك کە پێوەی هەڵواسراوبێت بە پێی کات بە چرکە بەکاردێت.

أ فراوانی و کاتی خولی نەخشەکە بدۆزەوە.

ب هاوئەنجامی سێگۆشەیی بەکاربێنە بۆ نووسینی ئەو نەخشەیە بە پێی Cos بەتەنها.

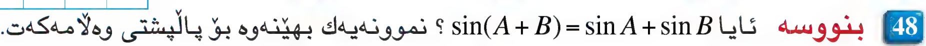
ج کشانەکە پاش 8 چرکە چەندە؟



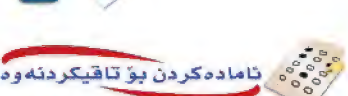
ئەندازە پێوتانی سەرەکانی چوارلای $ABCD$ بدۆزەوە کاتێك $A(0, 3)$ ، $B(1, 4)$ ، $C(2, 3)$، $D(2, 0)$ بە خولانەوەی گۆشەی θ چەقەکەی خاڵی بنەڕەت بێت وەڵامەکەت بۆ نزیکترین بەش لەسەد نزیکبکەوە.



44 $\theta = 45°$ **45** $\theta = 60°$ **46** $\theta = 120°$ **47** $\theta = -30°$



48 **بنووسە** ئایا $\sin(A+B) = \sin A + \sin B$ ؟ نموونەیەك بهێنەوە بۆ پاڵپشتی وەڵامەکەت.



49 کام لەمانەی خوارەوە بەهای بڕەی سێگۆشەیی $\cos 15° \cos 45° - \sin 15° \sin 45°$ ؟

أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ج) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ د) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

50 کام لەمانە بەهای x ـە ، ئەگەر $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \frac{1}{2}$

أ) $\frac{\pi}{6}$ ب) $\frac{\pi}{4}$ ج) $\frac{\pi}{3}$ د) $\frac{\pi}{2}$

51 بەهای $\cos(A-B)$ بدۆزەوە ، ئەگەر زانیت $\sin A = \frac{1}{2}$، $0° < A < 90°$ و $\cos B = \frac{3}{5}$، $0° < B < 90°$

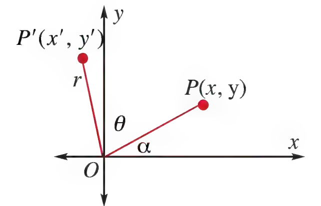
أ) $\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$ ب) $\frac{3\sqrt{3}-4}{10}$ ج) $\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$ د) $\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$

52 **کورتە وەڵام** بەهای $\sin(-15°)$ بە تەواوی بدۆزەوە، هەنگاوەکانت دیاربکە.

بەرەنگاری و فراوانکردن

53 ساغیبکەوە کە هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی خولانەوە بە گۆشەی θ بریتییە لە ڕیزکراوەی خولانەوە بە گۆشەی $-\theta$.

54 سەلمێنراوی tan ی سەرجەمی دوو گۆشە $\tan(A+B)$ بسەلمێنە.



55 دیاریبکە چۆن ڕێزکراوەی خولانەوە بەبەکارهێننی هاوئەنجامەکانی سەرجەمی sin و cos دەستدەکەوێت بیرت بێتەوە لە پۆلی دەیەمدا توانیوتە هەر خاڵێك وەك $P(x, y)$ لەسەر شێوەی $P(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$ بەبەکارهێنانی گۆشەی ڕاگر بنووسە.

گۆشەی خولانەوە بە دەوری خاڵی بنەڕەت بدۆزەرەوە کە جێگۆڕکێ بە سێگۆشەی ABC بۆ $A'B'C'$ دەکات کاتێك $A(1, 0)$ ، $B(0, 2)$ ، $C(-1, 0)$ بێت.

56 $A'(0, 1)$ ، $B'(-2, 0)$ ، $C'(0, -1)$

57 $A'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ، $B'(-\sqrt{2}, 2)$ ، $C'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

58 $A'(-1, 0)$ ، $B'(0, -2)$ ، $C'(1, 0)$

59 $A'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ، $B'(-1, \sqrt{3})$ ، $C'\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

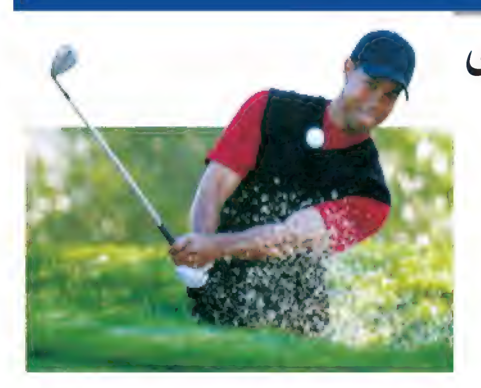
پێداچوونەوەی لولپێچی

دابەش بکە وادابنێ هەموو بڕەکان پێناسەکراوە (پۆلەکانی پێشوو)

60 $\frac{3x^2}{7y^3} \div \frac{6x}{21y}$ **61** $\frac{x^2+x-2}{x^2-2x-8} \div \frac{x^2+3x+2}{x^2-3x-4}$ **62** $\frac{9x^3y^2}{15xy^4} \div \frac{6x^4y}{3x^2y^5}$

بەبەکارهێنانی یەك ڕێژەی سێگۆشەیی بڕەکە بنووسە. (وانەی 7-3)

63 $\frac{\frac{1}{\tan\theta} \times \frac{1}{\cos\theta}}{\frac{\cos\theta}{\sin\theta \quad \cos\theta}}$ **64** $\frac{1}{\tan\theta}\,\frac{\tan\theta}{\sin\theta}$ **65** $\cos\theta \sin\theta \tan\theta$



5-7 هاوئەنجامەکانی دوو ئەوەندەی گۆشە و نیو ئەوەندەی گۆشە

Double-Angle and Half-Angle Identities

ئامانجەکان

- هاوئەنجامەکانی دوو ئەوەندەی گۆشە و نیو ئەوەندەی گۆشە بەکاردێنێت بۆ هەژمارکردنی بەهاکانی بڕە سێگۆشەییەکان و نووسینەوەیان بە سادەترین شێوە.

بۆچی ئەمە فێردەبین؟

دەتوانیت هاوئەنجامی دوو ئەوەندەی گۆشە بەکاربێنیت بۆ هەژمارکردنی دووری ئاسۆیی هاوێژراوێك وەك تۆپێکی گۆڵف (پرسیاری 94)

بۆ بەدەستهێنانی هاوئەنجامەکانی دوو ئەوەندە دەتوانیت هاوئەنجامەکانی سەرجەم بەکاربێنیت

بۆ نموونە $\sin 2\theta = \sin(\theta+\theta)$

$$= \sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta$$

$$= 2\sin\theta\cos\theta$$

دەتوانیت هاوئەنجامەکانی $\cos 2\theta$ و $\tan 2\theta$ بە هەمان ڕێگای پێشوو بدۆزیتەوە هاوئەنجامی $\cos 2\theta$ سێ شێوەی هەیە. دەتوانین بەبەکارهێنانی هاوئەنجامی سەرجەمی cos و هاوئەنجامی بنەڕەتی $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ بە دەستیان بێنن. وا باوە بڕە سێگۆشەییەکان بە پێی θ بنوسرێت.



هاوئەنجامەکانی دووئەوەندە		
$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$	$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$	$\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

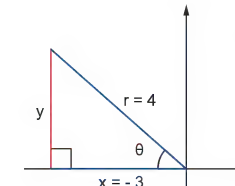
نموونە 1 هەژمارکردنی بەهای بڕەیەکی سێگۆشەیی بەبەکارهێنانی هاوئەنجامەکانی دوو ئەوەندە

بەهای تەواوی $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ بدۆزرەوە ئەگەر زانیت $\cos\theta = -\frac{3}{4}$ $90^\circ < \theta < 180^\circ$

هەنگاوی 1 $\sin\theta$ بدۆزەوە بۆ ئەوەی بە های $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ بدۆزەوە؟

ڕێگای یەکەم گۆشەی ڕاگر بەکاربێنە.

لە چارەکی دووەم $90^\circ < \theta < 180^\circ$ $\cos\theta = -\frac{3}{4}$



$$(-3)^2 + y^2 = 4^2$$

سەلمێنراوی فیساغۆرس

$$y = \sqrt{16-9} = \sqrt{7}$$

بەهای هەژماریکە ڕەگی موجەب وەربگرە

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

ڕێگای دووەم شیکاریکە

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

$$\sin\theta = \sqrt{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^2}$$

لەجیاتی دابنێ ڕەگی دووجا وەربگرە

$$= \sqrt{1-\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

سادەی بکە

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

ئاگاداربە!

لە نیشانەی X و y دەردەکەوێت گۆشەی θ دەکەوێتە کام چارەکەوە.

	sin	cos
یەکەم	+	+
دووەم	+	−
سێیەم	−	−
چوارەم	−	+

هەنگاوی 2 بەهای $\sin 2\theta$ بدۆزەوە

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$ هاوئەنجامی $\sin 2\theta$ دوئەوەندە

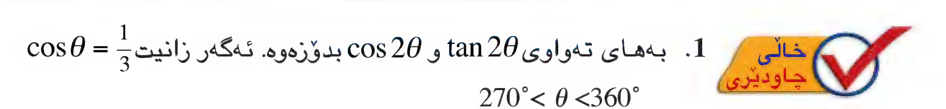
$$\sin 2\theta = 2\frac{\sqrt{7}}{4}\left(-\frac{3}{4}\right)$$ لەجیاتی دابنێ

$$= -\frac{3\sqrt{7}}{8}$$ سادەبکە

هەنگاوی 3 بەهای $\cos 2\theta$ بدۆزەوە

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$ هاوئەنجامی $\cos 2\theta$ دووئەوەندە

$$\cos 2\theta = 2\left(-\frac{3}{4}\right)^2 - 1 = \frac{1}{8}$$



خاڵی چاودێری

.1 بەهای تەواوی $\tan 2\theta$ و $\cos 2\theta$ بدۆزەوە. ئەگەر زانیت $\cos\theta = \frac{1}{3}$
$270^\circ < \theta < 360^\circ$

دەتوانیت هاوئەنجامەکانی دووئەوەندە بەکاربێنێت بۆ سەلماندنی هاوئەنجامە سێگۆشەییەکان.

نموونـــــە 2 سەلماندنی هاوئەنجامە سێگۆشەییەکان بەبەکارهێنانی هاوئەنجامەکانی دوو ئەوەندە.

هاوئەنجامەکە بسەلمێنە

أ $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$

$$\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$$ لای ڕاست وەربگرە.

$$= \frac{1}{2}(1-(1-2\sin^2\theta))$$ هاوئەنجامی $\cos 2\theta$ بەکاربێنە

$$= \frac{1}{2}(2\sin^2\theta)$$ سادەبکە

$$\sin^2\theta = \sin^2\theta$$

ب $(\cos\theta + \sin\theta)^2 = 1 + \sin 2\theta$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta =$$ لای چەپ وەربگرە، دووجاتەواوەکە بکەوە

$$(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + (2\cos\theta\sin\theta) =$$ کۆبکەوە

$$1 + \sin 2\theta$$ هاوئەنجامی $\sin 2\theta$ و هاوئەنجامی فیساغۆرسیەکان بەکاربێنە

$$1 + \sin 2\theta = 1 + \sin 2\theta$$

ڕۆشنایی

یەک لا هەلبژێرە بۆ گۆرانکاریکردن، نەوەک هەردوو لا بەیەکجار.

خاڵی چاودێری

.2 هاوئەنجامەکە بسەلمێنە.

أ $\cos^4\theta - \sin^4\theta = \cos 2\theta$ **ب** $\sin 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$

دەتوانیت هاوئەنجامی $\cos 2\theta$ بەکاربێنی بۆ گەیشتن بە هاوئەنجامەکانی نیوە.

بەبەکارهێنانی $\frac{\theta}{2}$ لە جیاتی θ

لە نموونەی 2 سەلماندووتە کە: $\text{Sin}^2\theta = \frac{1-\text{Cos}\,2\theta}{2}$ هەروەها $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ بەکاربێنە بۆ نووسینی $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$ ئەگەر لە جیاتی θ، $\frac{\theta}{2}$ دابنێی هاوئەنجامی نیو ئەوەندمان دەستدەکەوێت.



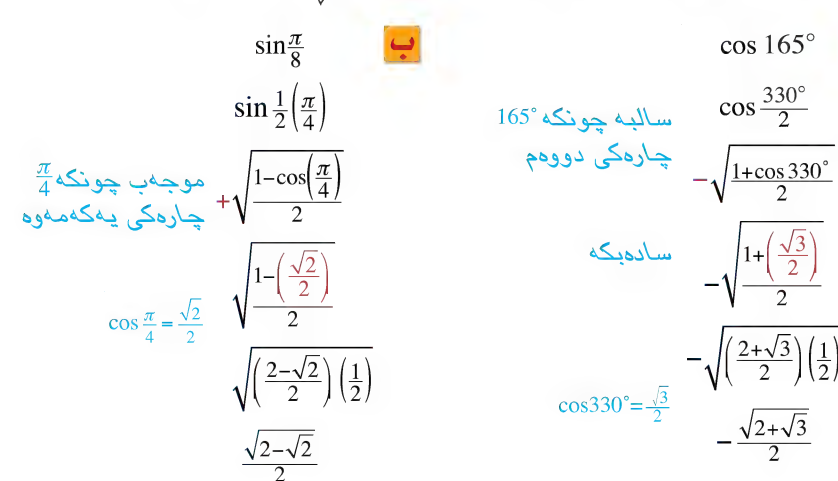
هاوئەنجامەکانی نیوە		
$\sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$	$\cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$	$\tan\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$

دیاریکردنی نیشانە بەپێی شوێنی کۆتا لا (دوالا) بۆ گۆشەی $\frac{\theta}{2}$ دەبێت لەبارى نموونەییدا.

هاوئەنجامەکانی نیوە یارمەتی هەژمارکردنی بەهاکانی هەر بڕێکمان بە تەواوی دەدات.

نموونە 3 هەژمارکردنی بەهاکانی بڕە سێگۆشەییەکان بە بەکارهێنانی هاوئەنجامەکانی نیوە

هاوئەنجامەکانی نیوە بەکاربێنە بۆ هەژمارکردنی هەر بڕێك بەتەواوتی.



أ $\cos 165^\circ$

$\cos\frac{330^\circ}{2}$ — سالبە چونکە 165° چارەکی دووەم

$-\sqrt{\frac{1+\cos 330^\circ}{2}}$

$-\sqrt{\frac{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2}}$ — سادەبکە

$-\sqrt{\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}$ — $\cos330^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

ب $\sin\frac{\pi}{8}$

$\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

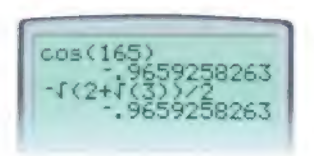
$+\sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}}$ — موجەب چونکە $\frac{\pi}{4}$ چارەکی یەکەمەوە

$\sqrt{\frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2}}$ — $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

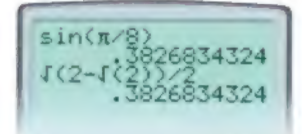
$\sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}$

$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

بەبەکارهێنانی بژمێری زانستی پاساودان بکە



بەبەکارهێنانی بژمێری زانستی پاساودان بکە



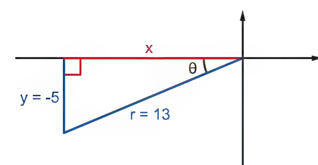


3. هاوئەنجامەکانی نیوە بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی بەهای هەر بڕێك بە تەواوەتی

أ $\tan 75^\circ$ **ب** $\cos\frac{5\pi}{8}$

نموونە 4 بەکارهێنانی سەلمێنراوی فیساغۆرس و هاوئەنجامەکانی نیوە

بەهای $\sin\frac{\theta}{2}$ و $\tan\frac{\theta}{2}$ بدۆزەوە، ئەگەر زانیت $\sin\theta=-\frac{5}{13}$ $180^\circ<\theta<270^\circ$



هەنگاوی 1 $\cos\theta$ بدۆزەوە بۆ ئەوەی بتوانیت هاوئەنجامەکانی نیوە بەکاربێنی گۆشەی ڕاگر بەکاربێنە.

لە چارەکی سێیەم هەژماربکە $180^\circ<\theta<270^\circ$ $\sin\theta=-\frac{5}{13}$

$x^2+(-5)^2=13^2$ — سەلمێنراوی فیساغۆرس

$x=-\sqrt{169-25}=-12$ — بەهای x هەژماربکە.

کەواتە $\cos\theta=-\frac{12}{13}$

هەنگاوی 2 بەهای $\sin\frac{\theta}{2}$ هەژماربکە.

$\sin\frac{\theta}{2}$

$+\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$ — $\sin\frac{\theta}{2}$ موجەبە لەبەر ئەوەی $90<\theta<135$

$\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{12}{13}\right)}{2}}$ — لەجیاتی دابنێ

$\sqrt{\left(\frac{25}{13}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}$ — سادەبکە

$\sqrt{\frac{25}{26}}=\frac{5\sqrt{26}}{26}$

هەنگاوی 3 بەهای $\tan\frac{\theta}{2}$ هەژماربکە

$\tan\frac{\theta}{2}$

$-\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$ — $\tan\frac{\theta}{2}$ موجەبە لەبەر ئەوەی $90°<\theta<135°$

$-\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{12}{13}\right)}{1+\left(-\frac{12}{13}\right)}}$ — لەجیاتی کە

$-\sqrt{\left(\frac{25}{13}\right)\left(\frac{13}{1}\right)}$ — سادەبکە

$-\sqrt{25}$

-5

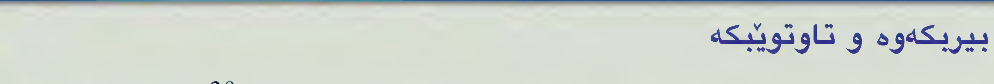
ئاگاداربە!

ورد بە لە دیاریکردنی نیشانەی هەر یەك لە $\sin\frac{\theta}{2}$، $\cos\frac{\theta}{2}$ ئەگەر $180°<\theta<270°$

ئەوا $90°<\frac{\theta}{2}<135°$



.4 بەهای $\sin\frac{\theta}{2}$ و $\cos\frac{\theta}{2}$ بدۆزەوە ئەگەر زانیت $\tan\theta=\frac{4}{3}$ $0°<\theta<90°$



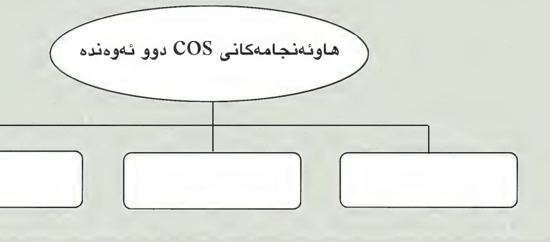
بیربکەوە و تاوتوێبکە



.1 **ڕوونبیکەوە** کام هاوئەنجامی دووئەوەندە بەکاردێنیت بۆ سادەکردنی $\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$

.2 **باسیبکە** چۆن نیشانەی $\sin\frac{\theta}{2}$ و $\cos\frac{\theta}{2}$ دیاریدەکرێ.

.3 **ڕێکخەر** بە دووبارە هێڵکارییەکە دووبارە بنووسەوە پاشان تەواوی بکە. لە هەر چوار چێوەیەك هاوئەنجامێکی بنووسە.



5–7 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

بەهای هەریەك لە $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ و $\tan 2\theta$ بدۆزەوە.



پروانە نموونە 1

1 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ؛ $\cos\theta = -\frac{5}{13}$

2 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ؛ $\sin\theta = \frac{4}{5}$

هەریەك لە و هاوئەنجامانە بسەلمێنە

پروانە نموونە 2

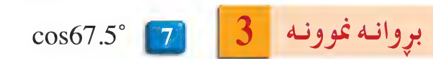
3 $2\cos 2\theta = 4\cos^2\theta - 2$

4 $\sin^2\theta = 1 - \frac{\cos 2\theta + 1}{2}$

5 $\frac{1+\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \frac{1}{\tan\theta}$

6 $\sin 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$

بەبەکارهێنانی هاوئەنجامەکانی نیوە بەهای بڕەکان بدۆزەوە.



پروانە نموونە 3

7 $\cos 67.5^\circ$

8 $\cos\frac{\pi}{12}$

9 $\tan\frac{3\pi}{8}$

10 $\sin 112.5^\circ$

بەهای $\sin\frac{\theta}{2}$ و $\cos\frac{\theta}{2}$ و $\tan\frac{\theta}{2}$ بدۆزەوە

پروانە نموونە 4

11 $180^\circ < \theta < 270^\circ$ ؛ $\sin\theta = -\frac{24}{25}$

12 $270^\circ < \theta < 360^\circ$ ؛ $\cos\theta = \frac{1}{4}$

ڕاهێنان وشیکارکردنی پرسیارەکان

بەهای $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ و $\tan 2\theta$ بدۆزەوە

13 $90^\circ < \theta < 180^\circ$ ؛ $\cos\theta = -\frac{7}{25}$

14 $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ ؛ $\tan\theta = \frac{20}{21}$

هەریەك لەم هاوئەنجامانە بسەلمێنە

15 $\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta} = 2\cos\theta$

16 $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$

17 $\tan\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$

18 $\tan\theta = \frac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}$

بەبەکارهێنانی هاوئەنجامەکانی نیوە بەهای بڕەکە بدۆزەوە.

19 $\sin\theta\,\frac{7\pi}{12}$

20 $\cos\frac{5\pi}{12}$

21 $\sin 22.5^\circ$

22 $\tan 15^\circ$

بەهای $\sin\frac{\theta}{2}$ و $\cos\frac{\theta}{2}$ و $\tan\frac{\theta}{2}$ بدۆزەوە

23 $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ ؛ $\tan\theta = -\frac{12}{35}$

24 $180^\circ < \theta < 270^\circ$ ؛ $\sin\theta = -\frac{3}{5}$

فرەهەنگاو بڕەکە بە سادەترین شێوە بنووسە، ڕێژە سێگۆشەییەکان θ لە جیاتی چەند جارەی θ بەکاربێنە

25 $\sin 3\theta$

26 $\sin 4\theta$

27 $\cos 3\theta$

28 $\cos 4\theta$

29 $\cos 2\theta + 2\sin^2\theta$

30 $\cos 2\theta + 1$

31 $\tan 2\theta\left(2 - \frac{1}{\cos^2\theta}\right)$

32 $\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta + \sin\theta}$

33 $\frac{\cos\theta\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}$

34 $\frac{\cos 2\theta - 1}{\sin^2\theta}$

ڕاهێنانی ئازاد

بۆشیکارکردنی ڕاهێنانەکان	سەیری نموونە بکە
14-13	1
18-15	2
22-19	3
24-23	4

35 نەخشەی $y(t)=3.1\sin 2t$ بۆ پێوانەی کشانی سپرینگێك. لە ژێر کاریگەری تەنێك کە پێوەی هەڵواسرابێت بە پێی کات بە چرکە دەنوێنرێت.

أ نەخشەکە بە پێی ڕێژە سێگۆشەییەکان بۆ t لە جیاتی 2t بەبەکارهێنانی هاوئەنجامەکانی دوو ئەوەندە بنووسە.

ب نەخشەی $w(t)=3.8\cos t$ نموونەکە بۆ پێوانی کشانی سپرنگێکی تر لە ژێر کاریکەری تەنێك کە پێوەی هەڵواسرابێت. دووتەن بەهەریەکە لە دوو سپرینگەکەوە لەیەك کاتدا $t=0$ لە چ ساتێکدا کشانی دوو سپرینگەکە لە جاری یەکەمدا یەکسان دەبن.

ج لەو ساتەدا کشانی دوو سپرنگەکە چەند دەبێت؟

هەنگاوی جۆراو جۆر بەهاکانی **$\sin 2\theta$** و **$\cos 2\theta$** و **$\tan 2\theta$** و **$\sin\frac{\theta}{2}$** و **$\cos\frac{\theta}{2}$** و **$\tan\frac{\theta}{2}$** بدۆزەوە.

36 $\cos\theta=-\frac{3}{8}$ ؛ $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$

37 $\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{3}$ ؛ $180^\circ<\theta<270^\circ$

38 $\sin\theta=\frac{2}{5}$ ؛ $0^\circ<\theta<90^\circ$

39 $\tan\theta=-\frac{1}{2}$ ؛ $\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$

بەبەکارهێنانی هاوئەنجامەکانی نیوە بەهای تەواوەتی بڕەکان بدۆزەوە.

40 $\cos\frac{7\pi}{8}$

41 $\sin\frac{11\pi}{12}$

42 $\cos 105^\circ$

43 $\sin(-15^\circ)$

44 $\cos(-135^\circ)$

هاوئەنجامەکە بسەلمێنە

45 $\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{\sin^2\theta}{2(1-\cos\theta)}$

46 $\cos 2\theta=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

47 $\frac{\tan\theta+\sin\theta}{2\tan\theta}=\cos^2\frac{\theta}{2}$

48 **بژمێری ڕوونکردنەوەیی** وێنەی ڕوونکردنەوەیی $y=\frac{\cos x(1-\cos 2x)}{\sin 2x}$ بکێشە. بۆ دۆزینەوەی هاوئەنجامێکی سێگۆشەیی. ئەو هاوئەنجامە جەبریانە بسەلمێنە.

49 **هەنگاوی جۆراوجۆر** تۆپێکی گۆڵف بەخێرایی سەرەتایی v_0 پی/چر هاوێژرا. بە پێی بەرزە گۆشەی θ نەخشەی $d(\theta)=\frac{v_0^2\sin\theta\cos\theta}{16}$ هەژماری ئەو ماوە ئاسۆییەکە تۆپەکە بڕیویەتی بکە.

أ نەخشەی پیشوو بەبەکارهێنانی ڕێژەی سێگۆشەی 2θ بنووسە.

ب ئەو دووریە ئاسۆییە هەژماربکە کە تۆپەکە دەیبڕێت لە کاتێکدا خێرایی بنەڕەتی 80 بێت لە چرکەیەکدا بەبەرزە گۆشەکانی 15° ، 30° ، 45° ، 60° ، 75°.

ج ئەگەر خێراییە سەرەتاییەکە نەگۆڕ بێت، کام گۆشە گەورەترین دووری ئاسۆیمان دەداتێ.

د **چی دەبێت ئەگەر...؟** خێرایی سەرەتایی 80 پێ/چر. دیاریبکە کام یەکێ لە دوو گۆشەکە پێویستە ببێتە بەرزە گۆشە بۆ ئەوەی دووری ئاسۆیی براو لە 175 پێ کەمتر نەبێت.

50 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** ڕوونیبکەوە چۆن بەهای تەواوەتی $\sin 7.5^\circ$ دەدۆزێتەوە؟

51 **بنووسە** چۆن دەزانیت لە چ کاتێکدا هاوئەنجامی دوو ئەوەندە و هاوئەنجامی نیوە بەکاردێت.

52 بەهای $\sin 2\theta$ چەندە ئەگەر $\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $90^\circ < \theta < 180^\circ$؟

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (ج) 1 (د) -1

53 بەهای $\cos 2\theta$ چەندە ئەگەر $\cos\theta = \sin\theta$؟

(أ) 0 (ب) 1 (ج) $2\sin^2\theta$ (د) $2\cos^2\theta$

54 بەهای $\sin\frac{\theta}{2}$ چەندە ئەگەر بزانیت $\cos\theta = -\frac{12}{13}$ و $90^\circ < \theta < 180^\circ$

(أ) $\frac{\sqrt{26}}{26}$ (ب) $-\frac{\sqrt{26}}{26}$ (ج) $\frac{5\sqrt{26}}{26}$ (د) $-\frac{5\sqrt{26}}{26}$

55 بەهای تەواوەتی $\sin 157.5^\circ$ چەندە؟

(أ) $-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ (ب) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ (ج) $-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ (د) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

56 **کورتە وەڵام** ڕاستی $\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta + \cos\theta} = \cos\theta - \sin\theta$ پاسادان بکە. $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

بەرەنگاری و فراوانکردن

57 $\tan 2\theta$ بەبەکارهێنانی $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ بدۆزەوە.

58 $\tan\frac{\theta}{2}$ بەبەکارهێنانی $\sin\frac{\theta}{2}$ و $\cos\frac{\theta}{2}$ بدۆزەوە.

هاوئەنجامەکانی نیوە بۆ دۆزینەوەی بەهای تەواوی برەکان بەکاربێنە.

59 $\tan 7.5^\circ$ **60** $\tan\frac{\pi}{16}$ **61** $\sin\frac{\pi}{24}$ **62** $\cos 11.25^\circ$

63 **بنووسە** بەهاکانی θ کە پاسەدانی $\sin 2\theta = 2\sin\theta$ دەکات بدۆزەوە لە پێشدا بەبەکارهێنانی وێنەی ڕوونکردنەوەیی ئەم کارەبکە.

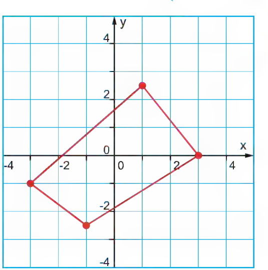
64 هاوئەنجامەکانی سەرجەم و جیاوازی بەکاربێنە بۆ بەدەستهێنانی دوو هاوئەنجام.

$\sin A \sin B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right]$ و $\cos A \cos B = \frac{1}{2}\left[\cos(A+B) + \cos(A-B)\right]$

پێداچوونەوەی لولپێچی

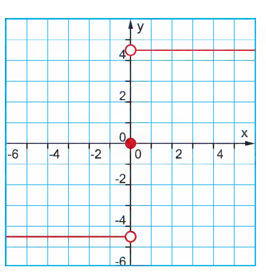
تاقیکردنەوەی ڕاستەهێڵی ئەستوونی بەکاربێنە بۆ دیاریکردنی پەیوەندییەکە نەخشەیە یان نا
(پۆلەکانی پێشوو).

65



66





کۆبکەوە یان لێدەربکە، ئەو بەهایانەی x دیاریبکە والە نەخشەکە دەکەن پێناسە نەکراوبێت.
(پۆلەکانی پێشوو)

67 $\frac{3x-2}{x+7} + \frac{2x+14}{x+7}$ **68** $\frac{4x-1}{x} + \frac{6x-2}{2x}$ **69** $\frac{7x+4}{x+1} - \frac{5x+8}{x-3}$ **70** $\frac{x+9}{x^2} - \frac{x}{x+2}$

بەهای تەواوەتی برەکان بدۆزەوە. (وانەی 7-4)

71 $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$ **72** $\sin 105^\circ$ **73** $\cos\frac{7\pi}{12}$ **74** $\cos 255^\circ$

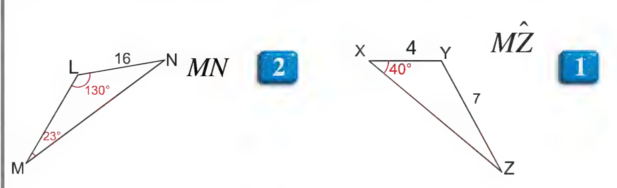
بەشی 7

ڕێبەری خوێندن: پێداچوونەوە

پێوانەی هەریەك لەمانە بدۆزەوە درێژییەکە بۆ نزیکترین بەش لە دەیەك و پێوانەکە بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە.

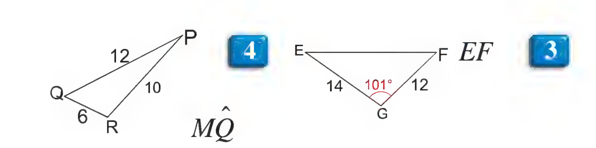
1 $M\hat{Z}$

2 MN



3 EF

4 $M\hat{Q}$



وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشە سێگۆشەییە بنەڕەتیەکە بەکاربێنە بۆ وێنەکێشانی ئەم نەخشانە، فراوانی و کاتی خوولی دیاریبکە.

5 $f(x)=\cos 3x$

6 $g(x)=\cos\frac{1}{2}x$

7 $f(x)=-\frac{1}{3}\sin 3x$

8 $f(x)=2\sin\pi x$

9 $h(x)=\frac{1}{2}\cos 2x$

10 $g(x)=\frac{\pi}{2}\sin\pi x$

وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشە سێگۆشەییە بنەڕەتیەکە بۆ وێنەکێشانی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بەکاربێنە، وەخاڵی یەکتربڕینی لەگەڵ تەوەری ئاسۆیی و لادانی ڕوو بدۆزەوە.

11 $f(x)=\cos(x+\pi)$

12 $g(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

13 $h(x)=\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)$

14 $f(x)=\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$

زیندەزانی لە کرداری ڕۆشنەپیکهاتن ڕووەکان دووەم ئۆکسیدی کاربۆن CO_2 و ئاو بۆ شەکر و ئۆکسجین دەگۆڕێت لەسەر ئەم کردارە توێژینەوە دەکرێت بە پێوانەی برێك لە کاربۆن، کە ڕووەکەکە هەڵیدەمژێت (بەمایکرۆ مۆڵ) (Micromole) لە هەر مەتر چوار گۆشە لە چرکەدا دەپیورێت.

نەخشەی $C(t)=1.2\sin\frac{\pi}{12}(t-6)+7$ ڕێسایەکە بۆ پێوانی ئەو هێندە بە پێی کات t بەکاتژمێر.

15 وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە لە ماوەی دوو خولدا بکێشە.

16 کاتی خوولی نەخشەکە چەندە؟

17 گەورەترین بەهای ئەو نەخشەیە چەندە؟ و کەی ڕوودەدات؟

وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشە سێگۆشەییە بنەڕەتیەکە بۆ وێنەی کێشانی ڕوونکردنەوەی ئەم نەخشانە بەکاربێنە خاڵەکانی یەکتر بڕین لەگەڵ تەوەری ئاسۆیی و دەرکەنارەکان بدۆزەوە.

18 $f(x)=\frac{1}{4}\tan x$

19 $f(x)=\tan\pi x$

20 $f(x)=\tan\frac{1}{2}\pi x$

هاوئەنجامە سێگۆشەییەکان بسەلمێنە.

21 $\frac{1}{\cos\theta}\sin\theta\frac{1}{\tan\theta}=1$

22 $\frac{\sin^2(-\theta)}{\tan\theta}=\sin\theta\cos\theta$

23 $\left(\frac{1}{\cos\theta}+1\right)\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)=\tan^2\theta$

24 $1+\cos^2\theta\frac{1}{\sin^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta}$

25 $\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\right)^2=\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}$

26 $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}$

27 $\sin^2\theta\tan\theta=\tan\theta-\sin\theta\cos\theta$

28 $\frac{\tan\theta}{1-\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos\theta}\frac{1}{\sin\theta}$

بەبەکارهێنانی یەک نەخشەی سێگۆشەیی بڕەکە بنووسە

29 $\frac{1}{\tan\theta}\frac{1}{\cos\theta}$

30 $\frac{1}{\cos\theta}\sin\theta\tan\theta$

31 $\tan(-\theta)\sin(-\theta)\cos(-\theta)$

32 $\dfrac{\cos\theta\frac{1}{\tan\theta}}{\frac{1}{\sin^2\theta}-1}$

بەهای تەواوەتی بڕەکە بدۆزەوە

33 $\sin\frac{19\pi}{12}$

34 $\cos 165^\circ$

35 $\cos 15^\circ$

36 $\tan\frac{\pi}{12}$

بەهای بڕەکان بدۆزەوە ئەگەر زانیتە $0^\circ < A < 90^\circ$
$\tan B = -\frac{5}{12}$ ، $90^\circ < B < 180^\circ$ ، $\tan A = \frac{3}{4}$

37 $\sin(A+B)$

38 $\cos(A+B)$

39 $\tan(A-B)$

40 $\tan(A+B)$

41 $\sin(A-B)$

42 $\cos(A-B)$

پۆتانی سەرەکانی چوارلای $ABCD$ بدۆزەوە کاتێك $D(1,2)$ ، $C(4,2)$ ، $B(3,0)$ ، $A(0,0)$ بێت. بە خولانەوەیەك چەقەکەی خاڵی بنەرەتە و گۆشەکەی θ وەڵامەکەت بۆ نزیکترین بەش لە سەد نزیکبکەوە.

43 $\theta = 30^\circ$

44 $\theta = 45^\circ$

45 $\theta = 60^\circ$

46 $\theta = 90^\circ$

پۆتانی سەرەکانی چوارلای $ABCD$ بدۆزەوە کاتێك $D(-5,2)$ ، $C(0,4)$ ، $B(5,2)$ ، $A(0,0)$ بێت بە خولانەوەیەك چەقەکەی خاڵی بنەرەتە و گۆشەکەی θ وەڵامەکەت بۆ نزیکترین بەش لە سەد نزیکبکەوە.

47 $\theta = 120^\circ$

48 $\theta = 180^\circ$

49 $\theta = 240^\circ$

50 $\theta = 270^\circ$

بەهای بڕەکە بدۆزەوە ئەگەر زانیت $0^\circ < \theta < 90^\circ$
$\tan\theta = \frac{3}{4}$

51 $\sin 2\theta$

52 $\cos 2\theta$

53 $\tan\frac{\theta}{2}$

54 $\sin\frac{\theta}{2}$

بەهای بڕەکە بدۆزەوە ئەگەر زانیت $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ و
$\cos\theta = \frac{3}{4}$

55 $\tan 2\theta$

56 $\cos 2\theta$

57 $\cos\frac{\theta}{2}$

58 $\sin\frac{\theta}{2}$

هاوئەنجامەکانی نیوە بۆ دۆزینەوەی بەهای تەواوەتی بڕەکە بەکاربێنە.

59 $\sin\frac{\pi}{12}$

60 $\cos 75^\circ$

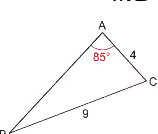
بەشی 7



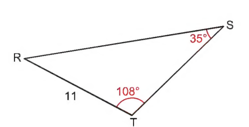
هەر پێوانەیەك بدۆزەوە. درێژیەکە بۆ نزیکترین دەیەك و پێوانەی گۆشەکە بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە.

1 $m\hat{B}$

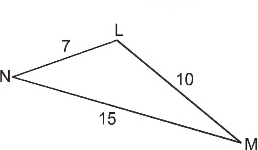




2 RS



3 $m\hat{M}$



4 وێنەی ڕوونکردنەوەیی $f(x) = \cos x$ بۆ وێنەکێشانی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $g(x) = \frac{1}{2}\cos 2x$ فراوانی و کاتی خولی دیاریبکە

5 وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x) = \sin x$ بەبکاربێنە. بۆ وێنەکێشانی نەخشەی $g(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ خاڵی یەکتربڕین لەگەڵ تەوەری ئاسۆیی و لادانی بەرە دیاربکە.

6 وێنەی ڕوونکردنەوەیی $f(x) = \tan x$ نەخشەی $g(x) = 2\tan \pi x$ کاتی خولی ویەکتر بڕینەکانی ئاسۆیی و دەرکەنارەکان دیاریبکە.

7 ئەم هاوئەنجامە بسەلمێنە $\frac{1}{\cos\theta}\,\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{1}{\tan\theta} = \cos^2\theta$

بەبەکارهێنانی یەك ڕێژەی سێگۆشەیی برەکە بنووسە.

8 $\left(\frac{1}{\cos\theta} + 1\right)\left(\frac{1}{\cos\theta} - 1\right)$

9 $\frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)}$

بەهای برەکە بدۆزەوە ئەگەر زانیت $0° < A < 90°$ و $180° < B < 270°$ و $\tan A = \frac{3}{4}$ و $\tan B = \frac{12}{13}$

10 $\sin(A + B)$

11 $\cos(A - B)$

12 پۆوتانی سەرەکانی چوارلای $ABCD$ بدۆزەوە $A(0, 1)$ ، $B(2, 1)$ ، $C(3, 3)$ ، $D(-1, 3)$ بێت. بە خولانەوەیەك چەقەکەی خاڵی بنەرەتەوە پێوانەی گۆشەکەی $30°$ وەڵامەکەت بۆ نزیکترین بەش لەسەد نزیکبکەوە.

بەهای برەکە بدۆزەوە ئەگەر بزانیت $90° < \theta < 180°$ و $\tan\theta = -\frac{12}{5}$

13 $\sin 2\theta$

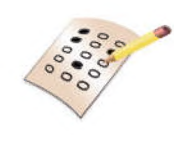
14 $\cos 2\theta$

15 $\cos\frac{\theta}{2}$

16 هاوئەنجامەکانی نیوە بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی بەهای تەواوەتی برەی $\sin\frac{3\pi}{8}$.

بەشی 7

تاقیکردنەوەی کەلەکەبوو



1 به هاى تەواوەتى $\tan 15^\circ$ چەندە؟

أ) $\frac{\sqrt{6-\sqrt{2}}}{4}$ ج) $\frac{\sqrt{6+\sqrt{2}}}{4}$

ب) $2+\sqrt{3}$ د) $2-\sqrt{3}$

2 دەرکەنارى نەخشەى $y=\frac{1}{3\tan 2x}$ لە کوێدادەبن؟

أ) $2\pi n$

ب) $\frac{\pi n}{2}$

ج) $3\pi n$

د) $\frac{\pi n}{3}$

3 کاتى خوولى نەخشەى $y=5\cos\frac{1}{3}x$ چەندە؟

أ) $\frac{2\pi}{5}$

ب) $\frac{5}{3}$

ج) $\frac{2\pi}{3}$

د) 6π

4 فلیمێك لە 14 دیمەنى گفتوگۆ و 10 دیمەنى ئەکشن پێکدێت. بە شێوەیەکى هەڕەمەکى دیمەنێك هەڵبژێرا. ئەگەرى ئەوەى دیمەنەکە ئەکشن بێت چەندە؟

أ) $\frac{5}{12}$

ب) $\frac{7}{12}$

ج) $\frac{5}{7}$

د) $\frac{7}{5}$

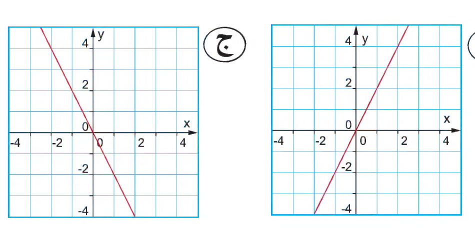
5 بەهاى نەخشەى $f(x)=3x^3+4x^2+7x+10$ چەندە لە $x=-2$ دا.

أ) -44 ج) -12

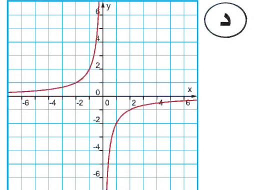
ب) 0 د) 36

6 کام لەمانە هێڵکارى ڕوونکردنەوەیى پێچەوانەى نەخشەکەیە، کاتێك $y=2$ و $x=-1$ ؟

أ) ج)



ب) د)



7 هاوئەنجامەکانى نیوە بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەى بەهاى تەواوەتى $\cos 157.50^\circ$.

أ) $-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

ب) $-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

ج) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

د) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

8 پۆوتانەکانى سەرى چەماوەى نەخشەى $f(x)=x^2+6x-4$ چییە؟

أ) $(0, -4)$

ب) $(-3, -13)$

ج) $(-3, 5)$

د) $(3, 5)$

9 $ABCDE$ پێنجلایەکى قۆقزە $\hat{A}\cong\hat{B}\cong\hat{C}$ ، $\hat{D}\cong\hat{E}$ ، $m\hat{A} = m\hat{D}$ ، $m\hat{C}$ چەندە؟

أ) 67.5° ج) 154.3°

ب) 135° د) 225°

10 کام لەمانە یەکسان نییەبە $\sin60°$

(أ) $\cos30°$

(ب) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

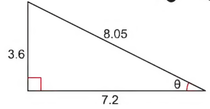
(ج) $\frac{\tan30°}{\sin30°}$

(د) $(\cos60°)(\tan60°)$

کورتە وەڵام

11 بەهای x چەندە کاتێك $5\sqrt{2x-7}+4=9$

12 بەهای $\cos\theta$ بدۆزەوە وەڵامەکەت بۆ نزیکترین بەش لە هەزار نزیکبکەوە.



13 سەرجەمی ئەم زنجیرە ژمارەییە بدۆزەوە. $\sum_{k=1}^{14}(3k-5)$

14 لە دوو سێگۆشەی ABC ، DEF ، $\hat{A}\cong\hat{F}$ و $\hat{B}\cong\hat{D}$

ئەگەر $EF=4.5$ و $DF=3$ و $AC=1.5$ پێویستە درێژی $\overline{AB}$ چەند بێت بۆ ئەوەی هەردوو سێگۆشەکە هاوشێوەبن.

کورتە وەڵام

15 یانەی شەترەنجی ئامادەیی سلێمانی 12 ئەندامە پیویستە بەڕێوەبەری خوێندنگاکە 2 یاریکەر هەڵبژێری بۆ بە شداریکردن لە قارەمانیەتی شەترەنجی عێراق .

أ به چەند ڕیگا دەتوانین ئەم دوو یاریکەرە هەڵبژێرین

ب ڕوونیبکەوە بۆچی ئەو ڕێگایەت بۆ شیکارکردنی پرسیارەکە هەڵبژارد.

16 یەکبەدوای یەکی ... ,324 ,108 ,36 ,12 ,2 بەکاربهێنە

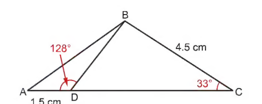
أ پێناسەیەکی ئاشکرا بۆ ڕادەی n ی بنووسە

ب ڕادەی دەیەم کامەیە.

17 بۆ دۆزینەوەی هەر پێوانەیەك وێنەکە بەکاربێنە درێژییەکەی بۆ نزیکترین دە لە cm نزیکبکەوە.

ج درێژی $\overline{DC}$

د درێژی $\overline{AB}$



وەڵامی درێژ

18 خشتەی خوارەوە نمرەکانی خوێندکارەکانی پۆلی 10 لە بابەتی بیرکاری نیشاندەدات.

96	94	86	72	85	90
85	71	68	94	95	85
89	80	83	84	98	93

بدۆزەرەوە:

أ ناوەندە ژمێرەیی.

ب ناوەڕاستە.

ج باو.

د لێکنەچوون.

هـ لادانی پێوانەیی.

و مەودا.

